練習問題 1-A

1.

（１）与式 $= 1^2 + 2 \cdot 1 + 3 = \mathbf{6}$

（２）与式 $= \dfrac{1-3}{1^2-1-2}$

$= \dfrac{-2}{-2} = \mathbf{1}$

（３）与式 $= \lim_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x+1)}$

$= \lim_{x \to 2} \dfrac{x+4}{x+1}$

$= \dfrac{2+4}{2+1} = \mathbf{2}$

（４）$h \to 2$のとき，$h - 2 \to 0$となるから，

与式 $= \infty$

（５）与式 $= \lim_{x \to \infty} \dfrac{5 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{5}{x} + 1}$

$= \dfrac{5+0+0}{0+1} = \mathbf{5}$

（６）与式 $= \lim_{x \to \infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+3x+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+3x+1} + x\right)}{\sqrt{x^2+3x+1} + x}$

$= \lim_{x \to \infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+3x+1}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2+3x+1} + x}$

$= \lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2+3x+1-x^2}{\sqrt{x^2+3x+1} + x}$

$= \lim_{x \to \infty} \dfrac{3x+1}{\sqrt{x^2+3x+1} + x}$

$= \lim_{x \to \infty} \dfrac{3 + \dfrac{1}{x}}{\sqrt{1 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2}} + 1}$

$= \dfrac{3+0}{\sqrt{1+0+0} + 1} = \mathbf{\dfrac{3}{2}}$

2.

（１）$y' = \mathbf{3x^2 + 2x + 1}$

（２）$y = x \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{5}{3}}$

$y' = \dfrac{5}{3} x^{\frac{5}{3}-1}$

$= \mathbf{\dfrac{5}{3} x^{\frac{2}{3}}} = \mathbf{\dfrac{5}{3} \sqrt[3]{x^2}}$

（３）$y' = (x^2+3)'\sqrt{x} + (x^2+3)\left(\sqrt{x}\right)'$

$= 2x\sqrt{x} + (x^2+3) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$= \dfrac{2x\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x} + x^2 + 3}{2\sqrt{x}}$

$= \dfrac{4x^2 + x^2 + 3}{2\sqrt{x}}$

$= \mathbf{\dfrac{5x^2+3}{2\sqrt{x}}}$

（４）$y' = \dfrac{(3x+4)'(x+2) - (3x+4)(x+2)'}{(x+2)^2}$

$= \dfrac{3(x+2) - (3x+4) \cdot 1}{(x+2)^2}$

$= \dfrac{3x+6-3x-4}{(x+2)^2}$

$= \mathbf{\dfrac{2}{(x+2)^2}}$

（５）$y' = 4 \cdot 5(4x+3)^4 = \mathbf{20(4x+3)^4}$

（６）$y = (6x+2)^{\frac{1}{2}}$

$y' = 6 \cdot \dfrac{1}{2}(6x+2)^{-\frac{1}{2}}$

$= \mathbf{3(6x+2)^{-\frac{1}{2}}} = \mathbf{\dfrac{3}{\sqrt{6x+2}}}$

3.

（１）与式 $= \lim_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{2}{3}\sin 2x}{\dfrac{2}{3} \cdot 3x}$

$= \dfrac{2}{3} \lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{2x}$

$= \dfrac{2}{3} \cdot 1 = \mathbf{\dfrac{2}{3}}$

（２）与式 $= \lim_{x \to 0} \left(\dfrac{\tan 2x}{1} \cdot \dfrac{1}{\tan x}\right)$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 2x}{2x}\cdot\frac{2x}{\tan x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 2x}{2x}\cdot 2\cdot\frac{x}{\tan x}\right)$$

$$= 1\cdot 2\cdot 1 = \mathbf{2}$$

4.

