練習問題 2-A

1.

（１）定義域は$x > 0$

$$y' = \frac{1 \cdot \sqrt{x} - (x+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}$$ 分子分母に $2\sqrt{x}$をかける

$$= \frac{2x - x - 1}{2x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$$

$$y'' = \frac{1 \cdot 2x^{\frac{3}{2}} - (x-1) \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}}{\left(2x^{\frac{3}{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{2x\sqrt{x} - 3x\sqrt{x} + 3\sqrt{x}}{4x^3}$$

$$= \frac{-x\sqrt{x} + 3\sqrt{x}}{4x^3}$$

$$= \frac{-\sqrt{x}(x-3)}{4x^3}$$

$y' = 0$とすると，$x = 1$

$y'' = 0$とすると，$x = 3$

$x = 1$のときのyの値は

$$y = \frac{1+1}{\sqrt{1}} = 2$$

$x = 3$のときのyの値は

$$y = \frac{3+1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

yの増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$	$+$	$+$
y''		$+$	$+$	$+$	0	$-$
y		↘	2	↗	$\frac{4}{\sqrt{3}}$	↗

よって

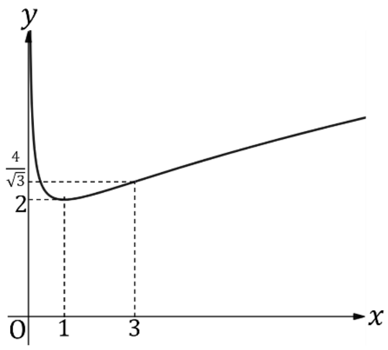
極大値　なし

極小値　2　($x = 1$)

変曲点　$\left(3,\ \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$

ここで，$\displaystyle\lim_{x \to +0} \frac{x+1}{\sqrt{x}} = \infty$であるから

$x = 0$（y軸）が漸近線になる．



（２）$y' = 1 - 2\cos x \quad (0 < x < 2\pi)$

$y'' = -2 \cdot (-\sin x)$

$\quad = 2\sin x \quad (0 < x < 2\pi)$

$y' = 0$とすると，

$\cos x = \frac{1}{2}$より，$x = \frac{\pi}{3}$，$\frac{5\pi}{3}$

$y'' = 0$とすると，$(0 < x < 2\pi)$において，$x = \pi$

$x = 0$のときのyの値は

$y = 0 - 2\sin 0 = 0$

$x = \frac{\pi}{3}$のときのyの値は

$$y = \frac{\pi}{3} - 2\sin\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\pi}{3} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$$

$x = \pi$のときのyの値は

$y = \pi - 2\sin\pi = \pi$

$x = \frac{5\pi}{3}$のときのyの値は

$$y = \frac{5\pi}{3} - 2\sin\frac{5\pi}{3}$$

$$= \frac{5\pi}{3} - 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3}$$

$x = 2\pi$のときのyの値は

$y = 2\pi - 2\sin 2\pi = 2\pi$

yの増減表は次のようになる．

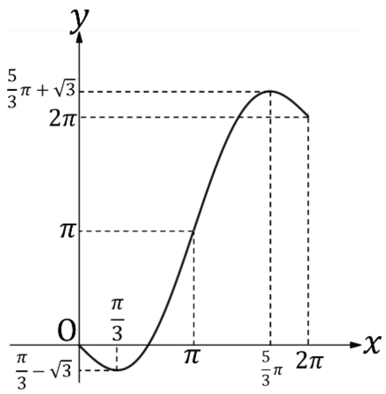
x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5\pi}{3}$	$\cdots$	2π
y'		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
y''		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
y	0	↘	$\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$	↗	π	↗	$\frac{5\pi}{3}+\sqrt{3}$	↘	2π

よって

極大値　$\boldsymbol{\frac{5\pi}{3}+\sqrt{3}}$　$\boldsymbol{\left(x=\frac{5\pi}{3}\right)}$

極小値　$\boldsymbol{\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}}$　$\boldsymbol{\left(x=\frac{\pi}{3}\right)}$

