１章　微分法

§２　いろいろな関数の導関数（p.31〜p.43）

問１

（１）$\boldsymbol{y = \log u,\ u = \sin x}$

（２）$\boldsymbol{y = \dfrac{1}{u}}$，$\boldsymbol{u = x^2 + 1}$

または，$\boldsymbol{y = \dfrac{1}{u+1}}$，$\boldsymbol{u = x^2}$

問２

（１）$y' = 5(x^2 - x + 1)^4 \cdot (x^2 - x + 1)'$

$= \boldsymbol{5(x^2 - x + 1)^4(2x - 1)}$

（２）$y' = e^{\cos x} \cdot (\cos x)'$

$= e^{\cos x} \cdot (-\sin x)$

$= \boldsymbol{-e^{\cos x}\sin x}$

（３）$y' = \dfrac{1}{x^2 - 1} \cdot (x^2 - 1)'$

$= \dfrac{1}{x^2 - 1} \cdot 2x$

$= \boldsymbol{\dfrac{2x}{x^2 - 1}}$

（４）$y = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$

$y' = \dfrac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2 + 1)'$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x$

$= \boldsymbol{\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}$

問３

（１）$y' = 2\cos x \cdot (\cos x)'$

$= 2\cos x \cdot (-\sin x)$

$= \boldsymbol{-2\sin x\cos x}$

（２）$y' = 2\tan x \cdot (\tan x)'$

$= 2\tan x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$= \boldsymbol{\dfrac{2\tan x}{\cos^2 x}}$

問４

（１）$y' = 3\cos^2 2x \cdot (\cos 2x)'$

$= 3\cos^2 2x \cdot (-\sin 2x) \cdot (2x)'$

$= -3\cos^2 2x \sin 2x \cdot 2$

$= \boldsymbol{-6\cos^2 2x\sin 2x}$

（２）$y' = (e^{4x})'\cos(x^2) + e^{4x} \cdot \{\cos(x^2)\}'$

$= 4e^{4x}\cos(x^2) + e^{4x} \cdot \{-\sin(x^2)\} \cdot (x^2)'$

$= 4e^{4x}\cos(x^2) - e^{4x}\sin(x^2) \cdot 2x$

$= \boldsymbol{2e^{4x}\{2\cos(x^2) - x\sin(x^2)\}}$

（３）$y' = 5\{\log(x^3 + 1)\}^4 \cdot \{\log(x^3 + 1)\}'$

$= 5\{\log(x^3 + 1)\}^4 \cdot \dfrac{1}{x^3 + 1}(x^3 + 1)'$

$= \dfrac{5\{\log(x^3 + 1)\}^4}{x^3 + 1} \cdot 3x^2$

$= \boldsymbol{\dfrac{15x^2\{\log(x^3 + 1)\}^4}{x^3 + 1}}$

問５

（１）$y = \log(x - 1)^2 - \log(x + 1)^2$

$= 2\log(x - 1) - 2\log(x + 1)$

$y' = 2 \cdot \dfrac{1}{x - 1}(x - 1)' - 2 \cdot \dfrac{1}{x + 1}(x + 1)'$

$= \dfrac{2}{x - 1} - \dfrac{2}{x + 1}$

$= \dfrac{2(x + 1) - 2(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)}$

$= \dfrac{2x + 2 - 2x + 2}{(x - 1)(x + 1)}$

$= \boldsymbol{\dfrac{4}{(x - 1)(x + 1)}}$

（２）$y = \log x^3 + \log\sqrt{x^2 + 1}$

$= 3\log x + \log(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$

$= 3\log x + \dfrac{1}{2}\log(x^2 + 1)$

$y' = 3 \cdot \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{x^2 + 1}(x^2 + 1)'$

$= \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{2(x^2 + 1)} \cdot 2x$

$= \dfrac{3}{x} + \dfrac{x}{x^2 + 1}$

$$=\frac{3(x^2+1)+x\cdot x}{x(x^2+1)}$$

$$=\frac{3x^2+3+x^2}{x(x^2+1)}$$

$$=\boldsymbol{\frac{4x^2+3}{x(x^2+1)}}$$

問 6

（１）両辺の自然対数をとると，

$$\log y=\log x^x$$
$$=x\log x$$

両辺をxについて微分すると，

$$\frac{d}{dy}(\log y)\frac{dy}{dx}=(x)'\log x+x(\log x)'$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=1\cdot\log x+x\cdot\frac{1}{x}$$

$$y'=y(\log x+1)$$

$y=x^x$だから，

$$\boldsymbol{y'=x^x(\log x+1)}$$

（２）両辺の自然対数をとると，

$$\log y=\log x^{\cos x}$$
$$=\cos x\log x$$

両辺をxについて微分すると，

$$\frac{d}{dy}(\log y)\frac{dy}{dx}=(\cos x)'\log x+\cos x\cdot(\log x)'$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=-\sin x\log x+\cos x\cdot\frac{1}{x}$$

$$y'=y\left(-\sin x\log x+\frac{\cos x}{x}\right)$$

$y=x^{\cos x}$だから，

$$y'=x^{\cos x}\left(-\sin x\log x+\frac{\cos x}{x}\right)$$

$$=\boldsymbol{x^{\cos x-1}(-x\sin x\log x+\cos x)}$$

問 7

$f(y)=y^4$について

$$\left(\sqrt[4]{x}\right)'=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{4y^3}$$