（1）$y' = 3\cdot(-\sin x) + 2\cos 2x$

$= \boldsymbol{-3\sin x + 2\cos 2x}$

（2）$y' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{3}} = \boldsymbol{\frac{1}{3\cos^2\frac{x}{3}}}$

（3）$y' = (x)'\cos 4x + x(\cos 4x)'$

$= 1\cdot\cos 4x + x\cdot 4\cdot(-\sin 4x)$

$= \boldsymbol{\cos 4x - 4x\sin 4x}$

（4）$y' = (x^2)'e^{2x} + x^2(e^{2x})'$

$= 2xe^{2x} + x^2\cdot 2e^{2x}$

$= \boldsymbol{2x(1+x)e^{2x}}$

（5）$y' = \frac{(\log x)'x - \log x\cdot(x)'}{x^2}$

$= \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \log x\cdot 1}{x^2}$

$= \boldsymbol{\frac{1-\log x}{x^2}}$

（6）$y' = \boldsymbol{3\cdot 2^{3x+4}\log 2}$

（7）$y' = -2\cdot\frac{1}{3-2x} = \boldsymbol{\frac{2}{2x-3}}$

（8）$y' = 4\cdot\frac{1}{(4x-1)\log 3} = \boldsymbol{\frac{4}{(4x-1)\log 3}}$

5.

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$であるから，

$\frac{dV}{dr} = \frac{4}{3}\pi\cdot 3r^2 = \boldsymbol{4\pi r^2}$

6.

$f(0) = 2$より，

$a\sin 0 + b\cos 0 = 2$

$a\cdot 0 + b\cdot 1 = 2$

$b = 2$

また

$f'(x) = a\cos x + b(-\sin x)$

$= a\cos x - b\sin x$であるから，

$f'(0) = 1$より，

$a\cos 0 - b\sin 0 = 1$

$a\cdot 1 - b\cdot 0 = 1$

$a = 1$

よって，$\boldsymbol{a = 1}$，$\boldsymbol{b = 2}$

練習問題 1-B

1.

（1）$x - \pi = \theta$とおくと，$x\to\pi$のとき，$\theta\to 0$

与式 $= \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = \mathbf{1}$

（2）$-x = t$とおくと，$x\to -\infty$のとき，$t\to\infty$

また，$x = -t$となるから，

与式 $= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\sin(-t)}{-t}\right) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)$

$-1 \leqq \sin t \leqq 1$ であるから，各辺に$\frac{1}{t}(>0)$をかけると

$-\frac{1}{t} \leqq \frac{\sin t}{t} \leqq \frac{1}{t}$

ここで，$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t} = 0$，$\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{t}\right) = 0$

よって，$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = 0$

したがって，与式 $= \mathbf{0}$

（3）与式 $= \lim_{x\to 0}\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)x\sin x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)x\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)x\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{(1+\cos x)x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{1+\cos 0}\cdot 1 = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

（4）与式 $= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x} - \frac{\sin x}{x}\right)$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} - \frac{\sin x}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x \cos x} - \frac{\sin x}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{x} \right)$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{\cos 0} - 1 = \mathbf{0}$$

（５）$-x = t$とおくと，$x \to -\infty$のとき$t \to \infty$

また，$x = -t$となるから，

$$与式 = \lim_{t \to \infty} \left\{ \sqrt{(-t)^2 + (-t)} + (-t) \right\}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \left(\sqrt{t^2 - t} - t \right)$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{\left(\sqrt{t^2 - t} - t\right)\left(\sqrt{t^2 - t} + t\right)}{\sqrt{t^2 - t} + t}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{(t^2 - t) - t^2}{\sqrt{t^2 - t} + t}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{-t}{\sqrt{t^2 - t} + t}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{t}} + 1}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1 - 0} + 1} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

（６）$-x = t$とおくと，$x = -\infty$のとき$t \to \infty$

また，$x = -t$となるから，

$$与式 = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{\sqrt{(-t)^2 + 2 \cdot (-t)} + (-t)}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2t} - t}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{\sqrt{t^2 - 2t} + t}{\left(\sqrt{t^2 - 2t} - t\right)\left(\sqrt{t^2 - 2t} + t\right)}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{\sqrt{t^2 - 2t} + t}{(t^2 - 2t) - t^2}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{\sqrt{t^2 - 2t} + t}{-2t}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{2}{t}} + 1}{-2}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - 0} + 1}{-2} = -\mathbf{1}$$

2.

