練習問題 2-A

1.

（１） $y' = 6(2x+3)^5 \cdot (2x+3)'$

$= 6(2x+3)^5 \cdot 2$

$= \mathbf{12(2x+3)^5}$

（２） $y' = -\dfrac{\{(e^x+1)^2\}'}{\{(e^x+1)^2\}^2}$

$= -\dfrac{2(e^x+1)\cdot(e^x+1)'}{(e^x+1)^4}$

$= -\dfrac{2(e^x+1)\cdot e^x}{(e^x+1)^4}$

$= -\boldsymbol{\dfrac{2e^x}{(e^x+1)^3}}$

（３） $y' = 4\sin^3\dfrac{x}{2}\cdot\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)'$

$= 4\sin^3\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2}\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)'$

$= 4\sin^3\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{2}$

$= \boldsymbol{2\sin^3\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}$

（４） $y' = \cos\sqrt{e^x+1}\cdot\left(\sqrt{e^x+1}\right)'$

$= \cos\sqrt{e^x+1}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{e^x+1}}\cdot(e^x+1)'$

$= \dfrac{\cos\sqrt{e^x+1}}{2\sqrt{e^x+1}}\cdot e^x$

$= \boldsymbol{\dfrac{e^x\cos\sqrt{e^x+1}}{2\sqrt{e^x+1}}}$

（５） $y' = \dfrac{1}{\log x}\cdot(\log x)'$

$= \dfrac{1}{\log x}\cdot\dfrac{1}{x}$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{x\log x}}$

2.

$f'(y) = \dfrac{1}{y^2} = y^{-2}$について,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{-2y^{-3}}$$

$$= \frac{1}{-\frac{2}{y^3}} = \frac{y^3}{-2} = -\frac{y^3}{2}$$

ここで，$y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$より

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{y^3}{2} = -\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3}{2}$$

$$= -\frac{\frac{1}{x\sqrt{x}}}{2} = -\boldsymbol{\frac{1}{2x\sqrt{x}}}$$

3.

$y = \log(2x-1)^3 - \{\log(x+1) + \log(2x+1)^2\}$

$= 3\log(2x-1) - \log(x+1) - 2\log(2x+1)$

$y' = 3\cdot\dfrac{1}{2x-1}(2x-1)' - \dfrac{1}{x+1}(x+1)' - 2\cdot\dfrac{1}{2x+1}(2x+1)'$

$= \dfrac{3}{2x-1}\cdot 2 - \dfrac{1}{x+1}\cdot 1 - \dfrac{2}{2x+1}\cdot 2$

$= \boldsymbol{\dfrac{6}{2x-1} - \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{4}{2x+1}}$

$= \dfrac{6(x+1)(2x+1) - (2x-1)(2x+1) - 4(2x-1)(x+1)}{(2x-1)(x+1)(2x+1)}$

$= \dfrac{6(2x^2+3x+1) - (4x^2-1) - 4(2x^2+x-1)}{(2x-1)(2x+1)(x+1)}$

$= \dfrac{12x^2+18x+6-4x^2+1-8x^2-4x+4}{(2x-1)(2x+1)(x+1)}$

$= \boldsymbol{\dfrac{14x+11}{(2x-1)(2x+1)(x+1)}}$

4.

両辺の自然対数をとると,

$\log y = \log(\sin x)^x$

$= x\log(\sin x)$

両辺をxについて微分すると,

$\dfrac{d}{dy}(\log y)\dfrac{dy}{dx} = (x)'\log(\sin x) + x\{\log(\sin x)\}'$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = 1\cdot\log(\sin x) + x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \log(\sin x) + \frac{x}{\sin x}\cdot\cos x$$

$$y' = y\left\{\log(\sin x) + \frac{x\cos x}{\sin x}\right\}$$

$y = (\sin x)^x$であるから，

$$y' = (\sin x)^x\left\{\log(\sin x) + \frac{x\cos x}{\sin x}\right\}$$

$$= \boldsymbol{(\sin x)^{x-1}\{\sin x\log(\sin x) + x\cos x\}}$$

5.

