１章　関数の展開

問１

（１）$f'(x)=\cos x$

これより，$x=0$における１次近似式は

$$f(0)+f'(0)(x-0)=\sin 0+\cos 0\cdot x$$
$$=0+1\cdot x=x$$

よって，$\sin x \fallingdotseq \boldsymbol{x}$

（２）$g(x)=x^{\frac{3}{2}}$

$$g'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$$

これより，$x=1$における１次近似式は

$$g(1)+g'(x)(x-1)=1\sqrt{1}+\frac{3}{2}\sqrt{1}\cdot(x-1)$$
$$=1+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}x$$

よって，$x\sqrt{x} \fallingdotseq \boldsymbol{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}x}$

問２　与えられた関数を$f(x)$とおく．

（１）$f'(x)=e^x$

$f''(x)=e^x$

よって，$x=0$における２次近似式は

$$f(0)+f'(0)(x-0)+\frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2$$
$$=e^0+e^0\cdot x+\frac{1}{2}e^0\cdot x^2$$
$$=1+x+\frac{x^2}{2}$$

したがって

$$\boldsymbol{e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\varepsilon_2}\quad \text{ただし，}\ \boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon_2}{x^2}=0}$$

（２）$f'(x)=-\sin x$

$f''(x)=-\cos x$

よって，$x=0$における２次近似式は

$$f(0)+f'(0)(x-0)+\frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2$$
$$=\cos 0+(-\sin 0)\cdot x+\frac{1}{2}(-\cos 0)\cdot x^2$$
$$=1-\frac{1}{2}x^2$$

したがって

$$\boldsymbol{\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\varepsilon_2}\quad \text{ただし，}\ \boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon_2}{x^2}=0}$$

（３）$f'(x)=(1-x)^{-2}=\dfrac{1}{(1-x)^2}$

$$f''(x)=2(1-x)^{-3}=\frac{1}{(1-x)^3}$$

よって，$x=0$における２次近似式は

$$f(0)+f'(0)(x-0)+\frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2$$
$$=\frac{1}{1-0}+\frac{1}{(1-0)^2}\cdot x+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(1-0)^3}\cdot x^2$$
$$=1+x+x^2$$

したがって

$$\boldsymbol{\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\varepsilon_2}\quad \text{ただし，}\ \boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon_2}{x^2}=0}$$

問３

$f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$とおく．

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f''(x)=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{5}{3}}=-\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$$

よって，$x=1$における２次近似式は

$$f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2$$
$$=\sqrt[3]{1}+\frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}(x-1)+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{9\cdot 1\sqrt[3]{1^2}}\right)\cdot(x-1)^2$$
$$=1+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{1}{9}(x-1)^2$$

これを利用して

$$\sqrt[3]{1.1}\fallingdotseq 1+\frac{1}{3}(1.1-1)-\frac{1}{9}(1.1-1)^2$$

$$= 1 + \frac{1}{3} \cdot 0.1 - \frac{1}{9} \cdot 0.01$$

$$= \frac{9 + 0.3 - 0.01}{9}$$

$$= \frac{9.29}{9}$$

$$= 1.0322 \ldots$$

よって，$\mathbf{1.032}$

$\boxed{問4}$

例題 1 より，e^xの 4 次近似式は

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$$

これを利用して

$$e^{0.2} \fallingdotseq 1 + 0.2 + \frac{1}{2!}(0.2)^2 + \frac{1}{3!}(0.2)^3 + \frac{1}{4!}(0.2)^4$$

