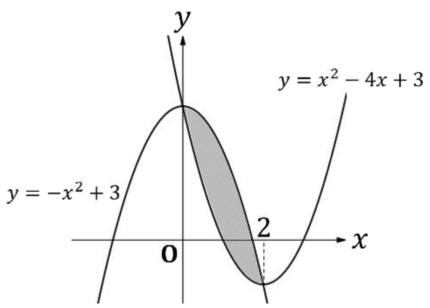
練習問題 1-A

1.

（１）２つの放物線の交点のx座標を求めると

$$x^2-4x+3=-x^2+3$$
$$2x^2-4x=0$$
$$x(x-2)=0$$
$$x=0,\ 2$$

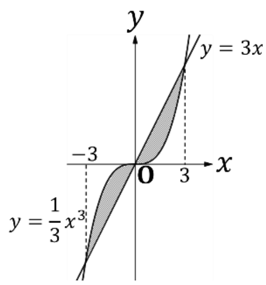


$0\leqq x\leqq 2$において，$-x^2+3\geqq x^2-4x+3$であるから，求める面積をSとすると

$$S=\int_0^2\{(-x^2+3)-(x^2-4x+3)\}dx$$
$$=\int_0^2(-2x^2+4x)dx$$
$$=-2\int_0^2(x^2-2x)dx$$
$$=-2\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_0^2$$
$$=-2\left(\frac{1}{3}\cdot 2^3-2^2\right)$$
$$=-\frac{16}{3}+8=\boldsymbol{\frac{8}{3}}$$

（２）曲線と直線の交点のx座標を求めると

$$\frac{1}{3}x^3=3x$$
$$x^3=9x$$
$$x^3-9x=0$$
$$x(x^2-9)=0$$
$$x(x-3)(x+3)=0$$
$$x=0,\ \pm 3$$



２つの関数は奇関数であり，いずれのグラフも原点について対称であるから，求める面積は$0\leqq x\leqq 3$における面積の２倍である．

$0\leqq x\leqq 3$ において，$3x\geqq\dfrac{1}{3}x^3$であるから，

求める面積をSとすると

$$S=2\int_0^3\left(3x-\frac{1}{3}x^3\right)dx$$
$$=2\left[\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4\right]_0^3$$
$$=3\cdot 3^2-\frac{1}{6}\cdot 3^4$$
$$=27-\frac{27}{2}=\boldsymbol{\frac{27}{2}}$$

2.

（１）$y=x^{\frac{1}{2}}$より，$y'=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$であるから，

点$(1,\ 1)$における接線の方程式は

$$y-1=\frac{1}{2\sqrt{1}}(x-1)$$
$$y-1=\frac{1}{2}(x-1)$$
$$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+1$$
$$\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}$$

（２）$0\leqq x\leqq 1$ において，$\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\geqq\sqrt{x}$であるから，

求める面積をSとすると

$$S=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-\sqrt{x}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}$$

$$=\frac{3+6-8}{12}=\mathbf{\frac{1}{12}}$$

3.

$y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$であるから，$y'=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$

よって，求める曲線の長さは

$$l=\int_0^1\sqrt{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}dx$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+x}dx$$

$$=\int_0^1(1+x)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$=\left[\frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x}\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{3}\left\{(1+1)\sqrt{1+1}-(1+0)\sqrt{1+0}\right\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)}$$

4.

点xにおける半円の面積は，$\frac{1}{2}\{x(1-x)\}^2\pi$であるから

求める立体の体積をVとすると

$$V=\int_0^1\frac{1}{2}\{x(1-x)\}^2\pi dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1\{x(1-x)\}^2dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1x^2(1-2x+x^2)dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1(x^2-2x^3+x^4)dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{5}x^5\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{10-15+6}{30}$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{30}=\boldsymbol{\frac{\pi}{60}}$$

5.

（１）求める回転体の体積をVとすると

$$V=\pi\int_0^1(e^{2x})^2dx$$

$$=\pi\int_0^1e^{4x}dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{4}e^{4x}\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{4}(e^4-e^0)=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}(e^4-1)}$$

（２）求める回転体の体積をVとすると

$$V=\pi\int_{-2}^2\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2dx$$

$$=\pi\int_{-2}^2\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}dx$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_{-2}^2(e^{2x}+2+e^{-2x})dx$$

ここで，$f(x)=e^{2x}+2+e^{-2x}$とおくと，

$$f(-x)=e^{2\cdot(-x)}+2+e^{-2\cdot(-x)}$$
$$=e^{-2x}+2+e^{2x}=f(x)$$

よって，$f(x)$は偶関数であるから

$$V=2\cdot\frac{\pi}{4}\int_0^2(e^{2x}+2+e^{-2x})dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}+2x-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^2$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}e^4+4-\frac{1}{2}e^{-4}\right)-\left(\frac{1}{2}e^0+0-\frac{1}{2}e^0\right)\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}e^4+4-\frac{1}{2}e^{-4}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}(e^4+8-e^{-4})}$$

6.

