２章　微分の応用

§１　関数の変動（p.48～p.59）

$\boxed{問１}$　$y=f(x)$とする．

（１）$f'(x)=3x^2$

よって

$f(2)=2^3=8$

$f'(2)=3\cdot 2^2=12$

したがって，$x=2$における接線の方程式は

$y-f(2)=f'(2)(x-2)$

$y-8=12x-24$

$\boldsymbol{y=12x-16}$

（２）$f(x)=x^{-2}$

$f'(x)=-2x^{-3}=-\dfrac{2}{x^3}$

よって

$f(-1)=\dfrac{1}{(-1)^2}=1$

$f'(-1)=-\dfrac{2}{(-1)^3}=2$

したがって，$x=-1$における接線の方程式は

$y-f(-1)=f'(-1)\{x-(-1)\}$

$y-1=2x+2$

$\boldsymbol{y=2x+3}$

（３）$f'(x)=-\sin x$

よって

$f(\pi)=\cos\pi=-1$

$f'(\pi)=-\sin\pi=0$

したがって，$x=\pi$における接線の方程式は

$y-f(\pi)=f'(\pi)(x-\pi)$

$y-(-1)=0$

$\boldsymbol{y=-1}$

（４）$f'(x)=e^x$

よって

$f(-2)=e^{-2}$

$f'(-2)=e^{-2}$

したがって，$x=-2$における接線の方程式は

$y-f(-2)=f'(-2)\{x-(-2)\}$

$y-e^{-2}=e^{-2}(x+2)$

$y=e^{-2}x+3e^{-2}$

$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{e^2}x+\dfrac{3}{e^2}}$

$\boxed{問２}$　$y=f(x)$とする．

（１）$f'(x)=2x+3$

よって

$f(1)=1^2+3\cdot 1=4$

$f'(1)=2\cdot 1+3=5$

したがって，$x=1$における法線の方程式は

$y-f(1)=-\dfrac{1}{f'(1)}(x-1)$

$y-4=-\dfrac{1}{5}(x-1)$

$\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{5}x+\dfrac{21}{5}}$

（２）$f'(x)=\cos x$

よって

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$

$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$

$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ なので，$x=\dfrac{\pi}{2}$における法線の方程式は

$\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{2}}$

$\boxed{問３}$

（１）$f'(x)=-5x^4-2$

$=-(5x^4+2)$

$5x^4+2>0$なので，$-(5x^4+2)<0$

よって，すべての実数xについて，$f'(x)<0$であるから，

$f(x)$は区間Iで**単調に減少する．**

（２）$f'(x)=1-\cos x$

区間$(0,\ 2\pi)$のxについて

$-1\leqq\ \cos x\ <1$

$1\geqq-\cos x>-1$

であるから

$2\geqq 1-\cos x>0$

すなわち，$f'(x)>0$であるから，

$f(x)$は区間Iで**単調に増加する．**

問4

（１）$y' = 4x + 8$

$= 4(x + 2)$

$y' = 0$とすると，$x = -2$

$x = -2$のときのyの値は

$y = 2 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) + 5$

$= 8 - 16 + 5$

$= -3$

yの増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	↘	-3	↗

よって

$x > -2$のとき　増加

$x < -2$のとき　減少

（２）$y' = 6x^2 - 6x - 12$

$= 6(x^2 - x - 2)$

$= 6(x + 1)(x - 2)$

$y' = 0$とすると，$x = -1$，2

$x = -1$のときのyの値は

$y = 2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 12 \cdot (-1) + 7$

$= -2 - 3 + 12 + 7$

$= 14$

$x = 2$のときのyの値は

$y = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 7$

$= 16 - 12 - 24 + 7$

$= -13$

yの増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	14	↘	-13	↗

よって

$x < -1$，$x > 2$のとき　増加

$-1 < x < 2$のとき　減少

（３）$y' = 4x^3 - 4x$

$= 4x(x^2 - 1)$

$= 4x(x + 1)(x - 1)$

$y' = 0$とすると，$x = -1$，0，1

$x = -1$のときのyの値は

$y = (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^2 + 3$

$= 1 - 2 + 3$

$= 2$

$x = 0$のときのyの値は

$y = 3$

$x = 1$のときのyの値は

$y = 1^4 - 2 \cdot 1^2 + 3$

$= 1 - 2 + 3$

$= 2$

yの増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	2	↗	3	↘	2	↗

よって

$-1 < x < 0$，$x > 1$のとき　増加

$x < -1$，$0 < x < 1$のとき　減少

問5

（１）$y' = 3x^2 - 6x$

$= 3x(x - 2)$

$y' = 0$とすると，$x = 0$，2

$x = 0$のときのyの値は

$y = 1$

$x = 2$のときのyの値は

$y = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 1$

$= 8 - 12 + 1$

$= -3$

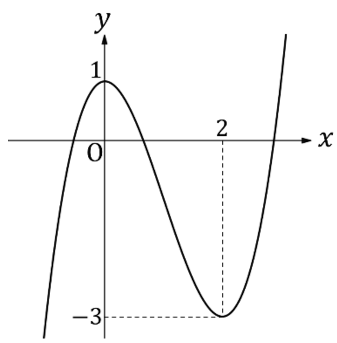
yの増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	1	↘	-3	↗

