練習問題 1-A

1.

（１）$f(x)=\log x$とおく．

$$f'(x)=\frac{1}{x}$$

これより，$x=1$における１次近似式は

$$f(1)+f'(1)(x-1)=\log 1+\frac{1}{1}(x-1)$$
$$=0+(x-1)$$
$$=x-1$$

よって，$\boldsymbol{x-1}$

（２）$f(x)=\sin 2x$とおく．

$$f'(x)=2\cos 2x$$

これより，$x=\frac{\pi}{2}$における１次近似式は

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\pi+2\cos\pi\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=0+2\cdot(-1)\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=-2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

よって，$\boldsymbol{-2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$

（３）$f(x)=\tan x$とおく．

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$$

これより，$x=0$における１次近似式は

$$f(0)+f'(0)(x-0)=\tan 0+\frac{1}{\cos^2 0}\cdot x$$
$$=0+\frac{1}{1}\cdot x=x$$

よって，$\boldsymbol{x}$

（４）$f(x)=\sqrt{e^x}=e^{\frac{\pi}{2}}$とおく．

$$f'(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{e^x}$$

これより，$x=0$における１次近似式は

$$f(0)+f'(0)(x-0)=\sqrt{e^0}+\frac{1}{2}\sqrt{e^0}(x-0)$$
$$=1+\frac{1}{2}x$$

よって，$\boldsymbol{1+\frac{1}{2}x}$

2.

（１）$f(x)=(1-x)^{\frac{1}{2}}$であるから

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1)$$
$$=-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$$
$$f''(x)=-\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}\right\}\cdot(-1)$$
$$=-\frac{1}{4}(1-x)^{-\frac{3}{2}}$$

これより，$x=0$における２次近似式は

$$f(0)+f'(0)(x-0)+\frac{f''(0)}{2}(x-0)^2$$
$$=\sqrt{1-0}-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}(x-0)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(1-0)^{-\frac{3}{2}}(x-0)^2$$
$$=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$$

よって，$\boldsymbol{1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2}$

（２）$\sqrt{0.8}=\sqrt{1-0.2}$と考えると

$$\sqrt{0.8}=\sqrt{1-0.2}\fallingdotseq 1-\frac{1}{2}\cdot 0.2-\frac{1}{8}(0.2)^2$$
$$=1-0.1-\frac{1}{8}\cdot 0.04$$
$$=1-0.1-0.005=\mathbf{0.895}$$

3.

（１）$f'(x)=1\cdot\log x+(x+1)\cdot\frac{1}{x}-2x$

$$=\log x+1+\frac{1}{x}-2x$$

よって

$$f'(1)=\log 1+1+\frac{1}{1}-2\cdot 1$$

$$=0+1+1-2=0$$

（２）$f''(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}-2$

これより

$$f''(1)=\frac{1}{1}-\frac{1}{1^2}-2$$

$$=1-1-2=-2<0$$

よって，$f(x)$は$\boldsymbol{x=1}$**で極大値をとる．**

4.

（１）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+3}{n+2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n}+2}$

$$=\frac{1+0+0}{0+2}=\frac{1}{2}$$

よって，数列は**収束し**，**極限値は**$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

（２）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}\right)\sqrt{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}\right)\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}\right)\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1-2n)\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2+0}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

よって，数列は**収束し**，**極限値は**$\boldsymbol{\dfrac{1}{2\sqrt{2}}}$

（３）$\dfrac{3^n}{\sqrt{5^n}}=\left(\dfrac{3}{\sqrt{5}}\right)^n$ より，この数列は等比数列であり，

公比は，$\dfrac{3}{\sqrt{5}}>1$ であるから，

この数列は**∞に発散する．**

（４）この数列は等比数列であり，

公比は，$-1<\dfrac{2}{1+\sqrt{2}}<1$ であるから，

この数列は**収束し，極限値は 0**

5.

与えられた等比級数の公比は，$-\dfrac{2}{3}$であり，

$-1<-\dfrac{2}{3}<1$ より，この級数は**収束し**，その和は

$$\frac{\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}}=\boldsymbol{\frac{1}{5}}$$

6.

（１）$f(x)=\sin\dfrac{x}{2}$とすると，$f(0)=0$

$f'(x)=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}$ より，$f'(0)=\dfrac{1}{2}$

$f''(x)=-\dfrac{1}{2^2}\sin\dfrac{x}{2}$ より，$f''(0)=0$

$f'''(x)=-\dfrac{1}{2^3}\cos\dfrac{x}{2}$ より，$f'''(0)=-\dfrac{1}{2^3}$

$f^{(4)}(x)=\dfrac{1}{2^4}\sin\dfrac{x}{2}$ より，$f^{(4)}(0)=0$

よって

$f^{(2n)}(0)=0$

$f^{(2n+1)}(0)=\dfrac{(-1)^n}{2^{2n+1}}$

したがって

$$\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{2^5}\cdot\frac{1}{5!}x^5-\cdots$$

$$\cdots+\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}\cdot\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}x-\frac{1}{3!\,2^3}x^3+\frac{1}{5!\,2^5}x^5-\cdots}$$

$$\boldsymbol{\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,2^{2n+1}}x^{2n+1}+\cdots}$$