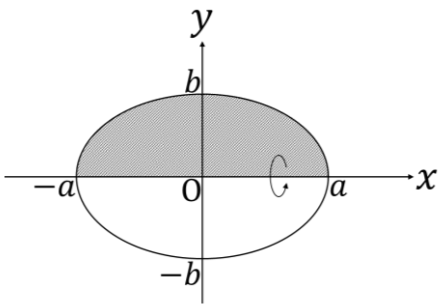
（１）$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ をyについて解くと

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$$

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

よって，$y = \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)}$



求める体積は，楕円の上半分$y = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)}$と$x$軸で囲まれた図形を$x$軸のまわりに回転してできる回転体の体積であるから，これをVとすると

$$V = \pi\int_{-a}^{a} y^2 dx$$

$$= \pi\int_{-a}^{a}\left\{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)}\right\}^2 dx$$

$$= \pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx$$

$$= \frac{b^2\pi}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2 - x^2)dx$$

$$= \frac{2b^2\pi}{a^2}\int_{0}^{a}(a^2 - x^2)dx$$

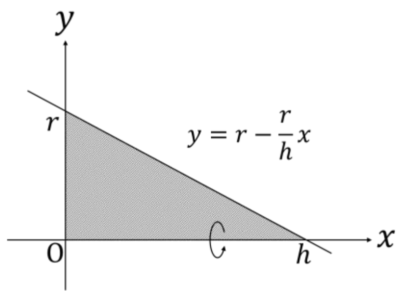
$$= \frac{2b^2\pi}{a^2}\left[a^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^a$$

$$= \frac{2b^2\pi}{a^2}\left(a^3 - \frac{1}{3}a^3\right)$$

$$= \frac{2b^2\pi}{a^2}\cdot\frac{2}{3}a^3 = \boldsymbol{\frac{4}{3}\pi ab^2}$$

（2）与えられた直線は，切片がrで，$y = 0$のとき，

$0 = r - \frac{r}{h}x$より，$x = h$



よって，求める体積をVとすると

$$V = \pi\int_0^h y^2 dx$$

$$= \pi\int_0^h\left(r - \frac{r}{h}x\right)^2 dx$$

$$= \pi\int_0^h\left(r^2 - \frac{2r^2}{h}x + \frac{r^2}{h^2}x^2\right)dx$$

$$= \pi\left[r^2x - \frac{r^2}{h}x^2 + \frac{r^2}{3h^2}x^3\right]_0^h$$

$$= \pi\left(r^2h - r^2h + \frac{1}{3}r^2h\right) = \boldsymbol{\frac{1}{3}\pi r^2 h}$$

練習問題 1-B

1.

$y' = 2x - 1$であるから，

点(0，0)における接線の方程式は

$y - 0 = (2\cdot 0 - 1)(x - 0)$

$y = -x$・・・①

点(2，2)における接線の方程式は

$y - 2 = (2\cdot 2 - 1)(x - 2)$

$y - 2 = 3(x - 2)$

$y = 3x - 6 + 2$

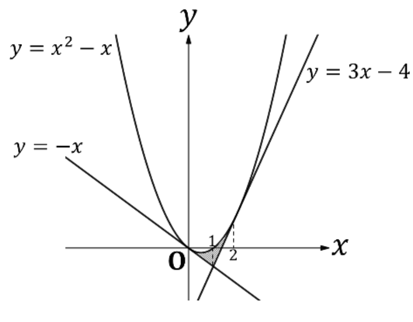
$y = 3x - 4$・・・②

①と②の交点のx座標を求めると

$-x = 3x - 4$

$-4x = -4$

$x = 1$



$0 \leqq x \leqq 1$において，$x^2 - x \geqq -x$

$1 \leqq x \leqq 2$において，$x^2 - x \geqq 3x - 4$

よって，求める面積をSとすると

$$S = \int_0^1\{(x^2 - x) - (-x)\}dx$$

$$+ \int_1^2\{(x^2 - x) - (3x - 4)\}dx$$

$$= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4)dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{3}+\left\{\left(\frac{1}{3}\cdot2^3-2\cdot2^2+4\cdot2\right)-\left(\frac{1}{3}-2+4\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}+\left(\frac{8}{3}-8+8-\frac{1}{3}+2-4\right)$$

$$=\frac{1}{3}+\left(\frac{7}{3}-2\right)$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

2.

