２章　微分の応用

§２　いろいろな応用（p.62～p.77）

問１

（１）$y = x^{\frac{2}{3}}$

$$y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$y'' = \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}}$$

$$= \boldsymbol{-\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}}$$

$$= -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

$$= \boldsymbol{-\frac{2}{9x\sqrt[3]{x}}}$$

（２）$y' = 5(3x+4)^4\cdot(3x+4)'$

$$= 15(3x+4)^4$$

$$y'' = 15\cdot 4(3x+4)^3\cdot(3x+4)'$$

$$= \boldsymbol{180(3x+4)^3}$$

（３）$y' = 1\cdot e^x + xe^x$

$$= e^x + xe^x$$

$$y'' = e^x + e^x + xe^x$$

$$= \boldsymbol{(x+2)e^x}$$

問２

（１）$y' = e^{3x}\cdot 3$

$$= 3e^{3x}$$

$$y'' = 3e^{3x}\cdot 3$$

$$= 3^2e^{3x}$$

$$y''' = 3^2e^{3x}\cdot 3$$

$$= 3^3e^{3x}$$

$$y^{(4)} = 3^3e^{3x}\cdot 3$$

$$= 3^4e^{3x}$$

よって，$y^{(n)} = \boldsymbol{3^ne^{3x}}$

（２）$y = (1-x)^{-1}$とする．

$$y' = -(1-x)^{-2}\cdot(-1)$$

$$= (1-x)^{-2}$$

$$y'' = -2(1-x)^{-3}\cdot(-1)$$

$$= 2(1-x)^{-3}$$

$$y''' = 2\cdot(-3)\cdot(1-x)^{-4}\cdot(-1)$$

$$= 3\cdot 2(1-x)^{-4}$$

$$y^{(4)} = 3\cdot 2\cdot(-4)\cdot(1-x)^{-5}\cdot(-1)$$

$$= 4\cdot 3\cdot 2(1-x)^{-5}$$

$$= \frac{4!}{(1-x)^5}$$

よって，$y^{(n)} = \boldsymbol{\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}}$

問３

$$y^{(4)} = (x^3)^{(4)}\cos x + {}_4\mathrm{C}_1(x^3)'''(\cos x)' + {}_4\mathrm{C}_2(x^3)''(\cos x)''$$
$$+{}_4\mathrm{C}_3(x^3)'(\cos x)''' + x^3(\cos x)^{(4)}$$

$$= 0\cdot\cos x + \frac{4}{1}\cdot 6\cdot(-\sin x) + \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\cdot 6x\cdot(-\cos x)$$
$$+\frac{4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 3x^2\sin x + x^3\cos x$$

$$= \boldsymbol{-24\sin x - 36x\cos x + 12x^2\sin x + x^3\cos x}$$

問４

（１）$y' = 3x^2 - 3$

$$= 3(x^2-1)$$

$$= 3(x+1)(x-1)$$

$y'' = 6x$

$y' = 0$とすると，$x = \pm 1$

$y'' = 0$とすると，$x = 0$

$x = -1$のときのyの値は

$y = (-1)^3 - 3\cdot(-1)$

$= -1 + 3$

$= 2$

$x = 0$のときのyの値は

$y = 0$

$x = 1$のときのyの値は

$y = 1^3 - 3\cdot 1$

$= 1 - 3$

$= -2$

yの増減表は次のようになる．

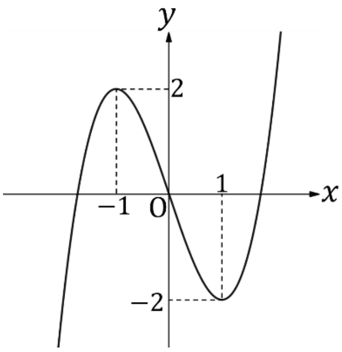
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	↗	2	↘	0	↘	-2	↗

よって

極大値　2　($x = -1$)

極小値　−2　($x = 1$)

変曲点　(0，0)



（2）$y' = 4x^3 - 12x^2$

$= 4x^2(x-3)$

$y'' = 12x^2 - 24x$

$= 12x(x-2)$

$y' = 0$とすると，$x = 0$，3

$y'' = 0$とすると，$x = 0$，2

$x = 0$のときのyの値は

$y = 0$

$x = 2$のときのyの値は

$y = 2^4 - 4 \cdot 2^3$

$= 16 - 32$

$= -16$

$x = 3$のときのyの値は

$y = 3^4 - 4 \cdot 3^3$

$= 81 - 108$

$= -27$

yの増減表は次のようになる．

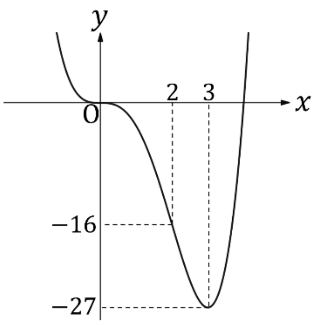
x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	↘	0	↘	-16	↘	-27	↗