$$= 1.2 + \frac{0.04}{2} + \frac{0.008}{6} + \frac{0.0016}{24}$$

$$= \frac{1.2 \cdot 24 + 0.04 \cdot 12 + 0.008 \cdot 4 + 0.0016}{24}$$

$$= \frac{28.8 + 0.48 + 0.032 + 0.0016}{24}$$

$$= \frac{29.3136}{24}$$

$$= 1.2214$$

よって，$e^{0.2} \fallingdotseq 1.2214$

$e = (e^{0.2})^5$

$\fallingdotseq 1.2214^5 = 2.71825 \ldots$

よって，$\mathbf{2.718}$

$\boxed{問5}$

（1）$f(x) = \sin x$とおく．

$f'(x) = \cos x$，$f''(x) = -\sin x$，$f'''(x) = -\cos x$，

$f^{(4)}(x) = \sin x$，$f^{(5)}(x) = \cos x$，$f^{(6)}(x) = -\sin x$，

$f^{(7)}(x) = -\cos x$

ここで，$f(0) = f''(0) = f^{(4)}(0) = f^{(6)}(0) = 0$

$f'(0) = f^{(5)}(0) = 1$

$f'''(0) = f^{(7)}(x) = -1$

したがって，$f(x)$の$x = 0$における 7 次近似式は

$$f'(0)x + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{f^{(7)}(x)}{7!}x^7$$

$$= 1 \cdot x + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{-1}{7!}x^7$$

$$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7$$

よって，$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + o(x^7)$

（2）$f(x) = \cos x$とおく．

$f'(x) = -\sin x$，$f''(x) = -\cos x$，$f'''(x) = \sin x$，

$f^{(4)}(x) = \cos x$，$f^{(5)}(x) = -\sin x$，$f^{(6)}(x) = -\cos x$

ここで，$f'(0) = f'''(0) = f^{(5)}(0) = 0$

$f(0) = f^{(4)}(0) = 1$

$f'''(0) = f^{(6)}(x) = -1$

したがって，$f(x)$の$x = 0$における 6 次近似式は

$$f(0) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(6)}(x)}{6!}x^6$$

$$= 1 + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{-1}{6!}x^6$$

$$= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6$$

よって，$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6)$

$\boxed{問6}$

$f(x) = \log(1 + x)$とおく．

$f(0) = \log 1 = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1 + x}$より，$f'(0) = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{(1 + x)^2}$より，$f'(0) = -1$

$f'''(x) = \frac{2}{(1 + x)^3}$より，$f'''(0) = 2!$

$f^{(4)}(x) = -\frac{3 \cdot 2}{(1 + x)^4}$より，$f^{(4)}(0) = -3!$

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n - 1)!}{(1 + x)^n}$より，※証明略

$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n - 1)!$

したがって，$f(x)$の$x = 0$におけるn次近似式は

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$= 0 + 1 \cdot x + (-1) \cdot \frac{1}{2!}x^2 + 2! \cdot \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n-1}(n - 1)! \cdot \frac{1}{n!}x^n$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$$

よって

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + o(x^n)$$

問7

（１）$f'(x) = e^x - \cos x$

これより

$$f'(0) = e^0 - \cos 0$$
$$= 1 - 1 = 0$$

（２）$f''(x) = e^x + \sin x$

これより

$$f''(0) = e^0 + \sin 0$$
$$= 1 + 0 = 1 > 0$$

よって，$f(x)$は，**$x = 0$で極小値をとる．**

問8

（１）$f'(x) = 1 - 2\sin x$

これより

$$1 - 2\sin x = 0$$

これを解いて

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$0 \leqq x \leqq \pi$より，$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi}$

（２）$f''(x) = -2\cos x$であるから

$x = \frac{\pi}{6}$のとき

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\cos\frac{\pi}{6}$$

$$= -2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} < 0$$

このとき

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} + 2\cos\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\pi}{6} + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$$

よって，$f(x)$は，**$x = \frac{\pi}{6}$のとき，極大値$\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$をとる．**

$x = \frac{5}{6}\pi$のとき

$$f''\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -2\cos\frac{5}{6}\pi$$

$$= -2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} > 0$$

このとき

$$f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{5}{6}\pi + 2\cos\frac{5}{6}\pi$$

$$= \frac{5}{6}\pi + 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}$$

よって，$f(x)$は，**$x = \frac{5}{6}\pi$のとき，極小値$\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}$をとる．**

