練習問題 1-A

1.

$$f_x(0,\ 0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,\ 0)-f(0,\ 0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2h^3+0}{h^2-0}-0}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2h^3}{h^2}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h}=\mathbf{2}$$

$$f_y(0,\ 0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,\ 0+h)-f(0,\ 0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0+h^3}{0-2h^2}-0}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{-2h^2}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-\frac{h}{2}}{h}=-\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

2.

（１）$z=(x^2-2y^3)^{\frac{1}{2}}$

$$z_x=\frac{1}{2}\cdot(x^2-2y^3)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x$$
$$=\boldsymbol{\frac{x}{\sqrt{x^2-2y^3}}}$$

$$z_y=\frac{1}{2}\cdot(x^2-2y^3)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-6y^2)$$
$$=-\boldsymbol{\frac{3y^2}{\sqrt{x^2-2y^3}}}$$

（２）$z_x=ye^{x-y}\cdot 1=\boldsymbol{ye^{x-y}}$

$z_y=1\cdot e^{x-y}+ye^{x-y}\cdot(-1)$

$=e^{x-y}-ye^{x-y}$

$=\boldsymbol{(1-y)e^{x-y}}$

（３）$z_x=\dfrac{1}{\cos(4x-3y)}\cdot\{-\sin(4x-3y)\}\cdot 4$

$$=-4\cdot\frac{\sin(4x-3y)}{\cos(4x-3y)}$$
$$=\boldsymbol{-4\tan(4x-3y)}$$

$$z_y=\frac{1}{\cos(4x-3y)}\cdot\{-\sin(4x-3y)\}\cdot(-3)$$
$$=3\cdot\frac{\sin(4x-3y)}{\cos(4x-3y)}$$
$$=\boldsymbol{3\tan(4x-3y)}$$

（４）$z_x=2\sin(x+y)\cdot\cos(x+y)\cdot 1-2\sin x\cdot\cos x$

$=2\sin(x+y)\cos(x+y)-2\sin x\cos x$

$=\boldsymbol{\sin 2(x+y)-\sin 2x}$

$z_y=2\sin(x+y)\cdot\cos(x+y)\cdot 1+2\sin y\cdot\cos y$

$=2\sin(x+y)\cos(x+y)+2\sin y\cos y$

$=\boldsymbol{\sin 2(x+y)+\sin 2y}$

3.

（１）$z_x=-\dfrac{y}{x^2}-\dfrac{1}{y}=-\left(\dfrac{y}{x^2}+\dfrac{1}{y}\right)$

$z_x=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{y^2}$

よって，$dz=-\boldsymbol{\left(\frac{y}{x^2}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{y^2}\right)dy}$

（２）$z_x=\dfrac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)^2}}\cdot 2x=\dfrac{2x}{\sqrt{1-(x^2+y^2)^2}}$

$z_y=\dfrac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)^2}}\cdot 2y=\dfrac{2y}{\sqrt{1-(x^2+y^2)^2}}$

よって，$dz=\dfrac{2x}{\sqrt{1-(x^2+y^2)^2}}dx+\dfrac{2y}{\sqrt{1-(x^2+y^2)^2}}dy$

$$=\boldsymbol{\frac{2xdx+2ydy}{\sqrt{1-(x^2+y^2)^2}}}$$

4.

（１）$z_x=8x,\ z_y=-2y$

よって，点$(1,\ 2,\ 0)$における接平面の方程式は

$z-0=8\cdot 1\cdot(x-1)+(-2)\cdot 2\cdot(y-2)$

整理して

$z=8x-8-4y+8$

$\boldsymbol{8x+4y-z=0}$

（２）$z_x=\dfrac{1}{3-x^2-y^2}\cdot(-2x)$

$$=-\frac{2x}{3-x^2-y^2}$$

$$z_y = \frac{1}{3-x^2-y^2}\cdot(-2y)$$

$$= -\frac{2y}{3-x^2-y^2}$$

よって，点$(-1,\ 1,\ 0)$における接平面の方程式は

$$z-0 = -\frac{2\cdot(-1)}{3-(-1)^2-1^2}(x+1) - \frac{2\cdot 1}{3-(-1)^2-1^2}(y-1)$$

整理して

$$z = -\frac{-2x-2}{3-1-1} - \frac{2y-2}{3-1-1}$$

$$z = \frac{2x+2}{1} + \frac{-2y+2}{1}$$

$$z = 2x+2-2y+2$$

$$\boldsymbol{2x-2y-z=-4}$$

（3）$z_x = -\sin(2x-y)\cdot 2 = -2\sin(2x-y)$

$z_y = -\sin(2x-y)\cdot(-1) = \sin(2x-y)$

$x = -\frac{\pi}{4}$，$y = 2\pi$のとき

$$z = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - 2\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

また

$$z_x = -2\sin\left(-\frac{\pi}{2} - 2\pi\right)$$

$$= -2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2\left\{-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} = 2$$

$$z_y = \sin\left(-\frac{\pi}{2} - 2\pi\right)$$

$$= \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

であるから，求める接平面の方程式は

$$z-0 = 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - 1(y-2\pi)$$

整理して

$$z = 2x + \frac{\pi}{2} - y + 2\pi$$

$$\boldsymbol{2x-y-z=-\frac{5}{2}\pi}$$

5.

