練習問題 1-A

1. Cは積分定数

（1）与式 $=\int\left(x-2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)dx$

$=\int\left(x-2+\dfrac{3}{x}-x^{-2}\right)dx$

$=\dfrac{1}{2}x^2-2x+3\log|x|-\dfrac{1}{-2+1}x^{-2+1}+C$

$=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}x^2-2x+3\log|x|+\dfrac{1}{x}+C}$

（2）与式 $=\int\left(4x-2+\dfrac{1}{4x}\right)dx$

$=\int\left(4x-2+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{x}\right)dx$

$=2x^2-2x+\dfrac{1}{4}\log|x|+C$

$=\boldsymbol{2x^2-2x+\dfrac{1}{4}\log x+C}$　※$\sqrt{x}$より $x\geqq 0$

（3）与式 $=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}e^{6x}-\dfrac{1}{3}\sin 3x+C}$

（4）与式 $=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}\log|6x+5|+C}$

2.

（1）与式 $=\int_0^2(3x^3-6x^2)dx$

$=\left[\dfrac{3}{4}x^4-2x^3\right]_0^2$

$=\dfrac{3}{4}\cdot 2^4-2\cdot 2^3$

$=12-16=\boldsymbol{-4}$

（2）与式 $=\int_1^2\left(5x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+\dfrac{4}{\sqrt{x}}\right)dx$

$=\int_1^2\left(5x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}+4x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$

$=\left[5\cdot\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-3\cdot\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+4\cdot 2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^2$

$=\left[2x^2\sqrt{x}-2x\sqrt{x}+8\sqrt{x}\right]_1^2$

$=\left(2\cdot 2^2\sqrt{2}-2\cdot 2\sqrt{2}+8\sqrt{2}\right)$
$\quad-\left(2\cdot 1^2\sqrt{1}-2\cdot 1\sqrt{1}+8\sqrt{1}\right)$

$=\left(8\sqrt{2}-4\sqrt{2}+8\sqrt{2}\right)-(2-2+8)$

$=\boldsymbol{12\sqrt{2}-8}$

（3）与式 $=\left[\dfrac{1}{4}e^{4x}+\dfrac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\left(\dfrac{1}{4}e^{2\pi}+\dfrac{1}{2}\sin\pi\right)-\left(\dfrac{1}{4}e^0+\dfrac{1}{2}\sin 0\right)$

$=\left(\dfrac{1}{4}e^{2\pi}+0\right)-\left(\dfrac{1}{4}+0\right)$

$=\dfrac{1}{4}e^{2\pi}-\dfrac{1}{4}=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}(e^{2\pi}-1)}$

（4）x^3，xは奇関数，x^2，4は偶関数であるから

与式 $=2\int_0^1(-3x^2+4)dx$

$=2\left[-3\cdot\dfrac{1}{3}x^3+4x\right]_0^1$

$=2(-1+4)$

$=2\cdot 3=\boldsymbol{6}$

3. Cは積分定数

（1）与式 $=\int\dfrac{dx}{x^2+5^2}$

$=\boldsymbol{\dfrac{1}{5}\tan^{-1}\dfrac{x}{5}+C}$

（2）与式 $=\int\left(\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x\sqrt{x^2+2}}+\dfrac{x}{x\sqrt{x^2+2}}\right)dx$

$=\int\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}\right)dx$

$=\log|x|+\log\left|x+\sqrt{x^2+2}\right|+C$

$=\boldsymbol{\log\left|x\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\right|+\mathrm{C}}$

（3）$y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$は偶関数であるから

与式 $=2\int_0^{\sqrt{3}}\dfrac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

$$= 2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{2^2 - x^2}}$$

$$= 2\left[\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= 2\left(\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin^{-1} 0\right)$$

$$= 2\cdot\frac{\pi}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi}$$

（4）与式 $= \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} - \tan^{-1} 0\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6} = \boldsymbol{\frac{\pi}{6\sqrt{3}}}$$

4.