変曲点　$\boldsymbol{(\pi,\ \pi)}$



（3）$y'=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

$$y''=\frac{-2\cdot(x^2+1)^2-(-2x)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{\{(x^2+1)^2\}^2}$$

$$=\frac{-2(x^2+1)^2+8x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{-2(x^2+1)+8x^2}{(x^2+1)^3}$$

$$=\frac{-2x^2-2+8x^2}{(x^2+1)^3}$$

$$=\frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

$$=\frac{6\left(x^2-\frac{1}{3}\right)}{(x^2+1)^3}$$

$y'=0$とすると，$x=0$

$y''=0$ とすると，$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$のときのyの値は

$$y=\frac{1}{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{3}+1}$$

$$=\frac{3}{4}$$

$x=0$のときのyの値は

$$y=\frac{1}{0+1}=1$$

$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$のときのyの値は

$$y=\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{3}+1}$$

$$=\frac{3}{4}$$

yの増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↗	$\frac{3}{4}$	↗	1	↘	$\frac{3}{4}$	↘

よって

極大値　$\boldsymbol{1}$　$\boldsymbol{(x=0)}$

極小値　**なし**

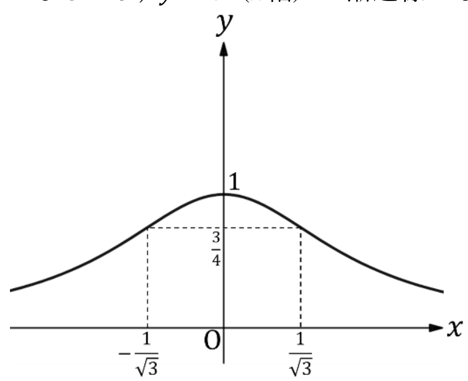
変曲点　$\boldsymbol{\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{3}{4}\right)}$

ここで，

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$$

となるから，$y=0$（x軸）が漸近線となる．



（4）$y'=e^x\cos x+e^x\cdot(-\sin x)$

$$=e^x(\cos x-\sin x)\quad\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = e^x(\cos x - \sin x) + e^x(-\sin x - \cos x)$$
$$= e^x(\cos x - \sin x - \sin x - \cos x)$$
$$= -2e^x \sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$y' = 0$とすると，$\cos x = \sin x$より，

$$x = \frac{\pi}{4}$$

$y'' = 0$とすると，$\sin x = 0$より，$x = 0$

$x = -\dfrac{\pi}{2}$のときのyの値は

$$y = e^{-\frac{\pi}{2}} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$x = 0$のときのyの値は

$$y = e^0 \cos 0 = 1 \cdot 1 = 1$$

$x = \dfrac{\pi}{4}$のときのyの値は

$$y = e^{\frac{\pi}{4}} \cos\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{4}}$$

$x = \dfrac{\pi}{2}$のときのyの値は

$$y = e^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

yの増減表は次のようになる．

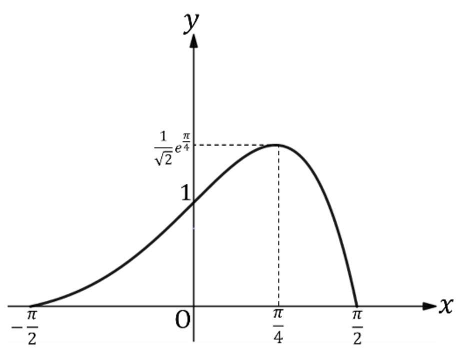
x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
y'		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
y''		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
y	0	↗	1	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}$	↘	0

よって

極大値　$\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{4}} \quad \left(x = \dfrac{\pi}{4}\right)}$

極小値　なし

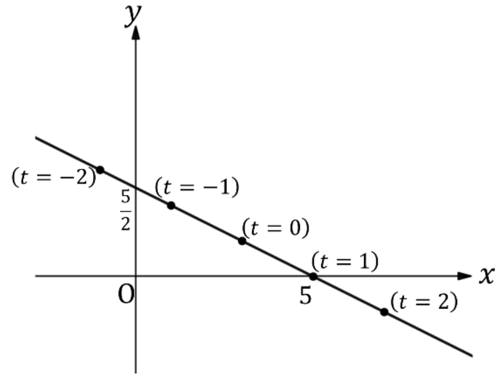
変曲点　$(\mathbf{0},\ \mathbf{1})$



2. tの値を代入して，表を埋める．

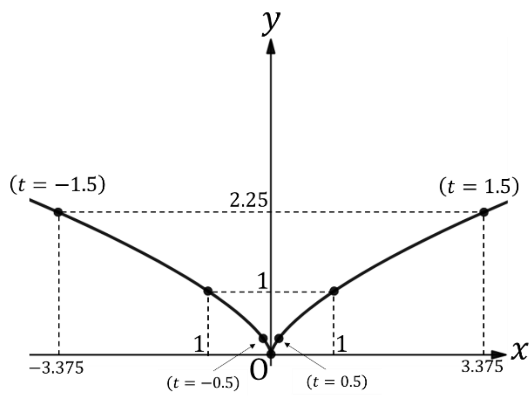
（１）

t	-2	-1	0	1	2
x	-1	1	3	5	7
y	3	2	1	0	-1



（２）

t	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5
x	-3.375	-1	-0.125	0	0.125	1	3.375
y	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25



3.