（1）$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$

$$= \frac{1}{y+1}\cdot\frac{1}{t} + \left(-\frac{x}{(y+1)^2}\right)\cdot e^t$$

$$= \frac{1}{(y+1)t} - \frac{xe^t}{(y+1)^2}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{t(e^t+1)} - \frac{e^t\log t}{(e^t+1)^2}}$$

（2）$z = \frac{\log t}{e^t+1}$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\frac{1}{t}(e^t+1) - \log t\cdot e^t}{(e^t+1)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{t}(e^t+1)}{(e^t+1)^2} - \frac{e^t\log t}{(e^t+1)^2}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{t(e^t+1)} - \frac{e^t\log t}{(e^t+1)^2}}$$

6.

$$z_u = z_x x_u + z_y y_u$$
$$= 2xy^2\cdot 3 + 2x^2y\cdot 1$$
$$= 6xy^2 + 2x^2y$$
$$= \boldsymbol{2xy(x+3y)}$$

$$z_v = z_x x_v + z_y y_v$$
$$= 2xy^2\cdot(-1) + 2x^2y\cdot 2$$
$$= -2xy^2 + 4x^2y$$
$$= \boldsymbol{2xy(2x-y)}$$

練習問題 1-B

1.

$f(0,\ 0)$が点$(0,\ 0)$で連続であるための条件は，

$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} f(x,\ y)$が存在し，$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} f(x,\ y) = 0$

となることである．

ここで，

$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} f(x,\ y) = \lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \cos^{-1}\left(\frac{x^3+y^3}{2x^2+2y^2}\right)$を

調べるために，まず$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{x^3+y^3}{2x^2+2y^2}$を考える．

$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$とおくと，

$(x,\ y)\to(0,\ 0)$のとき，$r\to 0$であるから

$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{x^3+y^3}{2x^2+2y^2} = \lim_{r\to 0}\frac{(r\cos\theta)^3 + (r\sin\theta)^3}{2(r\cos\theta)^2 + 2(r\sin\theta)^2}$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{r^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta)}{2r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}$$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{r^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta)}{2r^2}$$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{r(\cos^3\theta + \sin^3\theta)}{2}$$

$0 \leqq |\cos^3\theta + \sin^3\theta| \leqq 1$より

$$0 \leqq \left|\frac{r(\cos^3\theta + \sin^3\theta)}{2}\right| \leqq \left|\frac{r}{2}\right| = \frac{r}{2}$$

ここで，$\lim_{r \to 0} \frac{r}{2} = 0$ であるから，

$$\lim_{r \to 0} \frac{r(\cos^3\theta + \sin^3\theta)}{2} = 0$$

以上より

$$\lim_{(x,\ y) \to (0,\ 0)} \cos^{-1}\left(\frac{x^3 + y^3}{2x^2 + 2y^2}\right) = \cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$$

したがって，$f(0,\ 0) = \frac{\pi}{2}$であれば，$f(x,\ y)$は，

点$(0,\ 0)$で連続となる．よって，$\boldsymbol{k = \frac{\pi}{2}}$

2.

（１）$z_x = 2ax + by$，$z_y = bx + 2cy$

よって

左辺 $= x(2ax + by) + y(bx + 2cy)$

$= 2ax^2 + bxy + bxy + 2cy^2$

$= 2(ax^2 + bxy + cy^2)$

$= 2z =$ 右辺

（２）与えられた等式の両辺をtで偏微分すると

$$f_x(tx,\ ty)\frac{\partial}{\partial t}(tx) + f_y(tx,\ ty)\frac{\partial}{\partial t}(ty) = nt^{n-1}f(x,\ y)$$

$$xf_x(tx,\ ty) + yf_y(tx,\ ty) = nt^{n-1}f(x,\ y)$$

であるから，ここで，$t = 1$とおけば

$$xf_x(x,\ y) + yf_y(x,\ y) = nt^{n-1}f(x,\ y)$$

すなわち，$xz_x + yz_y = nz$

3.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}f(u) + \frac{1}{x}\frac{d}{du}f(u) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2}f(u) - \frac{y}{x^3}\frac{d}{du}f(u)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}\frac{d}{du}f(u) \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x^2}\frac{d}{du}f(u)$$

よって

$$\text{左辺} = x\left(-\frac{1}{x^2}f(u) - \frac{y}{x^3}\frac{d}{du}f(u)\right) + y \cdot \frac{1}{x^2}\frac{d}{du}f(u) + z$$

$$= -\frac{1}{x}f(u) - \frac{y}{x^2}\frac{d}{du}f(u) + \frac{y}{x^2}\frac{d}{du}f(u) + \frac{1}{x}f(u)$$

$= 0 =$ 右辺

4.