$y=\sqrt[4]{x}$だから

$$\left(\sqrt[4]{x}\right)'=\boldsymbol{\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}}$$

問 8

（１）$y=\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$とおくと，

$\sin y=\frac{\sqrt{3}}{2}$　$\left(0<y<\frac{\pi}{2}\right)$であるから

$y=\frac{\pi}{3}$　よって，$\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$

（２）$y=\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$とおくと，

$\sin y=\frac{1}{\sqrt{2}}$　$\left(0<y<\frac{\pi}{2}\right)$であるから

$y=\frac{\pi}{4}$　よって，$\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

問 9

$\mathrm{AB}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

よって，$\sin\mathrm{A}=\frac{4}{5}$であるから

$\mathrm{A}=\boldsymbol{\sin^{-1}\frac{4}{5}}$

同様に，$\sin\mathrm{B}=\frac{3}{5}$であるから

$\mathrm{B}=\boldsymbol{\sin^{-1}\frac{3}{5}}$

問 10

（１）$y=\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$とおくと

$\cos y=\frac{1}{\sqrt{2}}$　$\left(0<y<\frac{\pi}{2}\right)$であるから

$y=\frac{\pi}{4}$　よって，$\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

（２）$y=\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$とおくと

$\cos y=\frac{\sqrt{3}}{2}$　$\left(0<y<\frac{\pi}{2}\right)$であるから

$y=\frac{\pi}{6}$　よって，$\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$

（３）$y=\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$とおくと

$\tan y=\frac{1}{\sqrt{3}}$　$\left(0<y<\frac{\pi}{2}\right)$であるから

$y=\dfrac{\pi}{6}$　よって，$\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}}$

（4）$y=\tan^{-1}1$とおくと

$\tan y=1$　$\left(0<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$であるから

$y=\dfrac{\pi}{4}$　よって，$\tan^{-1}1=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$

$\boxed{\text{問 11}}$

図より，$\cos y=\dfrac{x}{1}=x$であるから

$y=\cos^{-1}x$・・・①

また，$\sin y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1}=\sqrt{1-x^2}$であるから

$y=\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$・・・②

①，②より，$\cos^{-1}x=\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$

$\boxed{\text{問 12}}$

（1）$y=\sin^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$とおくと

$\sin y=-\dfrac{1}{2}$　$\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq y\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$であるから

$y=-\dfrac{\pi}{6}$　よって，$\sin^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}}$

（2）$y=\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$とおくと

$\cos y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　$(0\leqq y\leqq\pi)$であるから

$y=\dfrac{3}{4}\pi$　よって，$\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\boldsymbol{\dfrac{3}{4}\pi}$

（3）$y=\sin^{-1}0$とおくと

$\sin y=0$　$\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq y\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$であるから

$y=0$，よって，$\sin^{-1}0=\mathbf{0}$

$\boxed{\text{問 13}}$

（1）$y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\cdot(2x)'$

$=-\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}}$

（2）$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}}\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)'$

$=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}}\cdot\dfrac{1}{2}$

$=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}}$

（3）$y'=\dfrac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot(\sqrt{x})'$

$=\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$=\boldsymbol{\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}}$

$\boxed{\text{問 14}}$

$y'=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}\cdot\left(\dfrac{x}{a}\right)'$

$=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{x^2}{a^2}}\cdot\dfrac{1}{a}$

$=\dfrac{1}{a^2\left(1+\dfrac{x^2}{a^2}\right)}$

$=\dfrac{1}{a^2+x^2}=\dfrac{1}{x^2+a^2}$

$\boxed{\text{問 15}}$

$f(x)=x^4-5x+2$とおくと，

$f(x)$は区間$[-1,\ 1]$で連続である．

また，

$f(-1)=(-1)^4-5\cdot(-1)+2$

$=1+5+2$

$=8>0$

$f(1)=1^4-5\cdot1+2$

$=1-5+2$

$=-2<0$

よって，方程式$f(x)=0$は，区間$(-1,\ 1)$に少なくとも1つの実数解をもつ．

$\boxed{\text{問 16}}$

$f(x)=\sin x-x+1$とおくと，

$f(x)$は区間$[0,\ \pi]$で連続である．

また，

$f(0)=\sin 0-0+1$

$=0-0+1$

$=1>0$

$f(\pi)=\sin\pi-\pi+1$

$$= 0 - \pi + 1$$
$$= -\pi + 1 < 0$$

よって，方程式$f(x) = 0$すなわち$\sin x = x - 1$は，区間$(0,\ \pi)$に少なくとも 1 つの実数解をもつ．