（1）$y = \sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$とおくと

$$\sin y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{\pi}{4}$$

よって，与式 $= \sin\dfrac{\pi}{4} = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

（2）$\sin\dfrac{5}{6}\pi = \dfrac{1}{2}$であるから，

与式 $= \sin^{-1}\dfrac{1}{2}$

$y = \sin^{-1}\dfrac{1}{2}$とおくと

$$\sin y = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\pi}{6}$$

よって，与式 $= \boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}}$

6.

（1）$y' = \dfrac{1}{1+(\sin x)^2}\cdot(\sin x)'$

$$= \frac{1}{1+\sin^2 x}\cdot\cos x$$

$$= \boldsymbol{\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}}$$

（2）$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\cos x)^2}}\cdot(\cos x)' + 1$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}\cdot(-\sin x) + 1$$

$$= -\frac{\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}} + 1$$

$$= -\frac{\sin x}{\sin x} + 1$$

$$= -1 + 1 = \boldsymbol{0}$$

7.

（1）左辺 $= (\cosh x + \sinh x)(\cosh x - \sinh x)$

$$= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2} + \frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2} - \frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{e^x+e^{-x}+e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x+e^{-x}-e^x+e^{-x}}{2}\right)$$

$$= \frac{2e^x}{2}\cdot\frac{2e^{-x}}{2}$$

$$= e^x\cdot e^{-x}$$

$= 1 =$ 右辺

（2）左辺 $= \left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'$

$$= \frac{e^x - e^{-x}\cdot(-x)'}{2}$$

$$= \frac{e^x - e^{-x}\cdot(-1)}{2}$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$= \cosh x =$ 右辺

（3）左辺 $= \left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'$

$$= \frac{e^x + e^{-x}\cdot(-x)'}{2}$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}\cdot(-1)}{2}$$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$= \sinh x =$ 右辺

（4）左辺 $= \left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)'$

$$= \frac{(e^x - e^{-x})'(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})'}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{\{(e^x + e^{-x}) + (e^x - e^{-x})\}\{(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})\}}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{2e^x \cdot 2e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{1}{\frac{(e^x + e^{-x})^2}{4}}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\cosh^2 x} = \text{右辺}$$

練習問題 2-B

1.

（1）$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}}$$

（2）$y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x+3}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{x+3}\right)'$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{(x+3)^2}} \cdot \left\{-\frac{(x+3)'}{(x+3)^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{(x+3)^2}} \cdot \left\{-\frac{1}{(x+3)^2}\right\}$$

$$= -\boldsymbol{\frac{1}{(x+3)^2 + 1}}$$

（3）$y = (\cos^3 x)^{-1}$

$$y' = -(\cos^3 x)^{-2} \cdot (\cos^3 x)'$$

$$= -(\cos^3 x)^{-2} \cdot 3\cos^2 x \cdot (\cos x)'$$

$$= -(\cos^3 x)^{-2} \cdot 3\cos^2 x \cdot (-\sin x)$$

$$= \frac{3\cos^2 x \sin x}{(\cos^3 x)^2}$$

$$= \frac{3\cos^2 x \sin x}{\cos^6 x}$$

$$= \boldsymbol{\frac{3\sin x}{\cos^4 x}}$$

（4）$y = (\tan^2 x)^{-1}$

$$y' = -(\tan^2 x)^{-2} \cdot (\tan^2 x)'$$

$$= -(\tan^2 x)^{-2} \cdot 2\tan x \cdot (\tan x)'$$

$$= -(\tan^2 x)^{-2} \cdot 2\tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= -\frac{2\tan x}{(\tan^2 x)^2 \cos^2 x}$$

$$= -\frac{2\tan x}{\tan^4 x \cos^2 x}$$

$$= -\boldsymbol{\frac{2}{\tan^3 x \cos^2 x}}$$

（5）$y = x(3x-4)^{\frac{1}{3}}$

$$y' = (x)'(3x-4)^{\frac{1}{3}} + x\left\{(3x-4)^{\frac{1}{3}}\right\}'$$

$$= 1 \cdot (3x-4)^{\frac{1}{3}} + x \cdot \frac{1}{3} \cdot (3x-4)^{-\frac{2}{3}} \cdot (3x-4)'$$

