3章　積分法

§1　不定積分と定積分（p.82～p.98）

問1　Cは積分定数

（1）与式 $=\frac{1}{5+1}x^{5+1}+C$

$=\boldsymbol{\frac{1}{6}x^6+C}$

（2）与式 $=\int x^{-2}dx$

$=\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+C$

$=-x^{-1}+C$

$=\boldsymbol{-\frac{1}{x}+C}$

（3）与式 $=\int x^{-\frac{1}{2}}dx$

$=\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+C$

$=\frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+C$

$=\boldsymbol{2\sqrt{x}+C}$

問2　Cは積分定数

（1）与式 $=\int(2x^3+3x^2-2x+5)dx$

$=2\int x^3dx+3\int x^2dx-2\int x\,dx+5\int dx$

$=2\cdot\frac{1}{4}x^4+3\cdot\frac{1}{3}x^3-2\cdot\frac{1}{2}x^2+5x+C$

$=\boldsymbol{\frac{1}{2}x^4+x^3-x^2+5x+C}$

（2）与式 $=\int(3\cos x+4e^x)dx$

$=3\int\cos x\,dx+4\int e^xdx$

$=\boldsymbol{3\sin x+4e^x+C}$

（3）与式 $=\int\left(6\sin x+\frac{2}{x}\right)dx$

$=6\int\sin x\,dx+2\int\frac{1}{x}dx$

$=6\cdot(-\cos x)+2\log|x|+C$

$=\boldsymbol{-6\cos x+2\log|x|+C}$

（4）与式 $=\int\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$=\int x^2dx-2\int dx+\int x^{-2}dx$

$=\boldsymbol{\frac{1}{3}x^3-2x-\frac{1}{x}+C}$

問3　Cは積分定数

（1）$\int x^4dx=\frac{1}{5}x^5+C$より

与式 $=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}(4x+1)^5+C$

$=\boldsymbol{\frac{1}{20}(4x+1)^5+C}$

（2）$\int\sin x\,dx=-\cos x\,dx$より

与式 $=\frac{1}{3}\cdot(-\cos 3x)+C$

$=\boldsymbol{-\frac{1}{3}\cos 3x+C}$

（3）$\int e^xdx=e^x+C$より

与式 $=\boldsymbol{\frac{1}{5}e^{5x+2}+C}$

問4

（1）$x_k=\frac{k}{n}$，$\Delta x_k=\frac{1}{n}$ $(n=1,2,\ldots,n)$より

$S_\Delta=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k$

$=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2+n}{n^2}$

$=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

（２）$\Delta x_k \to 0$のとき，$n \to \infty$であるから

$$\int_0^1 x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}$$

問５

（１）与式 $= 3\int_0^1 x\,dx + \int_0^1 dx$

$$= 3\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot(1-0)$$

$$= \frac{3}{2} + 1 = \mathbf{\frac{5}{2}}$$

（２）与式 $= 5\int_0^1 x^2 dx + 3\int_0^1 x\,dx - 4\int_0^1 dx$

$$= 5\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot(1-0)$$

$$= \frac{5}{3} + \frac{3}{2} - 4$$

$$= \frac{10+9-24}{6} = \mathbf{-\frac{5}{6}}$$

問６

（１）$\int \cos x\,dx = \sin x + C$であるから

与式 $= \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0$$

$$= 1 - 0 = \mathbf{1}$$

（２）$\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx$

$$= \frac{3}{4}x^{\frac{1}{3}+1} + C$$

$$= \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + C$$

であるから

与式 $= \left[\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\right]_0^1$

$$= \frac{3}{4}\cdot 1\sqrt[3]{1} - 0 = \mathbf{\frac{3}{4}}$$

問７

（１）与式 $= 5\int_0^2 x^3 dx + 3\int_0^2 x^2 dx - 3\int_0^2 x\,dx - 2\int_0^2 dx$

$$= 5\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2 + 3\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 - 3\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 - 2\Big[x\Big]_0^2$$

$$= \frac{5}{4}\Big[x^4\Big]_0^2 + \Big[x^3\Big]_0^2 - \frac{3}{2}\Big[x^2\Big]_0^2 - 2\Big[x\Big]_0^2$$

$$= \frac{5}{4}(2^4-0) + (2^3-0) - \frac{3}{2}(2^2-0) - 2(2-0)$$

$$= 20 + 8 - 6 - 4 = \mathbf{18}$$

または

与式 $= \left[\frac{5}{4}x^4 + x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x\right]_0^2$

$$= \left(\frac{5}{4}\cdot 2^4 + 2^3 - \frac{3}{2}\cdot 2^2 - 2\cdot 2\right) - 0$$

$$= 20 + 8 - 6 - 4 = \mathbf{18}$$

（２）与式 $= \int_1^4 \left(x - 2 + \frac{1}{x}\right)$

$$= \int_1^4 x\,dx - 2\int_1^4 dx + \int_1^4 \frac{1}{x} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^4 - \Big[2x\Big]_1^4 + \Big[\log|x|\Big]_1^4$$

$$= \left(8 - \frac{1}{2}\right) - (8-2) + (\log 4 - \log 1)$$

$$= \frac{15}{2} - 6 + \log 2^2$$

$$= \mathbf{\frac{3}{2} + 2\log 2}$$

または

与式 $= \left[\frac{1}{2}x^2 - 2x + \log|x|\right]_1^4$

$$= (8 - 8 + \log|4|) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \log|1|\right)$$

$$= \log 2^2 - \frac{1}{2} + 2$$

$$= \mathbf{\frac{3}{2} + 2\log 2}$$

（３）与式 $= 3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin x\,dx - 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos x\,dx$

$$= 3\Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} - 2\Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$

$$= -3\left(\cos\frac{5\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}\right) - 2\left(\sin\frac{5\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= -3(-\sqrt{2}) - 2(-\sqrt{2})$$

$$= 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = \mathbf{5\sqrt{2}}$$

または

$$与式 = \Big[-3\cos x - 2\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$

$$= \left(-3\cos\frac{5\pi}{4} - 2\sin\frac{5}{4}\pi\right) - \left(-3\cos\frac{\pi}{4} - 2\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \left(3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{5\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) = \mathbf{5\sqrt{2}}$$

