教科書と同じく，積分定数Cは省略.

問 1

（1）$\sin x = t$とおくと，$\cos x\, dx = dt$

よって

$$与式 = \int (t^2+1)dt$$

$$= \frac{1}{3}t^3 + t$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}\sin^3 x + \sin x}$$

（2）$2x+3=t$とおくと，$2dx = dt$より，$dx = \frac{1}{2}dt$

よって

$$与式 = \int \sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot t^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{t^3}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}\sqrt{(2x+3)^3}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3}}$$

（3）$x^2+1=t$とおくと，$2xdx = dt$より，$xdx = \frac{1}{2}dt$

よって

$$与式 = \int \frac{1}{t^3}\cdot\frac{1}{2}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int t^{-3}dt$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-2}t^{-2}$$

$$= -\frac{1}{4t^2}$$

$$= \boldsymbol{-\frac{1}{4(x^2+1)^2}}$$

（4）$x^3 = t$とおくと，$3x^2dx = dt$より，$x^2dx = \frac{1}{3}dt$

よって

$$与式 = \int e^t\cdot\frac{1}{3}dt$$

$$= \frac{1}{3}\int e^t dt$$

$$= \frac{1}{3}e^t$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}e^{x^3}}$$

問 2

（1）$$与式 = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx$$

$$= \int \frac{(\sin x)'}{\sin x}dx$$

$$= \boldsymbol{\log|\sin x|}$$

（2）$$与式 = \int \frac{(e^x+4)'}{e^x+4}dx$$

$$= \log|e^x+4|$$

$$= \boldsymbol{\log(e^x+4)} \quad ※e^x+4>0 より$$

（3）$$与式 = \int \frac{\frac{1}{2}(x^2+5)'}{x^2+5}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+5)'}{x^2+5}dx$$

$$= \frac{1}{2}\log|x^2+5|$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}\log(x^2+5)} \quad ※x^2+5>0 より$$

問 3

（1）$3x-1=t$とおくと，$3dx = dt$より，$dx = \frac{1}{3}dt$

また，xとtの対応は

x	0	$\to$	1
t	-1	$\to$	2

よって

$$与式 = \int_{-1}^{2} t^3 \cdot \frac{1}{3} dt$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} t^3 dt$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}t^4\right]_{-1}^{2}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\{2^4 - (-1)^4\}$$

$$= \frac{1}{12}\cdot 15 = \mathbf{\frac{5}{4}}$$

（２） $\log x = t$とおくと， $\frac{1}{x}dx = dt$

また，xとtの対応は

x	e	$\to$	e^2
t	1	$\to$	2

よって

$$与式 = \int_{1}^{2} \frac{1}{t} dt$$

$$= \Big[\log|t|\Big]_{1}^{2}$$

$$= \log 2 - \log 1$$

$$= \mathbf{\log 2}$$

（３） $\sin x = t$とおくと， $\cos x\, dx = dt$

また，xとtの対応は

x	0	$\to$	$\frac{\pi}{2}$
t	0	$\to$	1

よって

$$与式 = \int_{0}^{1} t^5 dt$$

$$= \left[\frac{1}{6}t^6\right]_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{6}(1^6 - 0^6)$$

$$= \mathbf{\frac{1}{6}}$$

問４　教科書の$G(x)$等をそのまま使用.

（１） $f(x) = x$，$g(x) = e^x$とすると

$$G(x) = \int e^x dx = e^x$$

$$f'(x) = 1$$

よって

$$与式 = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx$$

$$= \boldsymbol{xe^x - e^x}$$

（２） $f(x) = x$，$g(x) = \cos x$とすると

$$G(x) = \int \cos x\, dx = \sin x$$

$$f'(x) = 1$$

よって

$$与式 = x\sin x - \int 1 \cdot \sin x\, dx$$

$$= x\sin x - (-\cos x)$$

$$= \boldsymbol{x\sin x + \cos x}$$

問５　教科書の$F(x)$等をそのまま使用.