（１）$\dfrac{dx}{dt} = 4t - 3$

$$\frac{dy}{dt} = 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \boldsymbol{\frac{5}{4t - 3}}$$

（２）$\dfrac{dx}{dt} = -3\sin t$

$$\frac{dy}{dt} = 3\sin^2 t \cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3\sin^2 t \cos t}{-3\sin t} = \boldsymbol{-\sin t \cos t}$$

（３）$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{1+t^2}$

$$\frac{dy}{dt}=e^{-t^2}\cdot(-2t)=-2te^{-t^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-2te^{-t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}$$

$$=-\frac{-2te^{-t^2}\cdot(1+t^2)}{1}$$

$$=\boldsymbol{-2t(1+t^2)e^{-t^2}}$$

（４）$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t}$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{-2t}{(1+t^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{-2t}{(1+t^2)^2}}{\frac{1}{t}}$$

$$=-\boldsymbol{\frac{2t^2}{(1+t^2)^2}}$$

4.

（１）$t=1$のとき

$x=1^3+1=2$

$y=1\cdot e^1=e$

また，

$$\frac{dx}{dt}=3t^2,\ \frac{dy}{dt}=1\cdot e^t+te^t=e^t(1+t)$$

したがって

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t(1+t)}{3t^2}$$

$t=1$のとき

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^1(1+1)}{3\cdot1^2}=\frac{2e}{3}$$

したがって，求める接線の方程式は

$$y-e=\frac{2e}{3}(x-2)$$

$$y=\frac{2e}{3}x-\frac{4}{3}e+e$$

$$\boldsymbol{y=\frac{2e}{3}x-\frac{e}{3}}$$

（２）$t=\dfrac{\pi}{4}$のとき

$$x=2\cos\frac{\pi}{4}+1=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+1=1+\sqrt{2}$$

$$y=\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

また，

$$\frac{dx}{dt}=-2\sin t$$

$$\frac{dy}{dt}=3\cos 3t$$

したがって

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3\cos 3t}{-2\sin t}=-\frac{3\cos 3t}{2\sin t}$$

$t=\dfrac{\pi}{4}$のとき

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3\cos\frac{3\pi}{4}}{2\sin\frac{\pi}{4}}$$

$$=-\frac{3\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{3}{2}$$

したがって，求める接線の方程式は

$$y-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3}{2}\left(x-1-\sqrt{2}\right)$$

$$y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}-\frac{2\sqrt{2}}{2}$$

$$\boldsymbol{y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}-\sqrt{2}}$$

5.

時刻tにおける動点Pの速度をvとすると

$$v=\frac{dx}{dt}=-a\omega\sin\omega t+b\omega\cos\omega t$$

時刻tにおける動点Pの加速度をαとすると

$$\alpha=\frac{dv}{dt}=-a\omega^2\cos\omega t-b\omega^2\sin\omega t$$

$$=-\omega^2(a\cos\omega t+b\sin\omega t)$$

$= -\omega^2 x$

よって，加速度αはxに比例する．

練習問題 2-B

1.

（１）$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$であるから

$$左辺 = (1+x^2)\cdot\frac{1}{1+x^2} = 1 = 右辺$$

（２）（１）の両辺をn回微分すると

$$(1+x^2)y^{(n+1)} + {}_n\mathrm{C}_1(1+x^2)'y^{(n)} + {}_n\mathrm{C}_2(1+x^2)''y^{(n-1)}$$
$$+{}_n\mathrm{C}_3(1+x^2)'''y^{(n-2)} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n(1+x^2)^{(n+1)}y' = 1'$$

$$(1+x^2)y^{(n+1)} + n\cdot 2xy^{(n)} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 2y^{(n-1)} + 0 + \cdots + 0 = 1'$$

よって

$$(1+x^2)y^{(n+1)} + 2nxy^{(n)} + n(n-1)y^{(n-1)} = 0$$

2.

