4章　積分の応用

§1　面積・曲線の長さ・体積（p.120～p.129）

問1

（1）曲線と直線の交点のx座標を求めると

$$x^2 = x + 2$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x-2)(x+1) = 0$$
$$x = 2,\ -1$$

$-1 \leqq x \leqq 2$において，$x + 2 \geqq x^2$であるから

$$S = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 4 + 2\cdot 2 - \frac{1}{3}\cdot 8 - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right)$$
$$= \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \boldsymbol{\frac{9}{2}}$$

（2）直線の方程式は

$$y - 2 = \frac{2-(-2)}{4-0}(x-4)$$
$$y = x - 4 + 2$$
$$y = x - 2$$

$0 \leqq x \leqq 4$において，$\sqrt{x} \geqq x - 2$であるから

$$S = \int_0^4 \left\{\sqrt{x} - (x-2)\right\}dx$$
$$= \int_0^4 \left(\sqrt{x} - x + 2\right)dx$$
$$= \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_0^4$$
$$= \frac{2}{3}\cdot 4\sqrt{4} - \frac{1}{2}\cdot 4^2 + 2\cdot 4$$
$$= \frac{16}{3} - 8 + 8 = \boldsymbol{\frac{16}{3}}$$

問2

（1）2曲線の交点のx座標を求めると

$$x^2 = -x^2 + 2$$
$$2x^2 = 2$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm 1$$

$0 \leqq x \leqq 1$において，$-x^2 + 2 \geqq x^2$

$1 \leqq x \leqq 2$において，$x^2 \geqq -x^2 + 2$

であるから

$$S = \int_0^1 (-x^2 + 2 - x^2)dx + \int_1^2 (x^2 + x^2 - 2)dx$$
$$= \int_0^1 (-2x^2 + 2)dx + \int_1^2 (2x^2 - 2)dx$$
$$= -2\int_0^1 (x^2 - 1)dx + 2\int_1^2 (x^2 - 1)dx$$
$$= -2\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_0^1 + 2\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_1^2$$
$$= -2\left(\frac{1}{3} - 1\right) + 2\left\{\frac{1}{3}\cdot 2^3 - 2 - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right\}$$
$$= \frac{4}{3} + \frac{8}{3}$$
$$= \frac{12}{3} = \boldsymbol{4}$$

（2）曲線と直線$y = x - 1$の交点のx座標を求めると

$$\frac{2}{x} = x - 1$$
$$2 = x^2 - x$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x-2)(x+1) = 0$$
$$x = 2,\ x = -1$$

$1 \leqq x \leqq 2$ において，$\dfrac{2}{x} \geqq x - 1$

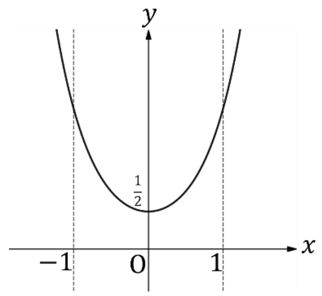
$2 \leqq x \leqq 4$ において，$x - 1 \geqq \dfrac{2}{x}$

であるから

$$S = \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - x + 1\right)dx + \int_2^4 \left(x - 1 - \frac{2}{x}\right)dx$$
$$= \left[2\log|x| - \frac{1}{2}x^2 + x\right]_1^2 + \left[\frac{1}{2}x^2 - x - 2\log|x|\right]_2^4$$
$$= \left(2\log 2 - \frac{1}{2}\cdot 2^2 + 2\right) - \left(2\log 1 - \frac{1}{2} + 1\right)$$
$$+ \left\{\left(\frac{1}{2}\cdot 4^2 - 4 - 2\log 4\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 2^2 - 2 - 2\log 2\right)\right\}$$
$$= 2\log 2 - 2 + 2 + \frac{1}{2} - 1$$
$$+(8 - 4 - 4\log 2 - 2 + 2 + 2\log 2)$$