（１）$x \to 2$のとき，分母$\to 0$であるから，

極限値が存在するためには，

$$\lim_{x \to 2} \left(\sqrt{x + 2} - a \right) = 0$$

$$\sqrt{2 + 2} - a = 0$$

$$2 - a = 0$$

$$a = 2$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x + 2} - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\left(\sqrt{x + 2} - 2\right)\left(\sqrt{x + 2} + 2\right)}{(x - 2)\left(\sqrt{x + 2} + 2\right)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x + 2) - 4}{(x - 2)\left(\sqrt{x + 2} + 2\right)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{(x - 2)\left(\sqrt{x + 2} + 2\right)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{1}{\left(\sqrt{x + 2} + 2\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2 + 2} + 2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

3.

（１）$$y' = \frac{(2x - 3)'(x^2 + 1) - (2x - 3)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{2 \cdot (x^2 + 1) - (2x - 3) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 2 - 4x^2 + 6x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \boldsymbol{\frac{-2x^2 + 6x + 2}{(x^2 + 1)^2}}$$

（２）$$y' = \frac{(\cos x)'x - \cos x \cdot (x)'}{x^2}$$

$$= \frac{-\sin x \cdot x - \cos x \cdot 1}{x^2}$$

$$= \boldsymbol{-\frac{x \sin x + \cos x}{x^2}}$$

（３）$$y' = \frac{(\sin x)'(x^2 + 1) - \sin x \cdot (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{\cos x \cdot (x^2 + 1) - \sin x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \boldsymbol{\frac{(x^2 + 1)\cos x - 2x \sin x}{(x^2 + 1)^2}}$$

（４）$$y' = \frac{(3^{2x})'e^x - 3^{2x}(e^x)'}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{2 \cdot 3^{2x} \log 3 \cdot e^x - 3^{2x} e^x}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{2 \cdot 3^{2x} \log 3 - 3^{2x}}{e^x}$$

$$= \boldsymbol{\frac{3^{2x}(2\log 3 - 1)}{e^x}}$$

（5） $y = x\log(2x+5)$

$$y' = (x)'\log(2x+5) + x\{\log(2x+5)\}'$$

$$= 1\cdot\log(2x+5) + x\cdot 2\cdot\frac{1}{2x+5}$$

$$= \boldsymbol{\log(2x+5) + \frac{2x}{2x+5}}$$

（6） $y = e^{-3x}\cdot 2\log_2 x$

$$= 2e^{-3x}\log_2 x$$

$$y' = 2\{(e^{-3x})'\log_2 x + e^{-3x}(\log_2 x)'\}$$

$$= 2\left(-3e^{-3x}\log_2 x + e^{-3x}\cdot\frac{1}{x\log 2}\right)$$

$$= \boldsymbol{2e^{-3x}\left(-3\log_2 x - \frac{1}{x\log 2}\right)}$$

（7） $s = (t^2-1)(3t+1)^{\frac{1}{2}}$

$$s' = (t^2-1)'(3t+1)^{\frac{1}{2}} + (t^2-1)\left\{(3t+1)^{\frac{1}{2}}\right\}'$$

$$= 2t(3t+1)^{\frac{1}{2}} + (t^2-1)\cdot 3\cdot\frac{1}{2}\cdot(3t+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 2t\sqrt{3t+1} + \frac{3(t^2-1)}{2\sqrt{3t+1}}$$

$$= \frac{2t\sqrt{3t+1}\cdot 2\sqrt{3t+1} + 3(t^2-1)}{2\sqrt{3t+1}}$$

$$= \frac{4t(3t+1) + 3(t^2-1)}{2\sqrt{3t+1}}$$

$$= \frac{12t^2 + 4t + 3t^2 - 3}{2\sqrt{3t+1}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{15t^2 + 4t - 3}{2\sqrt{3t+1}}}$$