問9

（１）与式 $= \lim_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)\cdot\frac{1}{n}}{(3n+2)\cdot\frac{1}{n}}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}}$$

$$= \frac{2-0}{3+0} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

（２）与式 $= \lim_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)\cdot\frac{1}{n^2}}{(n^2+n+1)\cdot\frac{1}{n^2}}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{0-0}{1+0+0} = \boldsymbol{0}$$

（３）与式 $= \lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \boldsymbol{0}$$

（分母→∞，分子→2）

または

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = \boldsymbol{0}$$

（4）与式 $= \lim_{n\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{n^2+4n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+4n}+n\right)}{\sqrt{n^2+4n}+n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+4n)-n^2}{\sqrt{n^2+4n}+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n\cdot\frac{1}{n}}{\left(\sqrt{n^2+4n}+n\right)\cdot\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt{(n^2+4n)\cdot\frac{1}{n^2}}+n\cdot\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{1+0}+1} = \mathbf{2}$$

問 10　それぞれの等比数列の公比をrとする．

（1）$r = \tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 0.577\ldots$

$-1 < r < 1$より，この等比数列は，**0 に収束する．**

（2）$\left\{\dfrac{3^n}{2^n}\right\} = \left\{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\right\}$であるから，$r = \dfrac{3}{2} > 1$

よって，この等比数列は，**∞に発散する．**

（3）$r = \dfrac{1}{1-\sqrt{3}}$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{1-3}$$

$$= -\frac{1+\sqrt{3}}{2} < -1$$

よって，この等比数列は，**発散する．（振動する）**

問 11

第n部分和をS_nとすると

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \cdots$$

$$\cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

よって，$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1$

したがって，**この級数は収束し，その和は1**

問 12

与えられた級数において，$a_n = \dfrac{n}{2n-1}$であるから

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2-\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2} \neq 0$$

よって，この級数は**発散する．**

問 13　それぞれの等比級数の公比をrとする．

（1）$r = \dfrac{1}{4}$より，$|r| < 1$であるから，この等比級数は

収束し，その和は

$$\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \mathbf{\frac{4}{3}}$$

（2）$r = -\dfrac{1}{4}$より，$|r| < 1$であるから，この等比級数は

収束し，その和は

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \mathbf{\frac{4}{5}}$$

（3）$r = \tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3} > 1$であるから，この等比級数は

発散する．

（4）$r = 0.1$より，$|r| < 1$であるから，この等比級数は

収束し，その和は

$$\frac{3}{1-0.1} = \frac{3}{0.9} = \frac{30}{9} = \mathbf{\frac{10}{3}}$$

問 14

点 P の座標は

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \cdots$$

より，初項 1，公比$-\dfrac{1}{3}$の等比級数になるから

点 P が近づく点は

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\cdots=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

問 15

与えられたべき級数は，公比$\frac{1}{3}x$の等比級数だから，

$\left|\frac{1}{3}x\right|<1$ のとき，すなわち，$\boldsymbol{|x|<3}$**のときに限り収束し**，その和は

$$1+\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{27}x^3+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{3}x}$$

$$=\boldsymbol{\frac{3}{3-x}}$$

問 16

$$f(0)=\frac{1}{2}$$

$f'(x)=(2-x)^{-2}$より，$f'(0)=2^{-2}=\frac{1}{2^2}$

$f''(x)=2!\,(2-x)^{-3}$より，$f''(0)=2!\cdot 2^{-3}=\frac{2!}{2^3}$

$f'''(x)=3!\,(2-x)^{-4}$より，$f'''(0)=3!\cdot 2^{-4}=\frac{3!}{2^4}$

$f^{(4)}(x)=4!\,(2-x)^{-5}$より，$f^{(4)}(0)=4!\cdot 2^{-5}=\frac{4!}{2^5}$

$\vdots$

$$f^{(n)}(x)=n!\cdot 2^{-(n+1)}=\frac{n!}{2^{n+1}}$$

$f(x)$のn次近似式を$P_n(x)$とおくと

$$P_n(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}x+\frac{2!}{2^3}\cdot\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{n!}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{n!}x^n$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}x+\frac{1}{2^3}x^2+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}x^n$$