（１）$\dfrac{dx}{dt} = -a\sin t$，$\dfrac{dy}{dt} = b\cos t$

したがって

$$左辺 = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b\cos t}{a\sin t}$$

$$右辺 = -\frac{b^2\cdot a\cos t}{a^2\cdot b\sin t} = -\frac{b\cos t}{a\sin t}$$

よって，左辺=右辺

（２）（１）より点$(x_0，y_0)$における接線の傾きは，

$-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$であるから，接線の方程式は

$$y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0)$$

$$a^2y_0(y-y_0) = -b^2x_0(x-x_0)$$
$$a^2y_0y - a^2{y_0}^2 = -b^2x_0x + b^2{x_0}^2$$
$$b^2x_0x + a^2y_0y = b^2{x_0}^2 + a^2{y_0}^2$$

$$\frac{b^2x_0x + a^2y_0y}{a^2b^2} = \frac{b^2{x_0}^2 + a^2{y_0}^2}{a^2b^2} \quad （a\neq 0,\ b\neq 0 より）$$

$$\frac{b^2x_0x}{a^2b^2} + \frac{a^2y_0y}{a^2b^2} = \frac{b^2{x_0}^2}{a^2b^2} + \frac{a^2{y_0}^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = \frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{{y_0}^2}{b^2}$$

ここで，$(x_0，y_0)$は楕円上の点であるから，

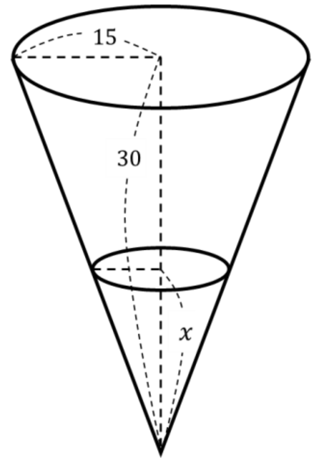
問題文より

$$\frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{{y_0}^2}{b^2} = 1$$

よって，$\dfrac{x_0x}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} = 1$

3.

時刻tにおける水の深さをx(cm)，体積をV(cm³)とする．



容器と水の入った部分の円錐形は，相似の関係に

あるので，水面の半径をrとすると，

$$15 : r = 30 : x$$
$$30r = 15x$$
$$r = \frac{1}{2}x$$

よって，

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 x = \frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{1}{2}x\right)^2\cdot x = \frac{1}{12}\pi x^3$$

すなわち，$V = \dfrac{1}{12}\pi x^3$

この両辺をtで微分すると，

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{12}\pi x^3\right)$$
$$= \frac{1}{12}\cdot 3\pi x^2\frac{dx}{dt}$$
$$= \frac{1}{4}\pi x^2\frac{dx}{dt}$$

ここで，水面が上昇する速さは，$\dfrac{dx}{dt}$であり，

毎分20cm³の割合で水を入れるので，

$\dfrac{dV}{dt} = 20$ であるから，$\dfrac{1}{4}\pi x^2\dfrac{dx}{dt} = 20 \to \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{80}{\pi x^2}$

以上より，水の深さが10cmのときの水面が

上昇する速さは，$x=10$を代入して

$$\frac{dx}{dt}=\frac{80}{\pi\cdot 10^2}=\frac{80}{100\pi}=\frac{4}{5\pi}$$

よって，

$$\boldsymbol{\frac{4}{5\pi}}\ \textbf{（cm/分）}$$

4.

（１）P$(x,\ 0)$，Q$(0,\ 50-5t)$，$\mathrm{OP}^2+\mathrm{OQ}^2=\mathrm{PQ}^2$であるから，

$$x^2+(50-5t)^2=100^2$$

これより

$$\begin{aligned}x^2&=100^2-(50-5t)^2\\&=10000-2500+500t-25t^2\\&=7500+500t-25t^2\end{aligned}$$

$x>0$より

$$\begin{aligned}x&=\sqrt{7500+500t-25t^2}\\&=\sqrt{25(300+20t-t^2)}\\&=\boldsymbol{5\sqrt{300+20t-t^2}}\end{aligned}$$

（２）t秒後の点Pの速度をvとすると

$$\begin{aligned}v&=\frac{dx}{dt}\\&=5\cdot\frac{1}{2}(300+20t-t^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(300+20t-t^2)'\\&=\frac{5(20-2t)}{2\sqrt{300+20t-t^2}}\\&=\boldsymbol{\frac{50-5t}{\sqrt{300+20t-t^2}}}\end{aligned}$$