$$= 2\log 2 - \frac{1}{2} + 4 - 2\log 2 = \mathbf{\frac{7}{2}}$$

問３



$$y' = \frac{2 \cdot e^{2x} - 2 \cdot e^{-2x}}{4}$$

$$= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$$

よって

$$1 + (y')^2 = 1 + \left(\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}\right)^2$$

$$= 1 + \frac{1}{4}(e^{4x} - 2e^{2x}e^{-2x} + e^{-4x})$$

$$= \frac{1}{4}(4 + e^{4x} - 2 + e^{-4x})$$

$$= \frac{1}{4}(e^{4x} + 2 + e^{-4x})$$

$$= \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x})^2$$

したがって，曲線の長さをlとすると

$$l = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x})dx$$

$$= 2\int_{0}^{1} \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x})dx$$

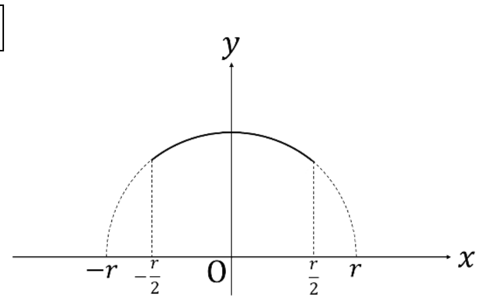
$$= \int_{0}^{1} (e^{2x} + e^{-2x})dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^{-2}$$

$$= \mathbf{\frac{1}{2}\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)}$$

問４



$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot (-2x)$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

よって

$$1 + (y')^2 = 1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2$$

$$= \frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}$$

$$= \frac{r^2}{r^2 - x^2}$$

したがって，曲線の長さをlとすると

$$l = \int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}} \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$$

$$= \int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\,dx$$

$$= \int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}} \frac{|r|}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx$$

$$= \int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx \quad ※r > 0 \text{ より}$$

$$= 2r\int_{0}^{\frac{r}{2}} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx$$

$$= 2r\left[\sin^{-1}\frac{x}{r}\right]_0^{\frac{r}{2}}$$

$$= 2r\left(\sin^{-1}\frac{1}{2} - \sin^{-1}0\right)$$

$$= 2r \cdot \frac{\pi}{6} = \boldsymbol{\frac{1}{3}\pi r}$$

問５

この立体を，点x $(-r < x < r)$で，x軸に垂直な平面で切ったときの切り口は，直角二等辺三角形であるから，その面積を$S(x)$とすると

$$S(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}(r^2-x^2)$$

よって

$$V=\int_{-r}^{r}S(x)\,dx$$

$$=\int_{-r}^{r}\frac{1}{2}(r^2-x^2)dx$$

$$=2\int_{0}^{r}\frac{1}{2}(r^2-x^2)dx$$

$$=\int_{0}^{r}(r^2-x^2)dx$$

$$=\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^r$$

$$=r^3-\frac{1}{3}r^3=\boldsymbol{\frac{2}{3}r^3}$$

$\boxed{\text{問 6}}$

（１）$V=\pi\int_0^2 y^2dx$

$$=\pi\int_0^2\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2dx$$

$$=\pi\cdot\frac{1}{4}\int_0^2 x^4dx$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^2$$

$$=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot 2^5=\boldsymbol{\frac{8}{5}\pi}$$

（２）$V=\pi\int_0^{\pi}y^2dx$

$$=\pi\int_0^{\pi}\sin^2x\,dx$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\pi=\boldsymbol{\frac{\pi^2}{2}}$$

（３）直線$y=\frac{r}{h}x$とy軸の交点のx座標を求めると

$0=\frac{r}{h}x$より，$x=0$

よって

$$V=\pi\int_0^h y^2dx$$

$$=\pi\int_0^h\left(\frac{r}{h}x\right)^2dx$$

$$=\frac{r^2}{h^2}\pi\int_0^h x^2dx$$

$$=\frac{r^2}{h^2}\pi\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h$$

$$=\frac{r^2}{h^2}\pi\cdot\frac{1}{3}h^3$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}\pi r^2h}$$