練習問題 1-A

1.

$y=f(x)$とする.

$f'(x)=3x^2+2$

よって

$f(1)=1^3+2\cdot 1=3$

$f'(1)=3\cdot 1^2+2=5$

したがって，$x=1$における接線の方程式は

$y-f(1)=f'(1)(x-1)$

$y-3=5x-5$

$\boldsymbol{y=5x-2}$

また，$x=1$における法線の方程式は

$$y-f(1)=-\frac{1}{f'(1)}(x-1)$$

$$y-3=-\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}$$

$$\boldsymbol{y=-\frac{1}{5}x+\frac{16}{5}}$$

2.

（１）$y'=12x^5-36x^3$

$=12x^3(x^2-3)$

$y'=0$とすると，$x=0,\ \pm\sqrt{3}$

$x=-\sqrt{3}$のときのyの値は

$y=2\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^6-9\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^4+10$

$=2\cdot 27-9\cdot 9+10$

$=54-81+10=-17$

$x=0$のときのyの値は

$y=10$

$x=\sqrt{3}$のときのyの値は

$y=2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^6-9\cdot\left(\sqrt{3}\right)^4+10$

$=2\cdot 27-9\cdot 9+10$

$=54-81+10=-17$

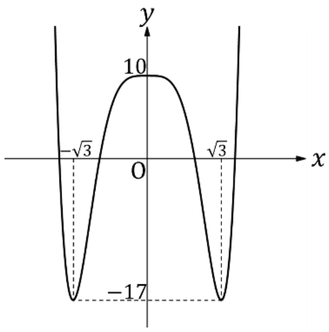
yの増減表は次のようになる.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	-17	↗	10	↘	-17	↗

よって

極大値　10　$(\boldsymbol{x=0})$

極小値　-17　$(\boldsymbol{x=\pm\sqrt{3}})$



（２）$y'=3\sin^2 x\cdot(\sin x)'$

$=3\sin^2 x\cos x\quad(0<x<2\pi)$

$y'=0$とすると，$\sin x=0$または$\cos x=0$

よって，$x=\dfrac{\pi}{2}$，π，$\dfrac{3}{2}\pi$

$x=0$のときのyの値は

$y=\sin^3 0=0$

$x=\dfrac{\pi}{2}$のときyの値は

$y=\sin^3\dfrac{\pi}{2}=1$

$x=\pi$のときのyの値は

$y=\sin^3\pi=0$

$x=\dfrac{3}{2}\pi$のときyの値は

$y=\sin^3\dfrac{3}{2}\pi$

$=(-1)^3=-1$

$x=2\pi$のときのyの値は

$y=\sin^3 2\pi=0$

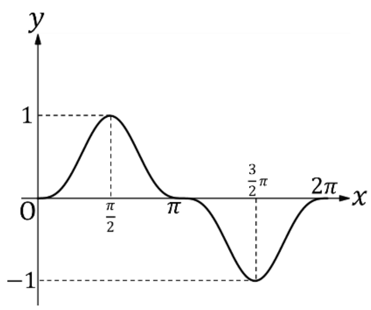
yの増減表は次のようになる.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0

よって

極大値　1　$\left(\boldsymbol{x=\frac{\pi}{2}}\right)$

極小値　-1　$\left(\boldsymbol{x=\frac{3}{2}\pi}\right)$



3.

（１）$y' = 15x^4 - 15x^2$

$= 15x^2(x+1)(x-1)$

$y' = 0$とすると，$x = 0,\ \pm 1$

$x = -2$のときのyの値は

$y = 3\cdot(-2)^5 - 5\cdot(-2)^3 + 1$

$= -96 + 40 + 1$

$= -55$

$x = -1$のときのyの値は

$y = 3\cdot(-1)^5 - 5\cdot(-1)^3 + 1$

$= -3 + 5 + 1$

$= 3$

$x = 0$のときのyの値は

$y = 1$

$x = 1$のときのyの値は

$y = 3\cdot 1^5 - 5\cdot 1^3 + 1$

$= 3 - 5 + 1$

$= -1$

yの増減表は次のようになる．

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	
y	-55	↗	3	↘	1	↘	-1

よって

最大値　3　($x = -1$)