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 (ax^2 + bx + c)dx$$

$$= 2\int_0^1 (ax^2 + c)dx$$

$$= 2\left[\frac{1}{3}ax^3 + cx\right]_0^1$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}a + c\right)$$

$$= \frac{2}{3}a + 2c$$

よって，$\frac{2}{3}a + 2c = 0$・・・①

$$\int_{-1}^1 xf(x)dx = \int_{-1}^1 (ax^3 + bx^2 + cx)\,dx$$

$$= 2\int_0^1 bx^2 dx$$

$$= 2\left[\frac{1}{3}bx^3\right]_0^1$$

$$= 2\cdot\frac{1}{3}b = \frac{2}{3}b$$

よって，$\frac{2}{3}b = 2$・・・②

$$\int_{-1}^1 x^2 f(x)dx = \int_{-1}^1 (ax^4 + bx^3 + cx^2)\,dx$$

$$= 2\int_0^1 (ax^4 + cx^2)dx$$

$$= 2\left[\frac{1}{5}ax^5 + \frac{1}{3}cx^3\right]_0^1$$

$$= 2\left(\frac{1}{5}a + \frac{1}{3}c\right)$$

$$= \frac{2}{5}a + \frac{2}{3}c$$

よって，$\frac{2}{5}a + \frac{2}{3}c = -8$・・・③

②より，$b = 3$

①，③より

$$\begin{cases} a + 3c = 0 \\ 3a + 5c = -60 \end{cases}$$

これを解いて，$a = -45$，$c = 15$

以上より，$\boldsymbol{a = -45}$**，**$\boldsymbol{b = 3}$**，**$\boldsymbol{c = 15}$

5.

$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$の証明

左辺 $= \int \frac{e^x - e^{-x}}{2}dx$

$$= \frac{1}{2}\int (e^x - e^{-x})dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x - \frac{1}{-1}\cdot e^{-x}\right) + C$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} + C$$

$= \cosh x + c =$ 右辺

$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$の証明

左辺 $= \int \frac{e^x + e^{-x}}{2}dx$

$$= \frac{1}{2}\int (e^x + e^{-x})dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x + \frac{1}{-1}\cdot e^{-x}\right) + C$$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2} + C$$

$= \sinh x + C =$ 右辺

6.

曲線とx軸との交点を求めると

$$\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-x=0$$

$$x^3-x^2-2x=0$$

$$x(x^2-x-2)=0$$

$$x(x+1)(x-2)=0$$

よって，$x=-1,\ 0,\ 2$

区間$[-1,\ 0]$においては，$y\geqq 0$，区間$[0,\ 2]$においては，$y\leqq 0$であるから，求める図形の面積をSとすると

$$\int\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-x\right)dx=\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+C$$

であるから

$$S=\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-x\right)-\int_{0}^{2}\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-x\right)$$

$$=\left[\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{2}$$

$$=\left\{0-\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)\right\}-\left\{\left(\frac{1}{8}\cdot 16-\frac{1}{6}\cdot 8-\frac{1}{2}\cdot 4\right)-0\right\}$$

$$=-\frac{3+4-12}{24}-\frac{48-32-48}{24}$$

$$=-\frac{-5}{24}-\frac{-32}{24}$$

$$=\frac{5}{24}+\frac{32}{24}=\mathbf{\frac{37}{24}}$$

練習問題 1-B

1.

$$左辺=\int_{\alpha}^{\beta}\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$=\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\beta^2-\alpha^2)+\alpha\beta(\beta-\alpha)$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)\{2(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)-3(\alpha+\beta)^2+6\alpha\beta\}$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)(2\beta^2+2\alpha\beta+2\alpha^2-3a^2-6\alpha\beta-3\beta^2+6\alpha\beta)$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)(-\beta^2+2\alpha\beta-a^2)$$

$$=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)(\beta^2-2\alpha\beta+a^2)$$

$$=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)(\beta-\alpha)^2$$

$$=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=右辺$$

【別解】

$$(x-\alpha)(x-\beta)=(x-\alpha)\{(x-\alpha)+(\alpha-\beta)\}$$

$$=(x-\alpha)^2+(\alpha-\beta)(x-\alpha)$$

よって

$$左辺=\int_{\alpha}^{\beta}\{(x-\alpha)^2+(\alpha-\beta)(x-\alpha)\}dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2dx+\int_{\alpha}^{\beta}(\alpha-\beta)(x-\alpha)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\beta}+(\alpha-\beta)\left[\frac{1}{2}(x-\alpha)^2\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3+(\alpha-\beta)\cdot\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2$$

$$=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$$

$$=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=右辺$$

2.

$\int_{-1}^{1}f(t)dt$ は定数となるので，

$\int_{-1}^{1}f(t)dt=k$ （kは定数）とおくと，

$f(x)=5x^4-4x^3+2x+k$であるから，

$$\int_{-1}^{1}f(t)dt=\int_{-1}^{1}(5t^4-4t^3+2t+k)dt=k$$

$$2\int_{0}^{1}(5t^4+k)dt=k$$

$$2\left[t^5+kt\right]_{0}^{1}=k$$

$$2(1+k)=k$$

よって，$2+2k=k$より，$k=-2$

したがって，$\boldsymbol{f(x)=5x^4-4x^3+2x-2}$

3.