よって

極大値　1　($x = 0$)

極小値　-3　($x = 2$)



（２）$y' = -4x^3 + 4x$

$= -4x(x^2 - 1)$

$= -4x(x + 1)(x - 1)$

$y' = 0$とすると，$x = -1$，0，1

$x = -1$のときのyの値は

$y = -(-1)^4 + 2 \cdot (-1)^2$

$= -1 + 2$

$= 1$

$x = 0$のときのyの値は

$y = 0$

$x = 1$のときのyの値は

$y = -1^4 + 2 \cdot 1^2$

$= -1 + 2$

$= 1$

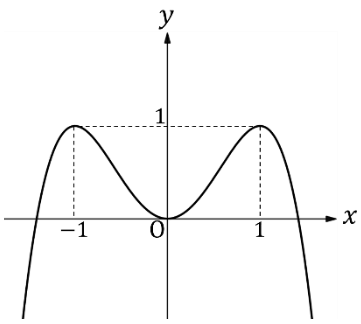
yの増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↗	1	↘	0	↗	1	↘

よって

極大値　1　($x = -1$，1)

極小値　0　($x = 0$)



（３）$y' = 12x^3 - 24x^2$

$= 12x^2(x - 2)$

$y' = 0$とすると，$x = 0$，2

$x = 0$のときのyの値は

$y = 7$

$x = 2$のときのyの値は

$y = 3 \cdot 2^4 - 8 \cdot 2^3 + 7$

$= 48 - 64 + 7$

$= -9$

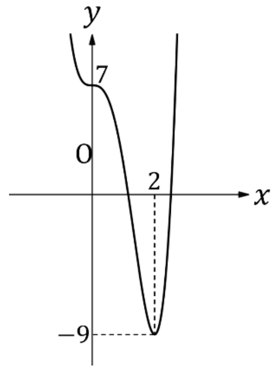
yの増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$	0	$+$
y	↘	7	↘	-9	↗

よって

極大値　なし

極小値　−9　($x = 2$)



問６

$y' = 3x^2 - 12$

$= 3(x^2 - 4)$

$= 3(x + 2)(x - 2)$

$y' = 0$とすると，$x = -2$，2

$x = -2$のときのyの値は

$y = (-2)^3 - 12 \cdot (-2) + a$

$= -8 + 24 + a$

$= a + 16$

$x = 2$のときのyの値は

$y = 2^3 - 12 \cdot 2 + a$

$= 8 - 24 + a$

$= a - 16$

yの増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	$a + 16$	↘	$a - 16$	↗

増減表より

極大値　$a + 16$　$(x = -2)$

極小値　$a - 16$　$(x = 2)$

極大値が正，極小値が負なので

$$\begin{cases} a + 16 > 0 \cdot\cdot\cdot ① \\ a - 16 < 0 \cdot\cdot\cdot ② \end{cases}$$

①より，$a > -16$

②より，$a < 16$

以上より，$\boldsymbol{-16 < a < 16}$

問７

（１）$y' = 3x^2 + 6x - 9$

$= 3(x^2 + 2x - 3)$

$= 3(x+3)(x-1)$

$y' = 0$とすると，$x = -3$，1

$x = -3$は変域の外なので考えない．

$x = -1$のときのyの値は

$y = (-1)^3 + 3\cdot(-1)^2 - 9\cdot(-1) + 1$

$= -1 + 3 + 9 + 1$

$= 12$

$x = 1$のときのyの値は

$y = 1^3 + 3\cdot 1^2 - 9\cdot 1 + 1$

$= 1 + 3 - 9 + 1$

$= -4$

$x = 2$のときのyの値は

$y = 2^3 + 3\cdot 2^2 - 9\cdot 2 + 1$

$= 8 + 12 - 18 + 1$

$= 3$

yの増減表は次のようになる．

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$-$	0	$+$	
y	12	$\searrow$	-4	$\nearrow$	3

よって

最大値　$\boldsymbol{12}$　$(\boldsymbol{x = -1})$

最小値　$\boldsymbol{-4}$　$(\boldsymbol{x = 1})$

（2）$y' = 1 - 2\sin x$

$y' = 0$とすると，

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$0 \leqq x \leqq \pi$では

$$x = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$$

$x = 0$のときのyの値は

$y = 0 + 2\cos 0$

$= 2\cdot 1 = 2$

$x = \dfrac{\pi}{6}$のときのyの値は

$$y = \frac{\pi}{6} + 2\cos\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\pi}{6} + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$$