（１） $f(x) = x$，$g(x) = \log x$とすると

$$F(x) = \int x\, dx = \frac{1}{2}x^2$$

$$g'(x) = \frac{1}{x}$$

よって

$$与式 = \frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{2}\int x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}x^2(2\log x - 1)}$$

（２） $f(x) = \frac{1}{x^2}$， $g(x) = \log x$ とすると

$$F(x) = \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = -\frac{1}{x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x}$$

よって

$$与式 = -\frac{1}{x}\cdot\log x - \int -\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} dx$$

$$= -\frac{1}{x}\log x + \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$= -\frac{1}{x}\log x + \left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$= \boldsymbol{-\frac{1}{x}(\log x + 1)}$$

$\boxed{\text{問 6}}$

（１）与式 $= x^2e^x - \int (x^2)'e^x\,dx$

$$= x^2e^x - 2\int xe^x dx$$

$$= x^2e^x - 2\left(xe^x - \int x'e^x\,dx\right)$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x$$
$$= \boldsymbol{(x^2 - 2x + 2)e^x}$$

（２）与式 $= x^2\sin x - \int (x^2)'\sin x\,dx$

$$= x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx$$

$$= x^2\sin x - 2\left\{x\cdot(-\cos x) - \int x'\cdot(-\cos x)\right\}$$

$$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x\,dx$$

$$= \boldsymbol{x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x}$$

（３）与式 $= \int 1\cdot(\log x)^2 dx$

$$= x(\log x)^2 - \int x\cdot\{(\log x)^2\}'dx$$

$$= x(\log x)^2 - \int x\left(2\log x\cdot\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= x(\log x)^2 - 2\int \log x\,dx$$

$= x(\log x)^2 - 2(x\log x - x)$　※例題 5 より

$$= \boldsymbol{x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x}$$

$\boxed{\text{問 7}}$

（１）与式 $= \Big[xe^x\Big]_0^1 - \int_0^1 x'\cdot e^x dx$

$$= (1\cdot e - 0) - \int_0^1 e^x dx$$

$$= e - \Big[e^x\Big]_0^1$$

$$= e - (e - e^0)$$
$$= e - e + 1 = \mathbf{1}$$

（２）与式 $= \Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x'\sin x\,dx$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2} - 0\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot 1 - \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left\{-\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0)\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \{0 - (-1)\}$$

$$= \boldsymbol{\frac{\pi}{2} - 1}$$

（３）例題 5 を用いて

与式 $= \Big[x\log x - x\Big]_1^e$

$$= (e\log e - e) - (1\cdot\log 1 - 1)$$
$$= (e - e) - (0 - 1)$$
$$= \mathbf{1}$$

（４）与式 $= \Big[x^2\cdot(-\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2)'\cdot(-\cos x)dx$

$$= (0 - 0) + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$$

$$= 2\left(\Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x'\sin x\,dx\right)$$

$$= 2\left\{\left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx\right\}$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2} - \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2} + \Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= 2\left\{\frac{\pi}{2} + \left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right)\right\}$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

$$= \boldsymbol{\pi - 2}$$

$\boxed{\text{問 8}}$

（１）$x - 3 = t$ とおくと，$dx = dt$，$x = t + 3$

よって

$$与式 = \int \frac{t+3}{t^2} dt$$

$$= \int \left(\frac{1}{t} + 3t^{-2}\right) dt$$

$$= \log|t| - 3t^{-1}$$

$$= \log|t| - \frac{3}{t}$$

$$= \boldsymbol{\log|x-3| - \frac{3}{x-3}}$$

（２）$x+2=t$とおくと，$dx=dt$，$x=t-2$

よって

$$与式 = \int \frac{t-2}{\sqrt{t}} dt$$

$$= \int \left(\sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{t}}\right) dt$$

$$= \int \left(t^{\frac{1}{2}} - 2t^{-\frac{1}{2}}\right) dt$$

$$= \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - 2 \cdot 2t^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{t^3} - 4\sqrt{t}$$

$$= \boldsymbol{\frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3} - 4\sqrt{x+2}}$$

【別解】

$\sqrt{x+2}=t$とおくと，$x+2=t^2$であるから，

$dx=2tdt$，$x=t^2-2$

よって

$$与式 = \int \frac{t^2-2}{t} \cdot 2tdt$$

$$= 2\int (t^2-2)dt$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}t^3 - 2t\right)$$

$$= \frac{2}{3}t^3 - 4t$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{x+2}\right)^3 - 4\sqrt{x+2}$$

$$= \boldsymbol{\frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3} - 4\sqrt{x+2}}$$