よって

極大値　なし

極小値　−27　($x = 3$)

変曲点　(0，0)，(2，−16)



$\boxed{問5}$　$y = f(x)$とする．

$$y' = \frac{1 \cdot e^x - xe^x}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{1-x}{e^x}$$

$$y'' = \frac{-1 \cdot e^x - (1-x)e^x}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{-1-1+x}{e^x}$$

$$= \frac{x-2}{e^x}$$

$y' = 0$とすると，$x = 1$

$y'' = 0$とすると，$x = 2$

$x = 1$のときのyの値は

$$y = \frac{1}{e}$$

$x = 2$のときのyの値は

$$y = \frac{2}{e^2}$$

yの増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{2}{e^2}$	↘

よって

極大値　$\boldsymbol{\frac{1}{e}}$　**($x = 1$)**

極小値　なし

変曲点　$\boldsymbol{\left(2,\ \frac{2}{e^2}\right)}$

（2）与式は$\frac{\infty}{\infty}$の不定形である．

$$与式 = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x}$$

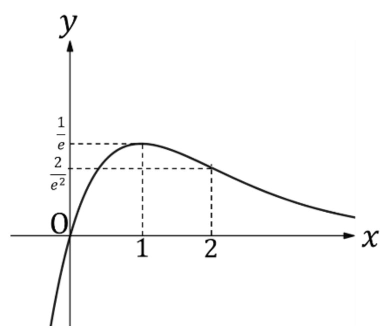
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x)'}{(e^x)'}$$　※ロピタルの定理

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x}$$

$$= \frac{1}{\infty}$$

$$= \mathbf{0}$$

よって，$y = 0$（x軸）が漸近線となる．



$\boxed{問6}$　$y = f(x)$とする．

定義域は，真数条件より，$x > 0$

$$y' = 1 \cdot (\log x)^2 + x \cdot 2\log x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= (\log x)^2 + 2\log x$$

$$= \log x\,(\log x + 2)$$

$$y'' = 2\log x \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{2}{x}(\log x + 1)$$

$y' = 0$ とすると，$x = 1,\ \frac{1}{e^2}$

$y'' = 0$ とすると，$x = \frac{1}{e}$

$x = \frac{1}{e^2}$のときのyの値は

$$y = \frac{1}{e^2}\left(\log\frac{1}{e^2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{e^2}(\log e^{-2})^2$$

$$= \frac{1}{e^2} \cdot (-2)^2$$

$$= \frac{4}{e^2}$$

$x = \frac{1}{e}$のときのyの値は

$$y = \frac{1}{e}\left(\log\frac{1}{e}\right)^2$$

$$= \frac{1}{e}(\log e^{-1})^2$$

$$= \frac{1}{e} \cdot (-1)^2$$

$$= \frac{1}{e}$$

$x = 1$のときのyの値は

$y = 1 \cdot (\log 1)^2 = 0$

yの増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e^2}$	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y		↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	$\frac{1}{e}$	↘	0	↗

よって

極大値　$\boldsymbol{\frac{4}{e^2}}$　$\left(\boldsymbol{x = \frac{1}{e^2}}\right)$

極小値　$\mathbf{0}$　$(\boldsymbol{x = 1})$

変曲点　$\left(\boldsymbol{\frac{1}{e}},\ \boldsymbol{\frac{1}{e}}\right)$

$y = \dfrac{(\log x)^2}{\frac{1}{x}}$と変形し，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{(\log x)^2}{\frac{1}{x}}$求める．

これは$\frac{\infty}{\infty}$であるから，ロピタルの定理を用いて

$$\lim_{x\to+0}\frac{(\log x)^2}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0}\frac{\{(\log x)^2\}'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{2\log x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{2\log x}{-\frac{1}{x}}\quad ※ここでも\frac{-\infty}{-\infty}の不定形$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{(2\log x)'}{\left(-\frac{1}{x}\right)'}$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{2 \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}$$