$x = \dfrac{5}{6}\pi$のときのyの値は

$$y = \frac{5}{6}\pi + 2\cos\frac{5}{6}\pi$$

$$= \frac{5}{6}\pi + 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}$$

$x = \pi$のときのyの値は

$y = \pi + 2\cos\pi$

$= \pi + 2\cdot(-1)$

$= \pi - 2$

yの増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	2	$\nearrow$	$\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$	$\searrow$	$\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$	$\nearrow$	$\pi-2$

よって

最大値　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6} + \sqrt{3}}$　$\left(\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{6}}\right)$

最小値　$\boldsymbol{\dfrac{5}{6}\pi - \sqrt{3}}$　$\left(\boldsymbol{x = \dfrac{5}{6}\pi}\right)$

（3）$y' = (x^2)'e^{-x} + x^2(e^{-x})'$

$= 2xe^{-x} - x^2e^{-x}$

$= xe^{-x}(2-x)$

$y' = 0$とすると，$x = 0$，2

$x = 0$のときのyの値は

$y = 0$

$x = 2$のときのyの値は

$y = 2^2\cdot e^{-2}$

$$= \frac{4}{e^2}$$

$x = 3$のときのyの値は

$y = 3^2\cdot e^{-3}$

$$= \frac{9}{e^3}$$

yの増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	$\frac{9}{e^3}$

よって

最大値　$\boldsymbol{\dfrac{4}{e^2}}$　$(\boldsymbol{x = 2})$

最小値　$\boldsymbol{0}$　$(\boldsymbol{x = 0})$

（4）$y' = 1 - 2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$= 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$y' = 0$とすると，$x = 1$

$x = 0$のときのyの値は

$y = 0$

$x = 1$のときのyの値は

$y = 1 - 2\sqrt{1}$

$= -1$

$x = 4$のときのyの値は

$y = 4 - 2\sqrt{4}$

$= 0$

yの増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4
y'	＼	$-$	0	$+$	
y	0	↘	-1	↗	0

よって

最大値　$\boldsymbol{0}$　($\boldsymbol{x = 0,\ 4}$)

最小値　$\boldsymbol{-1}$　($\boldsymbol{x = 1}$)

問８

（1）点AからBCに垂線を引く．

その垂線とDGの交点をM，BCとの交点をNとする．

△ADMと△DBEにおいて

$\angle \mathrm{ADM} = \angle \mathrm{DBE}$

$\angle \mathrm{AMD} = \angle \mathrm{DEB} = 90°$

２組の角がそれぞれ等しいので，△ADM∽△DBE

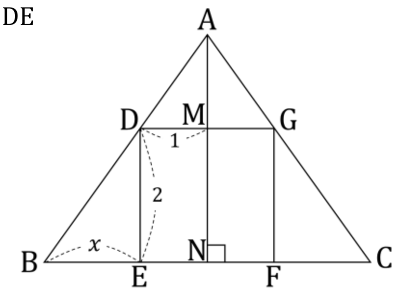
相似の関係から，

$\mathrm{MD} : \mathrm{AM} = \mathrm{EB} : \mathrm{DE}$

$1 : \mathrm{AM} = x : 2$

$\mathrm{AM} \cdot x = 2$

$\mathrm{AM} = \dfrac{2}{x}$



また，

$\mathrm{BC} = \mathrm{BE} + \mathrm{EF} + \mathrm{FC}$

$= x + 2 + x$

$= 2 + 2x$

$= 2(1 + x)$

$\mathrm{AN} = \mathrm{AM} + \mathrm{MN}$

$= \dfrac{2}{x} + 2$

$= \dfrac{2 + 2x}{x}$

$= \dfrac{2(1 + x)}{x}$

よって

$S = \dfrac{1}{2} \cdot \mathrm{BC} \cdot \mathrm{AN}$

$= \dfrac{1}{2} \cdot 2(1 + x) \cdot \dfrac{2(1 + x)}{x}$

$= \boldsymbol{\dfrac{2(1 + x)^2}{x}}$

また，xの変域は，$\boldsymbol{x > 0}$

（2）$S' = 2 \cdot \left\{\dfrac{2(1 + x) \cdot x - (1 + x)^2 \cdot 1}{x^2}\right\}$