最小値　−55　($x = -2$)

（２）$y' = 2x - \dfrac{8}{x}$

$= \dfrac{2x^2 - 8}{x}$

$= \dfrac{2(x^2 - 4)}{x}$

$= \dfrac{2(x+2)(x-2)}{x}$

$y' = 0$とすると，$x = \pm 2$

$x = -2$は変域の外なので考えない．

$x = 1$のときのyの値は

$y = 1^2 - 8\log 1 = 1$

$x = 2$のときのyの値は

$y = 2^2 - 8\log 2$

$= 4 - 8\log 2$

$x = e$のときのyの値は

$y = e^2 - 8\log e$

$= e^2 - 8$

yの増減表は次のようになる．

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	e
y'		$-$	0	$+$	
y	1	↘	$4 - 8\log 2$	↗	$e^2 - 8$

よって

最大値　1　($x = 1$)

最小値　$4 - 8\log 2$　($x = 2$)

（３）$y' = 2\cos x - \sqrt{3}$　$(0 < x < 2\pi)$

$y' = 0$とすると，

$\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{11}{6}\pi$

$x = 0$のときのyの値は

$y = 2\sin 0 + 0 = 0$

$x = \dfrac{\pi}{6}$のときのyの値は

$y = 2\sin\dfrac{\pi}{6} - \sqrt{3}\cdot\dfrac{\pi}{6}$

$= 2\cdot\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi$

$= 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi$

$x = \dfrac{11}{6}\pi$のときのyの値は

$y = 2\sin\dfrac{11}{6}\pi - \sqrt{3}\cdot\dfrac{11}{6}\pi$

$= 2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{11\sqrt{3}}{6}\pi$

$= -1 - \dfrac{11\sqrt{3}}{6}\pi$

$x = 2\pi$のときのyの値は

$y = 2\sin 2\pi - \sqrt{3}\cdot 2\pi$

$= -2\sqrt{3}\pi$

yの増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{11}{6}\pi$	$\cdots$	2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	↗	$1-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$	↘	$-1-\frac{11\sqrt{3}}{6}\pi$	↗	$-2\sqrt{3}\pi$

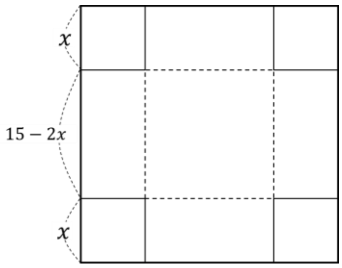
よって

最大値　$\boldsymbol{1-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi}$　$\boldsymbol{\left(x=\frac{\pi}{6}\right)}$

最小値　$\boldsymbol{-1-\frac{11\sqrt{3}}{6}\pi}$　$\boldsymbol{\left(x=\frac{11}{6}\pi\right)}$

4.

（１）



底面になる正方形の１辺の長さは，$15-2x$[cm]

また，容器の高さはx[cm]であるから

$\boldsymbol{V=x(15-2x)^2}$

また，$x>0$，$15-2x>0$ より，$\boldsymbol{0<x<\frac{15}{2}}$

（２）$V'=1\cdot(15-2x)^2+x\cdot 2\cdot(15-2x)\cdot(-2)$

$=(15-2x)^2-4x(15-2x)$

$=(15-2x)(15-2x-4x)$

$=(15-2x)(15-6x)$

$=3(15-2x)(5-2x)$

$V'=0$ とすると，$0<x<\frac{15}{2}$ において，$x=\frac{5}{2}$

$x=\frac{5}{2}$のときのVの値は

$V=\frac{5}{2}\cdot\left(15-2\cdot\frac{5}{2}\right)^2$

$=\frac{5}{2}\cdot 10^2$

$=250$

Vの増減表は次のようになる．

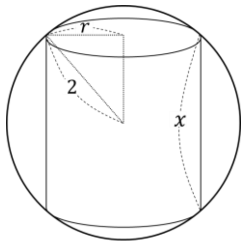
x	0	$\cdots$	$\frac{5}{2}$	$\cdots$	$\frac{15}{2}$
V'		$+$	0	$-$	
V		↗	250	↘	

よって，Vが最大になるときのxの値は，

$\boldsymbol{x=\frac{5}{2}}$

5.