（３）$x+1=t$とおくと，$dx=dt$，$x=t-1$

よって

$$与式 = \int (t-1)^2\sqrt{t}dt$$

$$= \int (t^2-2t+1)t^{\frac{1}{2}}dt$$

$$= \int \left(t^{\frac{5}{2}} - 2t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}}\right) dt$$

$$= \frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}t^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{7}\sqrt{t^7} - \frac{4}{5}\sqrt{t^5} + \frac{2}{3}\sqrt{t^3}$$

$$= \boldsymbol{\frac{2}{7}\sqrt{(x+1)^7} - \frac{4}{5}\sqrt{(x+1)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}}$$

【別解】

$\sqrt{x+1}=t$とおくと，$x+1=t^2$であるから，

$dx=2tdt$，$x=t^2-1$

よって

$$与式 = \int (t^2-1)^2\, t \cdot 2tdt$$

$$= 2\int (t^6 - 2t^4 + t^2)dt$$

$$= 2\left(\frac{1}{7}t^7 - 2\cdot\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3\right)$$

$$= \frac{2}{7}\left(\sqrt{x+1}\right)^7 - \frac{4}{5}\left(\sqrt{x+1}\right)^5 + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3$$

$$= \boldsymbol{\frac{2}{7}\sqrt{(x+1)^7} - \frac{4}{5}\sqrt{(x+1)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}}$$

（４）$2x-1=t$とおくと，$dx=\frac{1}{2}dt$，$2x=t+1$

よって

$$与式 = \int (t+1)t^7 \cdot \frac{1}{2}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int (t^8+t^7)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}t^9 + \frac{1}{8}t^8\right)$$

$$= \frac{1}{18}t^9 + \frac{1}{16}t^8$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{18}(2x-1)^9 + \frac{1}{16}(2x-1)^8}$$

問９

（１）$\sqrt{9-x^2}$は偶関数であるから

$$与式 = 2\int_0^3 \sqrt{9-x^2}dx$$

$$= 2\int_0^3 \sqrt{3^2 - x^2}dx$$

$x = 3\sin t$とおくと，$dx = 3\cos t\,dt$

また，xとtの対応は

x	$0 \to 3$
t	$0 \to \frac{\pi}{2}$

よって

$$与式 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3^2 - 3^2\sin^2 t} \cdot 3\cos t\,dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot 3\cos t\,dt$$

$$= 18\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\cos t\,dt$$

$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$のとき，$\cos t \geqq 0$ なので

$$= 18\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt$$

$$= 18\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2}dt$$

$$= 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)dt$$

$$= 9\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 9 \cdot \frac{\pi}{2} = \boldsymbol{\frac{9}{2}\pi}$$

（２）$与式 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{2^2 - x^2}dx$

$x = 2\sin t$とおくと，$dx = 2\cos t\,dt$

また，xとtの対応は

x	$0 \to 1$
t	$0 \to \frac{\pi}{6}$

よって

$$与式 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{2^2 - 2^2\sin^2 t} \cdot 2\cos t\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot 2\cos t\,dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\cos^2 t}\cos t\,dt$$

$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{6}$のとき，$\cos t \geqq 0$ なので

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\,dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 + \cos 2t}{2}dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2t)dt$$

$$= 2\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

問 10

$I = e^{ax}\cos bx\,dx$とおくと

$$I = e^{ax} \cdot \frac{1}{b}\sin bx - \int (e^{ax})' \cdot \frac{1}{b}\sin bx\,dx$$

$$= \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx$$

$$= \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx$$

$$-\frac{a}{b}\left\{\frac{1}{b}e^{ax} \cdot (-\cos bx) - \frac{a}{b}\int e^{ax}(-\cos bx)dx\right\}$$

$$= \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}I$$

よって

$$b^2 I = be^{ax}\sin bx + ae^{ax}\cos bx - a^2 I$$

$$(a^2 + b^2)I = e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)$$

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$$

問 11

（１）$与式 = \dfrac{e^{2x}}{2^2 + 3^2}(2\sin 3x - 3\cos 3x)$

$$= \boldsymbol{\frac{e^{2x}}{13}(2\sin 3x - 3\cos 3x)}$$

（２）$与式 = \dfrac{e^{3x}}{3^2 + 4^2}(3\cos 4x + 4\sin 4x)$

$$= \boldsymbol{\frac{e^{3x}}{25}(3\cos 4x + 4\sin 4x)}$$

問 12

（１）分子を分母で割ると

$$
\begin{array}{r}
x-1 \\
x+1 \overline{\smash{)}\,x^2+2} \\
\underline{x^2+x} \\
-x+2 \\
\underline{-x-1} \\
3
\end{array}
$$