（4）$与式 = \int_{-2}^{2} e^x dx + \int_{-2}^{2} e^{-x} dx$

$$= \Big[e^x\Big]_{-2}^{2} + \Big[-e^{-x}\Big]_{-2}^{2}$$

$$= (e^2 - e^{-2}) + \{-e^{-2} - (-e^2)\}$$

$$= 2e^2 - 2e^{-2}$$

$$= \mathbf{2\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)}$$

または

$$与式 = \Big[e^x - e^{-x}\Big]_{-2}^{2}$$

$$= (e^2 - e^{-2}) - (e^{-2} - e^2)$$

$$= 2e^2 - 2e^{-2}$$

$$= \mathbf{2\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)}$$

問 8

（1）x^3，xは奇関数，x^2，5は偶関数であるから

$$与式 = 2\int_0^1 (-3x^2 + 5)dx$$

$$= 2\Big[-x^3 + 5x\Big]_0^1$$

$$= 2\{(-1 + 5) - 0\} = \mathbf{8}$$

（2）$\sin x$は奇関数，$\cos x$は偶関数であるから

$$与式 = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x\, dx$$

$$= 2\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

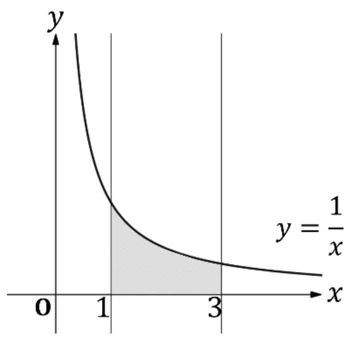
$$= 2\left(\sin\frac{\pi}{3} - \sin 0\right)$$

$$= 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{\sqrt{3}}$$

問 9

（1）区間[1，3]において，$\frac{1}{x} > 0$ であるから，

求める図形の面積をSとすると



$$S = \int_1^3 \frac{1}{x} dx$$

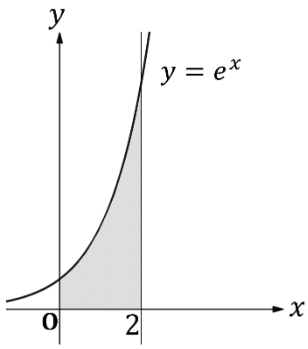
$$= \Big[\log|x|\Big]_1^3$$

$$= \log|3| - \log|1|$$

$$= \log 3 - 0 = \mathbf{\log 3}$$

（2）区間[0，2]において，$e^x > 0$であるから，

求める図形の面積をSとすると



$$S = \int_0^2 e^x dx$$

$$= \Big[e^x\Big]_0^2$$

$$= e^2 - e^0 = \mathbf{e^2 - 1}$$

問 10

曲線とx軸の交点を求めると

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x - 3) = 0$$

よって，$x = 0$，3

区間[0，3]において，$x^2 - 3x \leqq 0$であるから，

求める図形の面積をSとすると

$$S = -\int_0^3 (x^2 - 3x)\, dx$$

$$= -\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_0^3$$

$$= -\left(9 - \frac{27}{2}\right)$$

$$= -\left(-\frac{9}{2}\right) = \mathbf{\frac{9}{2}}$$

問 11　Cは積分定数

（１）与式 $= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx$

$$= \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx$$

$$= \boldsymbol{-\cot x - x + C}$$

（２）与式 $= \int \left(\frac{2}{\cos^2 x} + 5\cos x\right) dx$

$$= \boldsymbol{2\tan x + 5\sin x + C}$$

問 12　Cは積分定数

（１）与式 $= \int \frac{dx}{\sqrt{4^2 - x^2}} dx$

$$= \boldsymbol{\sin^{-1}\frac{x}{4} + C}$$

（２）与式 $= \boldsymbol{\log\left|x + \sqrt{x^2 - 16}\right| + C}$

（３）与式 $= \int \frac{(x^2 + 1) + 2}{x^2 + 1} dx$

$$= \int \left(1 + \frac{2}{x^2 + 1}\right) dx$$

$$= \boldsymbol{x + 2\tan^{-1} x + C}$$

問 13

（１）与式 $= \left[\log\left|x + \sqrt{x^2 + 7}\right|\right]_0^3$

$$= \log\left|3 + \sqrt{3^2 + 7}\right| - \log\left|0 + \sqrt{0 + 7}\right|$$

$$= \log\left(3 + \sqrt{16}\right) - \log\sqrt{7}$$

$$= \log 7 - \log\sqrt{7}$$

$$= \log\frac{7}{\sqrt{7}} = \boldsymbol{\log\sqrt{7}}$$

（２）与式 $= \int_{-\sqrt{3}}^{3} \frac{dx}{x^2 + 3^2}$

$$= \left[\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{3}\right]_{-\sqrt{3}}^{3}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\tan^{-1} 1 - \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left\{\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{12}\pi = \boldsymbol{\frac{5}{36}\pi}$$