（１）



底面の半径をrとすると，

$r^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=2^2$　より　$r^2=4-\frac{x^2}{4}$

よって

$V=\pi r^2 x$

$=\pi\left(4-\frac{x^2}{4}\right)x$

$=\frac{\pi}{4}x(16-x^2)$　$(0<x<4)$

$V'=\frac{\pi}{4}\cdot(16-x^2)+\frac{\pi}{4}x\cdot(-2x)$

$=4\pi-\frac{\pi}{4}x^2-\frac{2\pi}{4}x^2$

$=4\pi-\frac{3\pi}{4}x^2$

$=-\frac{3\pi}{4}\left(x^2-\frac{16}{3}\right)$

$V'=0$とすると，

$x^2=\frac{16}{3}$

$(0<x<4)$において，$x=\frac{4}{\sqrt{3}}$

$x=\frac{4}{\sqrt{3}}$のときのVの値は

$V=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\left\{16-\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2\right\}$

$=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\cdot\left(16-\frac{16}{3}\right)$

$=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\cdot\frac{32}{3}$

$=\frac{32\pi}{3\sqrt{3}}$

Vの増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{4}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	4
V'		$+$	0	$-$	
V		↗	$\frac{32\pi}{3\sqrt{3}}$	↘	

よって，Vが最大になるときのxの値は，

$$\boldsymbol{x=\frac{4}{\sqrt{3}}}$$

6.

$y=x-\log(x+1)$とおく．

$$y'=1-\frac{1}{x+1}$$

$$=\frac{x+1-1}{x+1}$$

$$=\frac{x}{x+1}$$

$y'=0$とすると，$x=0$

$x=0$のときのyの値は

$y=0-\log 1$

$=0$

yの増減表は次のようになる．

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y		↘	0	↗

よって，$y>-1$において，$y\geqq 0$であるから

$x-\log(x+1)\geqq 0$，すなわち，$x\geqq\log(x+1)$

7.

（１）与式は$\frac{0}{0}$の不定形である．

$$与式=\lim_{x\to 0}\frac{(\tan 4x)'}{(x^2+2x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4}{\cos^2 4x}}{2x+2}$$

$$=\frac{4}{\cos^2 0}\cdot\frac{1}{0+2}$$

$$=4\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\boldsymbol{2}$$

（２）与式は$\frac{0}{0}$の不定形である．

$$与式=\lim_{x\to 1}\frac{(1+\cos\pi x)'}{\{(x-1)^2\}'}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-\pi\sin\pi x}{2(x-1)}$$ ※ここでも$\frac{0}{0}$の不定形

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-\pi(\sin\pi x)'}{2(x-1)'}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-\pi\cdot\pi\cos\pi x}{2\cdot 1}$$

$$=-\frac{\pi^2}{2}\lim_{x\to 1}\cos\pi x$$

$$=-\frac{\pi^2}{2}\cdot(-1)$$

$$=\boldsymbol{\frac{\pi^2}{2}}$$

練習問題 1-B

1.

接点の座標をP$(t,\ t^2)$とする．

$y'=2x$であるから，点Pにおける接線の方程式は

$y-t^2=2t(x-t)$

$y=2tx-2t^2+t^2$

$y=2tx-t^2$

これが，点$(2,\ -5)$を通るので

$-5=2t\cdot 2-t^2$

$t^2-4t-5=0$

$(t+1)(t-5)=0$

よって，$t=-1,\ 5$

i）$t=-1$のとき

$y=2\cdot(-1)\cdot x-(-1)^2$

$y=-2x-1$

ii）$t=5$のとき

$y=2\cdot 5\cdot x-5^2$

$y=10x-25$

よって，求められる接線の方程式は

$\boldsymbol{y=-2x-1,\ y=10x-25}$

2.