$$= (3x-4)^{\frac{1}{3}} + \frac{x}{3}(3x-4)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3$$

$$= \sqrt[3]{3x-4} + \frac{x}{\sqrt[3]{(3x-4)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{3x-4} \cdot \sqrt[3]{(3x-4)^2} + x}{\sqrt[3]{(3x-4)^2}}$$

$$= \frac{3x-4+x}{\sqrt[3]{(3x-4)^2}}$$

$$= \frac{4x-4}{\sqrt[3]{(3x-4)^2}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{4(x-1)}{\sqrt[3]{(3x-4)^2}}}$$

（6）$y = \{\cos^2(1+2x)\}^{-1}$

$$y' = -\{\cos^2(1+2x)\}^{-2} \cdot \{\cos^2(1+2x)\}'$$

$$= -\{\cos^2(1+2x)\}^{-2} \cdot 2\cos(1+2x) \cdot \{\cos(1+2x)\}'$$

$$= -2\{\cos^2(1+2x)\}^{-2}\cos(1+2x)$$

$$\cdot\{-\sin(1+2x)\}\cdot(1+2x)'$$
$$=2\{\cos^2(1+2x)\}^{-2}\cos(1+2x)\sin(1+2x)\cdot 2$$
$$=\frac{4\cos(1+2x)\sin(1+2x)}{\{\cos^2(1+2x)\}^2}$$
$$=\frac{4\cos(1+2x)\sin(1+2x)}{\cos^4(1+2x)}$$
$$=\boldsymbol{\frac{4\sin(1+2x)}{\cos^3(1+2x)}}$$

2.

（１）両辺の自然対数をとると，

$$\log y=\log x^{\log x}$$
$$=\log x\cdot\log x$$
$$=(\log x)^2$$

両辺をxについて微分すると，

$$\frac{1}{y}\cdot y'=2\log x\cdot(\log x)'$$
$$=\frac{2}{x}\log x$$
$$y'=y\cdot\frac{2}{x}\log x$$

ここで，$y=x^{\log x}$であるから，

$$y'=x^{\log x}\cdot\frac{2}{x}\log x$$
$$=\boldsymbol{2x^{\log x-1}\log x}$$

（２）両辺の自然対数をとると，

$$\log y=\log(\log x)^x$$
$$=x\log(\log x)$$

両辺をxについて微分すると，

$$\frac{1}{y}\cdot y'=(x)'\log(\log x)+x\{\log(\log x)\}'$$
$$=1\cdot\log(\log x)+x\cdot\frac{1}{\log x}(\log x)'$$
$$=\log(\log x)+\frac{x}{\log x}\cdot\frac{1}{x}$$
$$=\log(\log x)+\frac{1}{\log x}$$
$$y'=y\left\{\log(\log x)+\frac{1}{\log x}\right\}$$

ここで，$y=(\log x)^x$であるから，

$$y'=(\log x)^x\left\{\log(\log x)+\frac{1}{\log x}\right\}$$
$$=\boldsymbol{(\log x)^{x-1}\{(\log x)\log(\log x)+1\}}$$

（３）両辺の自然対数をとると，

$$\log y=\log\frac{(x+3)^2(x-2)^3}{(x+1)^4}$$
$$=\{\log(x+3)^2+\log(x-2)^3\}-\log(x+1)^4$$
$$=2\log(x+3)+3\log(x-2)-4\log(x+1)$$

両辺をxについて微分すると，

$$\frac{1}{y}\cdot y'=2\cdot\frac{1}{x+3}(x+3)'+3\cdot\frac{1}{x-2}(x-2)'-4\cdot\frac{1}{x+1}(x+1)'$$
$$=\frac{2}{x+3}+\frac{3}{x-2}-\frac{4}{x+1}$$
$$=\frac{2(x-2)(x+1)+3(x+3)(x+1)-4(x+3)(x-2)}{(x+3)(x-2)(x+1)}$$
$$=\frac{(2x^2-2x-4)+(3x^2+12x+9)-(4x^3+4x-24)}{(x+3)(x-2)(x+1)}$$
$$=\frac{2x^2-2x-4+3x^2+12x+9-4x^3-4x+24}{(x+3)(x-2)(x+1)}$$
$$=\frac{x^2+6x+29}{(x+3)(x-2)(x+1)}$$
$$y'=y\cdot\frac{x^2+6x+29}{(x+3)(x-2)(x+1)}$$