【別解】

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots$$

であるから

$$\sin\frac{x}{2}=\frac{x}{2}-\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{x}{2}\right)^5-\cdots$$

$$\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}+\cdots$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}x-\frac{1}{3!\,2^3}x^3+\frac{1}{5!\,2^5}x^5-\cdots}$$

$$\cdots + \boldsymbol{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,2^{2n+1}} x^{2n+1}} + \cdots$$

（２）$f(x) = \cos 2x$とすると，$f(0) = 1$

$f'(x) = -2\sin 2x$より，$f'(0) = 0$

$f''(x) = -2^2 \cos 2x$より，$f''(0) = -2^2$

$f'''(0) = 2^3 \sin 2x$より，$f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = 2^4 \cos 2x$より，$f^{(4)}(0) = 2^4$

よって

$f^{(2n)}(0) = (-1)^n 2^2$

$f^{(2n+1)}(0) = 0$

したがって

$$\cos 2x = 1 - 2^2 \cdot \frac{1}{2!}x^2 + 2^4 \cdot \frac{1}{4!}x^4 - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^n 2^{2n} \cdot \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

$$= \boldsymbol{1 - \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^4}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}} + \cdots$$

【別解】

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

であるから

$$\cos 2x = 1 - \frac{1}{2!}(2x)^2 + \frac{1}{4!}(2x)^4 - \cdots$$

$$\cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n} + \cdots$$

$$= \boldsymbol{1 - \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^4}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}} + \cdots$$

（３）$f(x) = e^{2x}$とすると，$f(0) = 1$

$f'(x) = 2e^{2x}$より，　$f'(0) = 2$

$f''(x) = 2^2 e^{2x}$より，　$f''(0) = 2^2$

$f'''(x) = 2^3 e^{2x}$より，　$f'''(0) = 2^3$

よって

$f^{(n)}(0) = 2^2$

したがって

$$e^{2x} = 1 + 2x + 2^2 \cdot \frac{1}{2!}x^2 + 2^3 \cdot \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

$$\cdots + 2^n \cdot \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

$$= \boldsymbol{1 + 2x + \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{3!}x^3 + \cdots + \frac{2^n}{n!}x^n} + \cdots$$

【別解】

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

であるから

$$e^{2x} = 1 + (2x) + \frac{1}{2!}(2x)^2 + \frac{1}{3!}(2x)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(2x)^n + \cdots$$

$$= \boldsymbol{1 + 2x + \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{3!}x^3 + \cdots + \frac{2^n}{n!}x^n} + \cdots$$

7.

$y' = \lambda e^{\lambda x}$

$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

これらを，与えられた等式に代入すると

$\lambda^2 e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} + e^{\lambda x} = 0$

$e^{\lambda x}(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$

$e^{\lambda x} \neq 0$であるから，$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$

これを解くと

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \boldsymbol{\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}}$$

練習問題 1-B

1.

（１）$f'(x) = 1 - \{e^x \cos x + e^x \cdot (-\sin x)\}$

$= 1 - e^x(\cos x - \sin x)$

これより，$f'(0) = 1 - e^0(\cos 0 - \sin 0)$

$= 1 - 1(1 - 0) = \mathbf{0}$

$f''(x) = -e^x(\cos x - \sin x) - e^x(-\sin x - \cos x)$

$= 2e^x \sin x$

これより，$f''(0) = 2e^0 \sin 0 = \mathbf{0}$

$f'''(x) = 2(e^x \sin x + e^x \cos x)$

$= 2e^x(\sin x + \cos x)$

これより，$f'''(0) = 2e^0(\sin 0 + \cos 0) = \mathbf{2}$

（２）$f(0) = 0 - e^0 \cos 0 = -1$であるから，

$f(x)$の$x = 0$における３次近似式は

$$f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{f''(0)}{2!}(x - 0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x - 0)^3$$

$$= -1 + 0 \cdot x + \frac{0}{2!} \cdot x^2 + \frac{2}{3!}x^3$$

$$= -1 + \frac{1}{3}x^3$$

よって，$\boldsymbol{f(x) = -1 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}$

（３）（２）より，$f(x) - f(0) = x^3\left(\frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}\right)$

$\lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3} = 0$ であるから，xが 0 に十分近いとき，

$f(x) - f(0)$の符号はx^3によって決まる．

$x < 0$のとき，$x^3 < 0$であるから，$f(x) - f(0) < 0$

$x > 0$のとき，$x^3 > 0$であるから，$f(x) - f(0) > 0$

よって，$f(x)$は，**$x = 0$で極値をとらない．**

2.