よって

$$与式 = \int\left(x-1+\frac{3}{x+1}\right)dx$$

$$= \int\left(x-1+3\cdot\frac{(x+1)'}{x+1}\right)dx$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}x^2 - x + 3\log|x+1|}$$

（２）まず，部分分数に分解する．

$\dfrac{4x+1}{(x-2)(x+1)} = \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{x+1}$ とおき

両辺に$(x-2)(x+1)$をかけると

$4x+1 = a(x+1)+b(x-2)$

$4x+1 = ax+a+bx-2b$

$4x+1 = (a+b)x+(a-2b)$

これが，xについての恒等式であるから

$$\begin{cases} a+b=4 \\ a-2b=1 \end{cases}$$

これを解いて，$a=3$，$b=1$

よって

$$与式 = \int\left(\frac{3}{x-2}+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \int\left(3\cdot\frac{(x-2)'}{x-2}+\frac{(x+1)'}{x+1}\right)dx$$

$$= 3\log|x-2| + \log|x+1|$$

$$= \log|x-2|^3 + \log|x+1|$$

$$= \boldsymbol{\log|(x-2)^3(x+1)|}$$

$\boxed{問 13}$

（１）両辺に$x^2(x+1)$をかけると

$1 = (ax+b)(x+1)+cx^2$

$1 = ax^2+(a+b)x+b+cx^2$

$1 = (a+c)x^2+(a+b)x+b$

これが，xについての恒等式であるから

$$\begin{cases} a+c=0 \\ a+b=0 \\ \quad\ c=1 \end{cases}$$

これを解いて，$\boldsymbol{a=-1}$，$\boldsymbol{b=1}$，$\boldsymbol{c=1}$

（２）$$与式 = \int\left(\frac{-x+1}{x^2}+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= -\int\frac{1}{x}dx + \int x^{-2}dx + \int\frac{1}{x+1}dx$$

$$= -\log|x| - x^{-1} + \log|x+1|$$

$$= \boldsymbol{\log\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x}}$$

$\boxed{問 14}$

$\dfrac{1}{x^2-a^2}$ を部分分数分解する．

$\dfrac{1}{x^2-a^2} = \dfrac{k}{x-a}+\dfrac{l}{x+a}$ とおき，

両辺に$(x-a)(x+a)$をかけると

$1 = k(x+a)+l(x-a)$

$1 = kx+ka+lx-la$

$1 = (k+l)x+(ka-la)$

これが，xについての恒等式であるから

$$\begin{cases} k+l=0 & \cdot\cdot\cdot① \\ ka-la=1 & \cdot\cdot\cdot② \end{cases}$$

①より，$l=-k$

これを②に代入して

$ka+ka=1$

$2ka=1$

$k=\dfrac{1}{2a}$

これより，$l=-\dfrac{1}{2a}$ であるから

$$左辺 = \int\frac{1}{(x+a)(x-a)}dx$$

$$= \int\left(\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{x-a}-\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{x+a}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2a}\int\left\{\frac{(x-a)'}{x-a}-\frac{(x+a)'}{x+a}\right\}dx$$

$$= \frac{1}{2a}(\log|x-a| - \log|x+a|)$$

$$= \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| = 右辺$$

$\boxed{問 15}$

$I=\int\sqrt{x^2+A}dx$ とおくと

$$I=\int 1\cdot\sqrt{x^2+A}dx$$

$$=x\sqrt{x^2+A}-\int x\left(\sqrt{x^2+A}\right)'dx$$

$$=x\sqrt{x^2+A}-\int x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+A}}\cdot 2x\,dx$$

$$=x\sqrt{x^2+A}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+A}}dx$$

$$=x\sqrt{x^2+A}-\int\frac{(x^2+A)-A}{\sqrt{x^2+A}}dx$$

$$=x\sqrt{x^2+A}-\left(\int\sqrt{x^2+A}dx-\int\frac{A}{\sqrt{x^2+A}}dx\right)$$

$$=x\sqrt{x^2+A}-I+A\int\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}dx$$

$$=x\sqrt{x^2+A}-I+A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|$$

よって

$2I=x\sqrt{x^2+A}+A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|$であるから

$$I=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A}+A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|\right)$$