ここで，$y=\dfrac{(x+3)^2(x-2)^3}{(x+1)^4}$であるから，

$$y'=\frac{(x+3)^2(x-2)^3}{(x+1)^4}\cdot\frac{x^2+6x+29}{(x+3)(x-2)(x+1)}$$
$$=\boldsymbol{\frac{(x+3)(x-2)^2(x^2+6x+29)}{(x+1)^5}}$$

（４）両辺の自然対数をとると，

$$\log y=\log\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{(x+1)^2}}$$
$$=\log\left\{\frac{x^2+1}{(x+1)^2}\right\}^{\frac{1}{3}}$$
$$=\frac{1}{3}\log\frac{x^2+1}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{1}{3}\{\log(x^2+1)-\log(x+1)^2\}$$
$$=\frac{1}{3}\{\log(x^2+1)-2\log(x+1)\}$$

両辺をxについて微分すると，

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{x^2+1}(x^2+1)'-2\cdot\frac{1}{x+1}(x+1)'\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2}{x+1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2x(x+1)-2(x^2+1)}{(x^2+1)(x+1)}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2+x-x^2-1}{(x^2+1)(x+1)}$$

$$=\frac{2(x-1)}{3(x^2+1)(x+1)}$$

$$y'=y\cdot\frac{2(x-1)}{3(x^2+1)(x+1)}$$

ここで，$y=\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{(x+1)^2}}$であるから，

$$y'=\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{(x+1)^2}}\cdot\frac{2(x-1)}{3(x^2+1)(x+1)}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\cdot\frac{2(x-1)}{3(x^2+1)(x+1)}$$

$$=\boldsymbol{\frac{2(x-1)}{3(x+1)\sqrt[3]{(x+1)^2(x^2+1)^2}}}$$

3.

$f(x)$が偶関数のとき，

$f(-x)=f(x)$となる．

両辺をxについて微分する．

$$f'(-x)\cdot(-x)'=f'(x)$$

$$-f'(-x)=f'(x)$$

$$f'(-x)=-f'(x)$$

よって，$f'(x)$は奇関数である．

また，$f(x)$が奇関数のとき，

$f(-x)=-f(x)$となる．

両辺をxについて微分する．

$$f'(-x)\cdot(-x)'=-f'(x)$$

$$-f'(-x)=-f'(x)$$

$$f'(-x)=f'(x)$$

よって，$f'(x)$は偶関数である．

4.

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{2x+1}-1\right)\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(2x+1)-1}{x\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x}{x\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{2x+1}+1}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\cdot0+1}+1}$$

$$=\frac{2}{2}=1$$

また，$f(0)=1$

よって，$\lim_{x\to0}f(x)=1=f(0)$であるから，

$f(x)$は，$\boldsymbol{x=0}$**で連続である．**

5.

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}$$

ここで，$x\neq0$のとき

$$0\leqq\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqq1$$

辺々に$|x|$をかければ，

$$0\leqq\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqq|x|$$

$\lim_{x\to0}|x|=0$であるから，

$$\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

よって，$f'(0)=\boldsymbol{0}$

（２）$x\neq0$のとき

$$f'(x)=(x^2)'\sin\frac{1}{x}+x^2\cdot\left(\sin\frac{1}{x}\right)'$$

$$=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

$x\to0$ のとき，（１）より $2x\sin\frac{1}{x}\to0$ であるが，

$\cos\frac{1}{x}$ の極限値は存在しない（振動する）から，

$\lim_{x\to0}f'(x)$も存在しない．

よって，$\lim_{x \to 0} f'(x) = f'(0)$とはならないので，

$f'(x)$は$\boldsymbol{x = 0}$**で連続ではない.**