（１）$y'=x-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x}$

$$=x-\frac{1}{4x}$$

よって

$$1+(y')^2=1+\left(x-\frac{1}{4x}\right)^2$$

$$=1+\left(x^2-2x\cdot\frac{1}{4x}+\frac{1}{16x^2}\right)$$

$$=1+x^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{16x^2}$$

$$=x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{16x^2}$$

$$=\left(x+\frac{1}{4x}\right)^2$$

したがって，求める曲線の長さをlとすると

$$l=\int_1^2\sqrt{1+(y')^2}dx$$

$$=\int_1^2\sqrt{\left(x+\frac{1}{4x}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_1^2\left|x+\frac{1}{4x}\right|dx$$

$1\leqq x\leqq 2$ において，$x+\frac{1}{4x}>0$ であるから

$$l=\int_1^2\left(x+\frac{1}{4x}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}\log|x|\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{2}\cdot2^2+\frac{1}{4}\log2-\left(\frac{1}{2}\cdot1^2+\frac{1}{4}\log1\right)$$

$$=2+\frac{1}{4}\log2-\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\log2}$$

（２）$y'=x$

よって

$$1+(y')^2=1+x^2$$

したがって，求める曲線の長さをlとすると

$$l=\int_0^2\sqrt{1+(y')^2}dx$$

$$=\int_0^2\sqrt{1+x^2}dx$$ ※p. 112 問 15 の公式より

$$=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+1}+\log\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\right]_0^2$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(2\sqrt{5}+\log\left|2+\sqrt{5}\right|-\log\left|\sqrt{1}\right|\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{2\sqrt{5}+\log\left(2+\sqrt{5}\right)\right\}$$

$$=\boldsymbol{\sqrt{5}+\frac{1}{2}\log\left(2+\sqrt{5}\right)}$$

（３）$y=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sqrt{x}$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$y'=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$=x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}$$

よって

$$1+(y')^2=1+\left(x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$=1+x-2\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{16}x^{-1}$$

$$=1+x-\frac{1}{2}+\frac{1}{16}x^{-1}$$

$$=x+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}x^{-1}$$

$$=\left(x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2$$

したがって，求める曲線の長さをlとすると

$$l=\int_1^4\sqrt{1+(y')^2}dx$$

$$=\int_1^4\sqrt{\left(x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_1^4\left|x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}\right|dx$$

$1 \leqq x \leqq 4$ において，$x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}} > 0$ であるから

$$l = \int_1^4 \left(x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}\right) dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}\cdot 2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^4$$

$$= \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x}\right]_1^4$$

$$= \left(\frac{2}{3}\cdot 4\sqrt{4} + \frac{1}{2}\sqrt{4}\right) - \left(\frac{2}{3}\cdot 1\sqrt{1} + \frac{1}{2}\sqrt{1}\right)$$

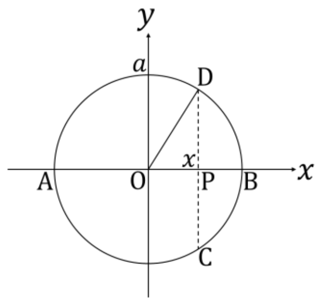
$$= \frac{16}{3} + 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{32+6-4-3}{6} = \boldsymbol{\frac{31}{6}}$$

3.

立体の底辺について，円の中心を原点として

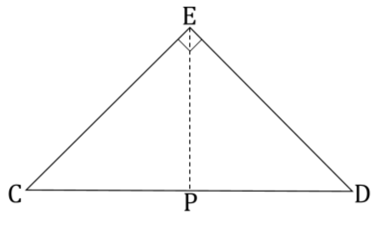
図のように座標軸を定める．



$\mathrm{P}(x,\ 0)$ $(-a \leqq x \leqq a)$とすれば，$\mathrm{OD} = a$であるから

$\mathrm{DP} = \sqrt{a^2 - |x|^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$

よって，$\mathrm{CD} = 2\sqrt{a^2 - x^2}$



$\triangle\mathrm{CDE}$は直角二等辺三角形であるから，

$\mathrm{EP} = \mathrm{DP} = \sqrt{a^2 - x^2}$

よって

$$\triangle\mathrm{CDE} = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{EP}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{a^2 - x^2}\cdot\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$= \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 = a^2 - x^2$$

したがって，求める体積をVとすると

$$V = \int_{-a}^{a}(a^2 - x^2)dx$$

$$= 2\int_0^a (a^2 - x^2)dx$$

$$= 2\left[a^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^a$$

$$= 2\left(a^3 - \frac{1}{3}a^3\right)$$

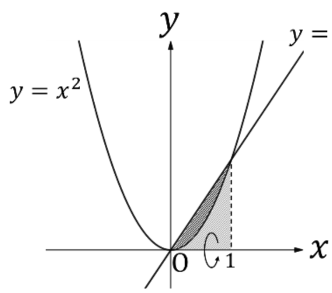
$$= 2\cdot\frac{2}{3}a^3 = \boldsymbol{\frac{4}{3}a^3}$$

4.