求める２次関数を，$f(x)=ax^2+bx+c$とおく．

$$\frac{d}{dx}\int_{x}^{x+1}f(t)dt=\frac{d}{dx}\int_{x}^{x+1}(ax^2+bx+c)dt$$

$$=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}at^3+\frac{1}{2}bt^2+ct\right]_{x}^{x+1}$$

$$=\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{3}a(x+1)^3+\frac{1}{2}b(x+1)^2\right.$$

$$\left.+c(x+1)-\left(\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+cx\right)\right\}$$

$=a(x+1)^2+b(x+1)+c-(ax^2+bx+c)$

$=2ax+a+b$

よって，題意より$2ax+a+b=4x+4$であるから

$$\begin{cases}2a=4\\a+b=4\end{cases}$$

これを解いて，$a=2$，$b=2$・・・①

また，$f(0)=2$であるから，$c=2$・・・②

①，②より，$\boldsymbol{f(x)=2x^2+2x+2}$

【別解】

求める２次関数を，$f(x)=ax^2+bx+c$とおく．

また，$f(x)$の不定積分の１つを$F(x)$，すなわち

$F'(x)=f(x)$とすると

$$\frac{d}{dx}\int_x^{x+1}f(t)dt=\frac{d}{dx}\Big[F(t)\Big]_x^{x+1}$$

$$=\frac{d}{dx}\{F(x+1)-F(x)\}$$

$$=\frac{d}{dx}F(x+1)-\frac{d}{dx}F(x)$$

$=F'(x+1)-F'(x)$

$=f(x+1)-f(x)$

$=a(x+1)^2+b(x+1)+c-(ax^2+bx+c)$

以下略.

4.

（１）左辺$=\displaystyle\int_{-x}^{0}f(t)dt+\int_0^x f(t)dt$

$$=-\int_0^{-x}f(t)dt+\int_0^x f(t)dt$$

$=-S(-x)+S(x)=$右辺

（２）$S(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ より，$S'(x)=f(x)$

（１）より

左辺$=\dfrac{d}{dx}\{S(x)-S(-x)\}$

$=S'(x)-S'(-x)\cdot(-x)'$

$=S'(x)+S'(-x)$

$=f(x)+f(-x)=$右辺

5.

（１）$0\leqq x\leqq 1$のとき，$x^2\leqq x^{\frac{1}{2}}\leqq x^0$であるから

$x^2\leqq\sqrt{x}\leqq 1$

これより，$1+x^2\leqq 1+\sqrt{x}\leqq 2$となるので

$$\frac{1}{2}\leqq\frac{1}{1+\sqrt{x}}\leqq\frac{1}{1+x^2}$$

（２）$y=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$，$y=\dfrac{1}{1+x^2}$は，$0\leqq x\leqq 1$ において連続であり，

この区間内に，$\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}<\dfrac{1}{1+x^2}$を満たす点が存在するので，(恒等的に等号は成り立たない)

$$\int_0^1\frac{1}{2}dx<\int_0^1\frac{1}{1+\sqrt{x}}dx<\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$$

ここで

$$\int_0^1\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[x\Big]_0^1=\frac{1}{2}$$

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\Big[\tan^{-1}x\Big]_0^1$$

$$=\tan^{-1}1-\tan^{-1}0=\frac{\pi}{4}$$

以上より

$$\frac{1}{2}<\int_0^1\frac{1}{1+\sqrt{x}}dx<\frac{\pi}{4}$$

6.

（１）$\mathrm{PQ}=\sqrt{a^2-t^2}$であるから

$\triangle\mathrm{OPQ}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{PQ}$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}t\sqrt{a^2-t^2}}$$

$\angle\mathrm{BOP}=\theta$とおくと

扇形 $\mathrm{OPB}=\dfrac{1}{2}a^2\theta$

ここで，$\triangle\mathrm{OPQ}$において，$\angle\mathrm{OPQ}=\theta$であるから

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}} = \frac{t}{a}$$

よって，$\theta = \sin^{-1}\frac{t}{a}$

したがって，扇形 $\mathrm{OPB} = \boldsymbol{\frac{1}{2}a^2\sin^{-1}\frac{t}{a}}$

（２）与えられた定積分は，$\triangle$ OPQと扇形OPBの面積の和を表しているから

$$与式 = \frac{1}{2}t\sqrt{a^2-t^2} + \frac{1}{2}a^2\sin^{-1}\frac{t}{a}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}\left(t\sqrt{a^2-t^2} + a^2\sin^{-1}\frac{t}{a}\right)}$$