$= 2 \cdot \left\{\dfrac{2x + 2x^2 - 1 - 2x - x^2}{x^2}\right\}$

$= 2 \cdot \left\{\dfrac{x^2 - 1}{x^2}\right\}$

$= \dfrac{2(x + 1)(x - 1)}{x^2}$

$S' = 0$とすると，$x = -1,\ 1$

$x = -1$は変域の外なので考えない．

$x = 1$のときのSの値は

$S = \dfrac{2(1 + 1)^2}{1}$

$= 2 \cdot 4$

$= 8$

Sの増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$
S'	$-$	0	$+$
S	↘	8	↗

よって，

Sが最小になるときのxの値は，$\boldsymbol{x = 1}$

問９

（1）$y = e^x - x - 1$とおく．

$y' = e^x - 1$

$y' = 0$とすると，$x = 0$

$x = 0$のときのyの値は

$y = e^0 - 0 - 1$

$= 1 - 0 - 1$

$= 0$

yの増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	↘	0	↗

よって，最小値は$y=0$ $(x=0)$となるから，

$y=e^x-x-1 \geqq 0$

したがって，$e^x \geqq x+1$となる．

（２）$y=x-\tan^{-1}x$とおく．

$$y'=1-\frac{1}{1+x^2}$$

$y'=0$とすると，$x=0$

$x=0$のときのyの値は

$y=0-\tan^{-1}0$

$\quad=0$

yの増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$
y'	0	$+$
y	0	↗

よって，最小値は$y=0$ $(x=0)$となるから，

$y=x-\tan^{-1}x \geqq 0$

したがって，$x \geqq \tan^{-1}x$となる．

問 10

（１）与式は$\dfrac{0}{0}$の不定形である．

$$与式=\lim_{x\to1}\frac{(x^4+2x^2-3)'}{(x^3+3x^2-4)'}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{4x^3+4x}{3x^2+6x}$$

$$=\frac{4\cdot1^3+4\cdot1}{3\cdot1^2+6\cdot1}$$

$$=\boldsymbol{\frac{8}{9}}$$

（２）与式は$\dfrac{0}{0}$の不定形である．

$$与式=\lim_{x\to0}\frac{(1-e^x)'}{(x)'}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-e^x}{1}$$

$$=-e^0$$

$$=\boldsymbol{-1}$$

（３）与式は$\dfrac{0}{0}$の不定形である．

$$与式=\lim_{x\to0}\frac{(\sin 2x)'}{(\sin 5x)'}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\cos 2x}{5\cos 5x}$$

$$=\frac{2}{5}\lim_{x\to0}\frac{\cos 2x}{\cos 5x}$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{\cos 0}{\cos 0}$$

$$=\boldsymbol{\frac{2}{5}}$$

問 11

（１）与式は$\dfrac{0}{0}$の不定形である．

$$与式=\lim_{x\to1}\frac{(x^3-3x+2)'}{(x^5-5x+4)'}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{3x^2-3}{5x^4-5}\quad ※ここでも\frac{0}{0}の不定形$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(3x^2-3)'}{(5x^4-5)'}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{6x}{20x^3}$$

$$=\frac{3}{10}\lim_{x\to1}\frac{1}{x}$$

$$=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{1}$$

$$=\boldsymbol{\frac{3}{10}}$$

（２）与式は$\dfrac{0}{0}$の不定形である．

$$与式=\lim_{x\to0}\frac{(x^3)'}{(x-\sin x)'}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3x^2}{1-\cos x}\quad ※ここでも\frac{0}{0}の不定形$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(3x^2)'}{(1-\cos x)'}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{6x}{\sin x}\quad ※ここでも\frac{0}{0}の不定形$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(6x)'}{(\sin x)'}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{6}{\cos x}$$

$$= \frac{6}{\cos 0}$$

$$= \frac{6}{1}$$

$$= \mathbf{6}$$

問 12

（１）与式は$\dfrac{\infty}{\infty}$の不定形である.

$$\text{与式} = \lim_{x\to\infty} \frac{\{\log(1+x^2)\}'}{\{\log(1+x)\}'}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{1+x^2}\cdot(1+x^2)'}{\dfrac{1}{1+x}\cdot(1+x)'}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{2x}{1+x^2}}{\dfrac{1}{1+x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left\{\frac{2x}{1+x^2}\cdot\frac{1+x}{1}\right\}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x+2x^2}{1+x^2}$$　※ここでも$\dfrac{\infty}{\infty}$の不定形

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(2x+2x^2)'}{(1+x^2)'}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2+4x}{2x}$$　※ここでも$\dfrac{\infty}{\infty}$の不定形

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(2+4x)'}{(2x)'}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4}{2}$$

$$= \mathbf{2}$$

（２）与式を$\dfrac{\log x}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}$と変形すれば，$\dfrac{-\infty}{\infty}$の不定形である.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$\text{与式} = \lim_{x\to+0} \frac{(\log x)'}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)'}$$

$$= \lim_{x\to+0} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}}$$

$$= \lim_{x\to+0} \left\{\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{2x\sqrt{x}}{1}\right)\right\}$$

$$= -2\lim_{x\to+0}\sqrt{x}$$

$$= -2\cdot 0$$

$$= \mathbf{0}$$