放物線と直線の交点のx座標を求めると

$x^2 = x$より，$x(x-1) = 0$

よって，$x = 0$，1



求める立体の体積は，$0 \leqq x \leqq 1$において，$y = x$とx軸で囲まれた図形をx軸のまわりに回転させた立体から，$y = x^2$とx軸で囲まれた図形をx軸のまわりに回転させた立体を取り除けばよいので，求める体積をVとすると

$$V = \pi\int_0^1 x^2 dx - \pi\int_0^1 (x^2)^2 dx$$

$$= \pi\int_0^1 x^2 dx - \pi\int_0^1 x^4 dx$$

$$= \pi\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 - \pi\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{5}\pi = \boldsymbol{\frac{2}{15}\pi}$$

5.

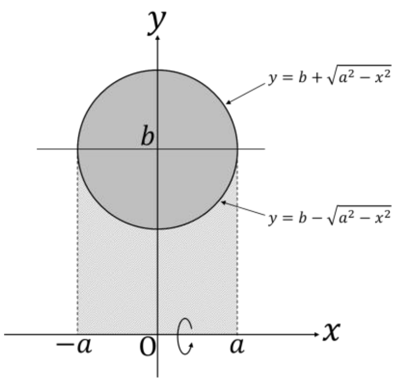
円の方程式をyについて解くと

$(y-b)^2 = a^2 - x^2$

$y - b = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$

$y - b \geqq 0$すなわち，$y \geqq b$のとき，$y = b + \sqrt{a^2 - x^2}$

$y - b < 0$すなわち，$y < b$のとき，$y = b - \sqrt{a^2 - x^2}$



4.と同様に考えて，求める体積をVとすると

$$V=\pi\int_{-a}^{a}\left(b+\sqrt{a^2-x^2}\right)^2dx$$

$$-\pi\int_{-a}^{a}\left(b-\sqrt{a^2-x^2}\right)^2dx$$

$$=\pi\int_{-a}^{a}\left\{\left(b+\sqrt{a^2-x^2}\right)^2-\left(b-\sqrt{a^2-x^2}\right)^2\right\}dx$$

$$=\pi\int_{-a}^{a}\left\{\left(b+\sqrt{a^2-x^2}\right)+\left(b-\sqrt{a^2-x^2}\right)\right\}$$

$$\times\left\{\left(b+\sqrt{a^2-x^2}\right)-\left(b-\sqrt{a^2-x^2}\right)\right\}dx$$

$$=\pi\int_{-a}^{a}2b\cdot2\sqrt{a^2-x^2}dx$$

$$=4\pi b\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx$$

$$=8\pi b\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx$$ ※p. 111 例題 12 より

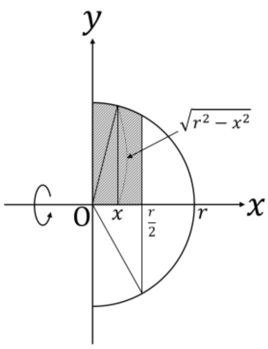
$$=8\pi b\left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)\right]_0^a$$

$$=4\pi b\cdot a^2\sin^{-1}1$$

$$=4\pi b\cdot a^2\cdot\frac{\pi}{2}=\boldsymbol{2\pi^2a^2b}$$

6.

半球をもとにもどし，図のように座標軸を定める．



求める体積は，色をつけた部分の図形を，
x軸のまわりに回転させた立体の体積である．

点xにおいて，$y=\sqrt{r^2-x^2}$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{r}{2}\right)$であるから，

求める図形をVとすると

$$V=\pi\int_0^{\frac{r}{2}}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{r}{2}}(r^2-x^2)dx$$

$$=\pi\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{r}{2}}$$

$$=\pi\left\{\frac{1}{2}r^3-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{r}{2}\right)^3\right\}$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}r^3-\frac{1}{3}\cdot\frac{r^3}{8}\right)$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}r^3-\frac{1}{24}r^3\right)=\boldsymbol{\frac{11}{24}\pi r^3}$$