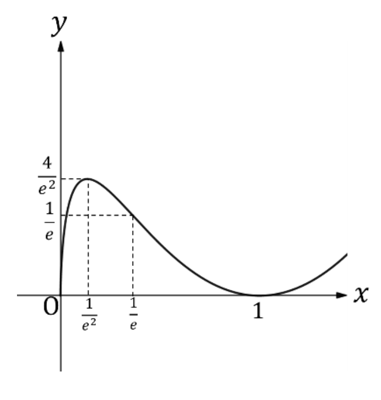
$$= \lim_{x\to+0}\frac{2}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+0} 2x$$

$$= 0$$

よって，この関数は，$x = 0$（y軸）に漸近し，

$x \to +0$としたとき$y = 0$に限りなく近づく．

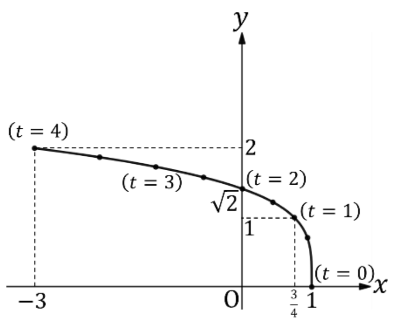


問 7

tの値を代入して表を埋める.

t	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
x	1	0.94	0.75	0.44	0	−0.56	−1.25	−2.06	−3
y	0	0.71	1	1.22	$\sqrt{2}$	1.58	1.73	1.87	2

表をもとにグラフの概形をかく.



問 8

$$左辺 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$$

$$= \frac{(3\cos t)^2}{9} + \frac{(2\sin t)^2}{4}$$

$$= \frac{9\cos^2 t}{9} + \frac{4\sin^2 t}{4}$$

$$= \cos^2 t + \sin^2 t$$

$$= 1 = 右辺$$

問 9

（１）$\dfrac{dx}{dt} = 2\cdot 3\cos^2 t\cdot(-\sin t) = -6\cos^2 t\sin t$

$$\frac{dy}{dt} = 2\cdot 3\sin^2 t\cdot\cos t = 6\sin^2 t\cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{6\sin^2 t\cos t}{-6\cos^2 t\sin t} = -\frac{\sin t}{\cos t} = \boldsymbol{-\tan t}$$

ただし，$-6\cos^2 t\sin t \neq 0$より

$\cos^2 t \neq 0$かつ$\sin t \neq 0$

したがって，$\boldsymbol{t \neq \frac{n}{2}\pi}$ **（$\boldsymbol{n}$は整数）**

（２）$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{e^t + e^{-t}\cdot(-1)}{2} = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{e^t - e^{-t}\cdot(-1)}{2} = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{e^t + e^{-t}}{2}}{\frac{e^t - e^{-t}}{2}} = \boldsymbol{\frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}}}$$

ただし，$\dfrac{e^t - e^{-t}}{2} \neq 0$ より，$\boldsymbol{t \neq 0}$

問 10

（１）$t = 1$のとき

$$x = 3 - 1^2 = 2$$

$$y = 1 - 1 = 0$$

よって，$t = 1$に対応する点は，$\boldsymbol{(2,\ 0)}$

また，$\dfrac{dx}{dt} = -2t$，$\dfrac{dy}{dt} = 1$ であるから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{-2t}$$

$t = 1$ のとき，$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2}$

したがって，求める接線の方程式は

$$y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

$$\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x + 1}$$

（２）$t = \dfrac{\pi}{3}$のとき

$$x = 2\sin\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$y = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

よって，$t = \dfrac{\pi}{3}$に対応する点は，$\boldsymbol{\left(\sqrt{3},\ -\frac{1}{2}\right)}$

また，$\dfrac{dx}{dt} = 2\cos t$，$\dfrac{dy}{dt} = -2\sin 2t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2\sin 2t}{2\cos t} = -\frac{\sin 2t}{\cos t}$$

ただし，$2\cos t \neq 0$ より，$t = \dfrac{2n+1}{2}\pi$（nは整数）

$t = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

したがって，求める接線の方程式は

$$y-\left(-\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{3}\left(x-\sqrt{3}\right)$$

$$y=-\sqrt{3}x+3-\frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{y=-\sqrt{3}x+\frac{5}{2}}$$

$\boxed{\text{問 11}}$

（１）$v(t)=\dfrac{dy}{dt}=\boldsymbol{-9.8t+29.4}\ \ (\mathbf{m/s})$

$\alpha(t)=\dfrac{dv}{dt}=\boldsymbol{-9.8}\ \ (\mathbf{m/s^2})$

（２）最高の高さに達するのは，$v(t)=0$のとき

であるから，$-9.8t+29.4=0$を解いて

$t=3$

このとき，高さyは

$$\begin{aligned} y &= -4.9\cdot 3^2+29.4\cdot 3+1.8 \\ &= -44.1+88.2+1.8 \\ &= 45.9 \end{aligned}$$

よって，**時間は3秒**，**高さは45.9m**