$\boxed{問 16}$

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$$

$$=\frac{1}{2}\{0+a^2\sin^{-1}1-(0+a^2\sin^{-1}0)\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(a^2\cdot\frac{\pi}{2}-0\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{\pi a^2}{4}}$$

$\boxed{問 17}$

（１）与式 $=\int_0^1\sqrt{3-(x^2+2x)}dx$

$$=\int_0^1\sqrt{3-\{(x+1)^2-1\}}dx$$

$$=\int_0^1\sqrt{4-(x+1)^2}dx$$

$x+1=t$とおくと，$dx=dt$

また，xとtの対応は

x	0	$\to$	1
t	1	$\to$	2

よって

与式 $=\int_1^2\sqrt{2^2-t^2}dt$

$$=\frac{1}{2}\left[t\sqrt{4-t^2}+4\sin^{-1}\frac{t}{2}\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{2}\left\{0+4\sin^{-1}1-\left(\sqrt{3}+4\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(4\cdot\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}-4\cdot\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{3}\pi$$

$$=\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

（２）与式 $=\int_2^3\sqrt{(x-2)^2-4+5}dx$

$$=\int_2^3\sqrt{(x-2)^2+1}dx$$

$x-2=t$とおくと，$dx=dt$

また，xとtの対応は

x	2	$\to$	3
t	0	$\to$	1

よって

与式 $=\int_0^1\sqrt{t^2+1}dt$

$$=\frac{1}{2}\left[t\sqrt{t^2+1}+\log\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1\sqrt{1^2+1}+\log\left|1+\sqrt{1^2+1}\right|-(0+\log 1)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\{\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})}$$

$\boxed{問 18}$

（１）与式 $=\frac{1}{2}\int\{\sin(3x+2x)-\sin(3x-2x)\}dx$

$$=\frac{1}{2}\int(\sin 5x-\sin x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\cos 5x+\cos x\right)$$

$= -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}\mathbf{cos\,5}\boldsymbol{x} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}$

（２）与式 $= \frac{1}{2}\int \{\cos(4x+3x) + \cos(4x-3x)\}dx$

$= \frac{1}{2}\int (\cos 7x + \cos x)dx$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\sin 7x + \sin x\right)$

$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{14}}\mathbf{sin\,7}\boldsymbol{x} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x}$

（３）与式 $= -\frac{1}{2}\int \{\cos(2x+5x) - \cos(2x-5x)\}dx$

$= -\frac{1}{2}\int \{\cos 7x - \cos(-3x)\}dx$

$= -\frac{1}{2}\int (\cos 7x - \cos 3x)dx$

$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\sin 7x - \frac{1}{3}\sin 3x\right)$

$= -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{14}}\mathbf{sin\,7}\boldsymbol{x} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\mathbf{sin\,3}\boldsymbol{x}$

（４）与式 $= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$

$\sin x = t$とおくと，$\cos x\, dx = dt$であるから

与式 $= \int \frac{dt}{1-t^2}$

$= \int \frac{dt}{(1-t)(1+t)}$

$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)dt$

※部分分数分解の過程は省略.

$= \frac{1}{2}\int (\log|1+t| - \log|1-t|)$

$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|$

$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{log}\frac{\mathbf{1+sin}\,\boldsymbol{x}}{\mathbf{1-sin}\,\boldsymbol{x}}$　※真数 > 0 より

問 19

（１）与式 $= \frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{\mathbf{16}}{\mathbf{35}}$

（２）与式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,(1-\sin^2 x)dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 x - \sin^6 x)dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\, dx$

$= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$

$= \frac{3}{16}\pi - \frac{5}{32}\pi = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{32}}$