直円柱の体積をVとすると

$V=\pi r^2 x$・・・①

また，直円柱の表面積が 1 であるから

$\pi r^2\times 2+2\pi r\times x=1$

$2\pi r^2+2\pi rx=1$

$2\pi rx=1-2\pi r^2$

$2\pi r\neq 0$ なので，$x=\frac{1-2\pi r^2}{2\pi r}$

これを①に代入して

$$V=\pi r^2\cdot\frac{1-2\pi r^2}{2\pi r}$$

$$=\frac{r-2\pi r^3}{2}$$

rについて微分.

$$V'=\frac{1-6\pi r^2}{2}$$

$V'=0$とすると，$1-6\pi r^2=0$，すなわち$6\pi r^2=1$

$r>0$ より，$r^2=\dfrac{1}{6\pi}$を満たす実数rは,

$r=\dfrac{1}{\sqrt{6\pi}}$　ただ１つであるから

Vの増減表は次のようになり，$r=\dfrac{1}{\sqrt{6\pi}}$のとき,

体積は最大になる.

r	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{6\pi}}$	$\cdots$
V'		$+$	0	$-$
V		$\nearrow$		$\searrow$

体積が最大になるとき，$6\pi r^2=1$が成り立つから,

これと，$2\pi r^2+2\pi rx=1$より

$$6\pi r^2=2\pi r^2+2\pi rx$$

$$3r=r+x$$

$$2r=x$$

$$\frac{x}{r}=\mathbf{2}$$

3.

定義域は$x\neq 0$である.

$$y'=1-\frac{a}{x^2}$$

$$=\frac{x^2-a}{x^2}$$

$$=\frac{(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})}{x^2}\quad （a>0\text{ より}）$$

$y'=0$とすると，$x=\pm\sqrt{a}$

$x=-\sqrt{a}$のときのyの値は

$$y=-\sqrt{a}+\frac{a}{-\sqrt{a}}$$

$$=-\sqrt{a}-\sqrt{a}$$

$$=-2\sqrt{a}$$

$x=\sqrt{a}$のときのyの値は

$$y=\sqrt{a}+\frac{a}{\sqrt{a}}$$

$$=\sqrt{a}+\sqrt{a}$$

$$=2\sqrt{a}$$

yの増減表は次のようになる.

x	$\cdots$	$-\sqrt{a}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$-2\sqrt{a}$	$\searrow$		$\searrow$	$2\sqrt{a}$	$\nearrow$

増減表より，$x=\pm\sqrt{a}$で極値をもつ.

また，極小値は$2\sqrt{a}$であるから

$$2\sqrt{a}=8$$

$$\sqrt{a}=4$$

$$\boldsymbol{a=16}$$

4.

（１）$y'=6x^2+6x-12$

$$=6(x^2+x-2)$$

$$=6(x+2)(x-1)$$

$y'=0$とすると，$x=-2$，1

$x=-2$のときのyの値は

$$y=2\cdot(-2)^3+3\cdot(-2)^2-12\cdot(-2)$$

$$=-16+12+24$$

$$=20$$

$x=1$のときのyの値は

$$y=2\cdot 1^3+3\cdot 1^2-12\cdot 1$$

$$=2+3-12$$

$$=-7$$

yの増減表は次のようになる.

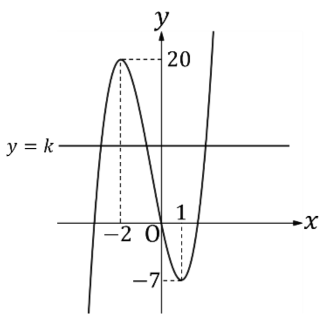
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	20	$\searrow$	-7	$\nearrow$

よって

極大値　20　($\boldsymbol{x=-2}$)

極小値　−7　($\boldsymbol{x=1}$)

（２）$\begin{cases}y=2x^3+3x^2-12x\\ y=k\end{cases}$　とする.