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ より

$$\frac{\partial T}{\partial l} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{l}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{gl}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial g} = 2\pi\sqrt{l} \cdot \left(-\frac{1}{2g\sqrt{g}}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{g}\sqrt{\frac{l}{g}}$$

よって，$\Delta T \fallingdotseq \frac{\partial T}{\partial t}\Delta l + \frac{\partial T}{\partial y}\Delta g$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{gl}}\Delta l - \frac{\pi}{g}\sqrt{\frac{l}{g}}\Delta g$$

したがって

$$\frac{\Delta T}{T} \fallingdotseq \left(\frac{\pi}{\sqrt{gl}}\Delta l - \frac{\pi}{g}\sqrt{\frac{l}{g}}\Delta g\right) \times \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{gl}}\Delta l - \frac{1}{g}\sqrt{\frac{l}{g}}\Delta g\right) \times \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta g}{g}\right)$$

すなわち，$\frac{\Delta T}{T} \fallingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta g}{g}\right)$

【別解】

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$の両辺の対数をとると

$$\log T = \log\left(2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\right)$$

$$= \log 2\pi + \log\sqrt{l} - \log\sqrt{g}$$

$$= \log 2\pi + \frac{1}{2}\log l - \frac{1}{2}\log g$$

両辺の全微分をとると

$$\frac{dT}{T}=\frac{1}{2}\frac{dt}{l}-\frac{1}{2}\frac{dt}{g}$$

Δl，Δgは微小であるから

$$\frac{\Delta T}{T}\fallingdotseq\frac{1}{2}\frac{\Delta l}{l}-\frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g}=\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta l}{l}-\frac{\Delta g}{g}\right)$$

5.

（１）$f_x(0,\ y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,\ y)-f(0,\ y)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|xy|-|0\cdot y|}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|hy|}{h}$$

$xy\neq 0$より，$hy\neq 0$であるから，この極限値は存在しない．

$$f_y(x,\ 0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,\ 0+y)-f(x,\ 0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|xh|-|x\cdot 0|}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|xh|}{h}$$

$xy\neq 0$より，$xh\neq 0$であるから，この極限値は存在しない．

（２）$f_x(0,\ 0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,\ 0)-f(0,\ 0)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|h\cdot 0|-|0\cdot 0|}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

$$f_y(0,\ 0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,\ 0+h)-f(0,\ 0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|0\cdot h|-|0\cdot 0|}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

よって，点$(0,\ 0)$における偏微分係数はいずれも存在し，その値は 0 である．

$\Delta z=f(0+\Delta x,\ 0+\Delta y)-f(0,\ 0)$

$=f_x(0,\ 0)\Delta x+f_y(0,\ 0)\Delta y+\varepsilon$とすると

$|\Delta x\Delta y|-0=0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y+\varepsilon$より，$\varepsilon=|\Delta x\Delta y|$

ここで，$\lim_{(\Delta x,\ \Delta y)\to(0,\ 0)}\frac{\varepsilon}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$について調べる．

$\Delta x=r\cos\theta$，$\Delta y=r\sin\theta$とおくと，

$(\Delta x,\ \Delta y)\to(0,\ 0)$のとき，$r\to 0$であるから

$$\lim_{(\Delta x,\ \Delta y)\to(0,\ 0)}\frac{\varepsilon}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\lim_{(\Delta x,\ \Delta y)\to(0,\ 0)}\frac{|\Delta x\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{|r\cos\theta\cdot r\sin\theta|}{\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}}$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{r^2|\cos\theta\sin\theta|}{r\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}$$

$$=\lim_{r\to 0}r|\cos\theta\sin\theta|$$

$0\leqq|\cos\theta\sin\theta|=\left|\frac{\sin 2\theta}{2}\right|\leqq\frac{1}{2}$より

$$0\leqq r|\cos\theta\sin\theta|\leqq\frac{r}{2}$$

ここで，$\lim_{r\to 0}\frac{r}{2}=0$ であるから，$\lim_{r\to 0}r|\cos\theta\sin\theta|=0$

すなわち，$\lim_{(\Delta x,\ \Delta y)\to(0,\ 0)}\frac{\varepsilon}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$ となるので，

$f(x,\ y)$は，$(0,\ 0)$で全微分可能である．