これは，初項$\frac{1}{2}$，公比$\frac{1}{2}x$，項数$n+1$ の等比級数であるから

$$P_n(x)=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+1}\right\}}{1-\frac{1}{2}x}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+1}}{2-x}$$

これから

$$f(x)-P_n(x)=\frac{1}{2-x}-\frac{1-\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+1}}{2-x}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+1}}{2-x}$$

$\left|\frac{1}{2}x\right|<1$ すなわち，$|x|<2$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\{f(x)-P_n(x)\}=0$$

が成り立つ．よって，$f(x)$のマクローリン展開は

$$\boldsymbol{\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}x^n+\cdots}$$

$$\boldsymbol{(|x|<2)}$$

問 17

（１）$\sin 2x=2x-\frac{1}{3!}(2x)^3+\frac{1}{5!}(2x)^5-\cdots$

$$\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2x)^{2n+1}+\cdots$$

$$\boldsymbol{=2x-\frac{2^3}{3!}x^3+\frac{2^5}{5!}x^5+\cdots+\frac{(-1)^n2^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots}$$

（２）$\log(1-x)=\log\bigl(1+(-x)\bigr)$より

$$\log(1-x)=-x-\frac{1}{2}(-x)^2+\frac{1}{3}(-x)^3-\cdots$$

$$\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)^n+\cdots$$

$$=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(-1)^n}{n}x^n+\cdots$$

$$=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\cdots+\frac{(-1)^{2n-1}}{n}x^n+\cdots$$

$$\boldsymbol{=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\cdots-\frac{1}{n}x^n-\cdots}$$

$$\boldsymbol{(|x|<1)}$$

問 18

$$\sin x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{=1-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4-\cdots}$$

$$\boldsymbol{\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n}+\cdots}$$

問 19

（１）左辺$=e^{i(-x)}$

$$=\cos(-x)+i\sin(-x)$$

$= \cos x + i(-\sin x)$

$= \cos x - i\sin x =$ 右辺

（２）第１式について

$$左辺 = \frac{1}{2}\{(\cos x + i\sin x) + (\cos x - i\sin x)\}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\cos x$$

$$= \cos x = 右辺$$

第２式について

$$左辺 = \frac{1}{2i}\{(\cos x + i\sin x) - (\cos x - i\sin x)\}$$

$$= \frac{1}{2i}\cdot 2i\sin x$$

$$= \sin x = 右辺$$

$\boxed{問 20}$

$n = 3$として，ド・モアブルの公式を用いると，

例題９より

$\cos 3x + i\sin 3x = (\cos 3x + i\sin 3x)^3$

$= \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x + i(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x)$

両辺の実部を比較すると

$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x$

$= \cos^3 x - 3\cos x\,(1 - \cos^2 x)$

$= \cos^3 x - 3\cos x + 3\cos^3 x$

$= 4\cos^3 x - 3\cos x$

$\boxed{問 21}$

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$= \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\alpha^{10} = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{10}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 10\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 10\right)$$

$$= \cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi$$

$$= \cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi$$

$$= \frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

よって，**実部は $\mathbf{\frac{1}{2}}$，虚部は $\mathbf{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$** である．

$\boxed{問 22}$

（１）$\left(e^{(2+i)x}\right)' = \boldsymbol{(2+i)e^{(2+i)x}}$

（２）$\left(\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)' = \dfrac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})'$

$$= \frac{1}{2i}\{ie^{ix} - (-i)e^{-ix}\}$$

$$= \frac{1}{2i}(ie^{ix} + ie^{-ix})$$

$$= \boldsymbol{\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}}$$

（３）$\left(\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)' = \dfrac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})'$

$$= \frac{1}{2}\{ie^{ix} + (-i)e^{-ix}\}$$

$$= \frac{1}{2}(ie^{ix} - ie^{-ix})$$

$$= \boldsymbol{\frac{i(e^{ix} - e^{-ix})}{2}}$$