方程式の実数解の個数は，２つのグラフの交点の個数であるから,

$k<-7$のとき　1個

$k=-7$のとき　2個

$-7<k<20$のとき　3個

$k=20$のとき　2個

$k>20$のとき　1個

以上より，

$k<-7$，$k>20$のとき　1個

$k=-7$，$k=20$のとき　2個

$-7<k<20$のとき　3個

5.

（1）$y'=-\dfrac{a}{x^2}$

よって，点Pにおける接線の方程式は

$$y-\frac{a}{t}=-\frac{a}{t^2}(x-t)$$

$$y=-\frac{a}{t^2}x+\frac{a}{t}+\frac{a}{t}$$

$$y=-\frac{a}{t^2}x+\frac{2a}{t}$$

（2）（1）において，$y=0$とおけば

$$0=-\frac{a}{t^2}x+\frac{2a}{t}$$

$$\frac{a}{t^2}x=\frac{2a}{t}$$

$$x=\frac{2a}{t}\cdot\frac{t^2}{a}=2t$$

よって，点Aの座標は，$(\boldsymbol{2t},\ \boldsymbol{0})$

また，（1）において，$x=0$とおけば

$$y=\frac{2a}{t}$$

よって，点Bの座標は，$\left(\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\dfrac{2a}{t}}\right)$

（3）ここで線分ABの中心の座標を求めると

$$\left(\frac{2t+0}{2},\ \frac{0+\frac{2a}{t}}{2}\right)=\left(t,\ \frac{a}{t}\right)$$

これは点Pの座標に等しいので，点Pは線分ABの中点である．よって，PA = PB

6.

（1）$y'=-2e^{-2x}$

よって，点Pにおける接線の方程式は

$$y-e^{-2t}=-2e^{-2t}(x-t)$$

$$y=-2e^{-2t}x+2te^{-2t}+e^{-2t}\quad\cdots①$$

①において，$y=0$とおけば

$$0=-2e^{-2t}x+2te^{-2t}+e^{-2t}$$

$e^{-2t}\neq 0$なので

$$0=-2x+2t+1$$

$$x=t+\frac{1}{2}$$

よって，点Aの座標は，$\left(t+\dfrac{1}{2},\ 0\right)$

また，①において，$x=0$とおけば

$$y=2te^{-2t}+e^{-2t}$$

よって，点Bの座標は，$(0,\ 2te^{-2t}+e^{-2t})$

以上より，

$$S=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\right)(2te^{-2t}+e^{-2t})$$

$$=\frac{1}{2}\left(2t^2e^{-2t}+te^{-2t}+te^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\right)$$

$$=\left(t^2+t+\frac{1}{4}\right)e^{-2t}$$

$$=\boldsymbol{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2e^{-2t}\quad(t>0)}$$

（2）$S'=2\left(t+\dfrac{1}{2}\right)e^{-2t}+\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2(-2e^{-2t})$

$$=-2e^{-2t}\left(-t-\frac{1}{2}+t^2+t+\frac{1}{4}\right)$$

$$=-2e^{-2t}\left(t^2-\frac{1}{4}\right)$$

$$=-2e^{-2t}\left(t+\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)$$

$S'=0$とすると，$t>0$であるから，$t=\dfrac{1}{2}$

$t=\dfrac{1}{2}$のときのSの値は

$$S=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2e^{-2\cdot\frac{1}{2}}$$

$$=1^2\cdot e^{-1}=\frac{1}{e}$$

Sの増減表は次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
S'		$+$	0	$-$
S		↗	$\frac{1}{e}$	↘

増減表よりSが最大になるときのtの値は

$$t = \frac{1}{2}$$

よって，点 P の座標は，$\left(\boldsymbol{\frac{1}{2}},\ \boldsymbol{\frac{1}{e}}\right)$