xがaに十分近いとき

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o(x^n)$$

が成り立つ．

ここで，$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$

であるから

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o(x^n)$$

$$= (x-a)^n\left\{\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{o(x^n)}{(x-a)^n}\right\}$$

$\lim_{x\to a}\frac{o(x^n)}{(x-a)^n} = 0$であるから，$x$が$a$に十分近ければ，

$\left\{\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{o(x^n)}{(x-a)^n}\right\}$の符号は，$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$の符号で

決まると考えてよい．

（１）nが奇数のとき

i）$f^{(n)}(a) > 0$のとき

$x < a$すなわち，$x - a < 0$であれば，$(x-a)^n < 0$

であるから

$$(x-a)^n\left\{\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{o(x^n)}{(x-a)^n}\right\} < 0$$

すなわち，$f(x) - f(a) < 0$

$x > a$すなわち，$x - a > 0$であれば，$(x-a)^n > 0$

であるから

$$(x-a)^n\left\{\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{o(x^n)}{(x-a)^n}\right\} > 0$$

すなわち，$f(x) - f(a) > 0$

したがって，$f(x)$は$x = a$で極値をとらない．

ii）$f^{(n)}(a) < 0$のとき

$x < a$すなわち，$x - a < 0$であれば，$(x-a)^n < 0$

であるから

$$(x-a)^n\left\{\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{o(x^n)}{(x-a)^n}\right\} > 0$$

すなわち，$f(x) - f(a) > 0$

$x > a$すなわち，$x - a > 0$であれば，$(x-a)^n > 0$

であるから

$$(x-a)^n\left\{\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{o(x^n)}{(x-a)^n}\right\} < 0$$

すなわち，$f(x) - f(a) < 0$

したがって，$f(x)$は$x = a$で極値をとらない．

以上より，nが奇数のときは，

$f(x)$は$x = a$で極値をとらない．

（２）nが偶数のとき，$x = a$の前後で常に$(x-a)^n > 0$

i）$f^{(n)}(a) > 0$のとき

$$(x-a)^n\left\{\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{o(x^n)}{(x-a)^n}\right\} > 0$$

すなわち，$f(x) - f(a) > 0$であるから，

$f(x)$は$x = a$で極小値をとる．

ii）$f^{(n)}(a) < 0$のとき

$$x(x-a)^n\left\{\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{o(x^n)}{(x-a)^n}\right\} < 0$$

すなわち，$f(x) - f(a) < 0$であるから，

$f(x)$は$x = a$で極大値をとる．

3.

（１）$r > 1$ のとき，$0 < \frac{1}{r} < 1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2r^n}{r^n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2r^n\cdot\frac{1}{r^n}}{(r^n+1)\cdot\frac{1}{r^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\left(\frac{1}{r}\right)^n}$$

$$= \frac{2}{1+0} = \mathbf{2}$$

（2） $\lim_{n\to\infty} \frac{2r^n}{r^n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 1^n}{1^n+1}$

$$= \frac{2}{1+1} = \mathbf{1}$$

（3） $\lim_{n\to\infty} \frac{2r^n}{r^n+1} = \frac{2\cdot 0}{0+1} = \mathbf{0}$

（4） $r < -1$ のとき，$-1 < \frac{1}{r} < 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2r^n}{r^n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2r^n \cdot \frac{1}{r^n}}{(r^n+1)\cdot \frac{1}{r^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+\left(\frac{1}{r}\right)^n}$$

$$= \frac{2}{1+0} = \mathbf{2}$$

4.

$$\mathrm{A_1B_1} = a \times \sin 30^\circ = a \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}a$$

$$\mathrm{B_1A_2} = \mathrm{A_1B_1} \times \cos 30^\circ = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathrm{A_2B_2} = \mathrm{B_1A_2} \times \cos 30^\circ = \frac{1}{2}a \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\mathrm{B_2A_3} = \mathrm{A_2B_2} \times \cos 30^\circ = \frac{1}{2}a \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

したがって

与式 $= \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}a \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}a \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + \cdots$

これは，初項 $\frac{1}{2}a$，公比 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ の無限等比級数であり，

$\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right| < 1$ であるから収束し，その和は

$$\frac{\frac{1}{2}a}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{2-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{a(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{(2+\sqrt{3})a}{4-3} = \boldsymbol{(2+\sqrt{3})a}$$

5.

$$\alpha = -1 + i = \cos\frac{3}{4}\pi \cdot \sqrt{2} + i\sin\frac{3}{4}\pi \cdot \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

よって

$$\alpha^{10} = \left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)\right\}^{10}$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)^{10}$$

$$= 32\left\{\cos\left(\frac{3}{4}\pi\cdot 10\right) + i\sin\left(\frac{3}{4}\pi\cdot 10\right)\right\}$$

$$= 32\left(\cos\frac{15}{2}\pi + i\sin\frac{15}{2}\pi\right)$$

$$= 32\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$$

$$= 32\{0 + i\cdot(-1)\}$$

$$= 0 - 32i$$

よって，α^{10}の**実部は0，虚部は−32**