（8） $y' = \dfrac{(u)'\sqrt{2u+1} - u\left(\sqrt{2u+1}\right)'}{\left(\sqrt{2u+1}\right)^2}$

$$= \frac{1\cdot\sqrt{2u+1} - u\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2u+1}}}{2u+1}$$

$$= \frac{\sqrt{2u+1} - \frac{u}{\sqrt{2u+1}}}{2u+1}$$

$$= \frac{2u+1-u}{(2u+1)\sqrt{2u+1}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{u+1}{(2u+1)\sqrt{2u+1}}}$$

（9） $y' = \dfrac{\left(1-\sqrt{x}\right)'\left(1+\sqrt{x}\right) - \left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)'}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$

$$= \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\left(1+\sqrt{x}\right) - \left(1-\sqrt{x}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$= \frac{-\left(1+\sqrt{x}\right) - \left(1-\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$= \frac{-1-\sqrt{x}-1+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$= \frac{-2}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$= \boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}}$$

（10）

$$y' = \frac{(\sin x - \cos x)'(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)'}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{(\cos x + \sin x)(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x) + (\sin x - \cos x)(\sin x - \cos x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{(\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x) + (\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{2\cdot 1}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \boldsymbol{\frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}}$$

$$= \frac{2}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x}$$

$$= \frac{2}{1 + 2\sin x\cos x}$$

$$= \boldsymbol{\frac{2}{1 + \sin 2x}}$$

4.

$$y' = \frac{(a - \cos x)'(x^2-1) - (a - \cos x)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{\sin x\cdot(x^2-1) - (a - \cos x)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{(x^2-1)\sin x - 2x(a - \cos x)}{(x^2-1)^2}$$ であるから

$$左辺 = (x^2-1)\left\{\frac{(x^2-1)\sin x - 2x(a-\cos x)}{(x^2-1)^2}\right.$$

$$\left. +2x\cdot\frac{a-\cos x}{x^2-1}\right\}$$

$$= \frac{(x^2-1)\sin x - 2x(a-\cos x)}{x^2-1} + \frac{2x(a-\cos x)}{x^2-1}$$

$$= \frac{(x^2-1)\sin x - 2x(a-\cos x) + 2x(a-\cos x)}{x^2-1}$$

$$= \frac{(x^2-1)\sin x}{x^2-1}$$

$$= \sin x = 右辺$$

5.

（1）$2h = k$とおくと，$h \to 0$のとき$k \to 0$

$$与式 = \lim_{h\to 0} 2\cdot\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}$$

$$= 2\lim_{k\to 0}\frac{f(a+k)-f(a)}{k}$$

$$= \boldsymbol{2f'(a)}$$

（2）$-h = k$とおくと，$h \to 0$のとき$k \to 0$

$$与式 = \lim_{h\to 0}\left\{-\frac{f\big(a+(-h)\big)-f(a)}{-h}\right\}$$

$$= \lim_{k\to 0}\left\{-\frac{f(a+k)-f(a)}{k}\right\}$$

$$= -\lim_{k\to 0}\left\{\frac{f(a+k)-f(a)}{k}\right\}$$

$$= \boldsymbol{-f'(a)}$$

（3）分子から$f(a)$を引いて加える．

$$与式 = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-f(a-h)+f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-\{f(a-h)-f(a)\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-\frac{f(a-h)-f(a)}{h}\right\}$$

$$= f'(a) - \{-f'(a)\}$$

$$= \boldsymbol{2f'(a)}$$

（4）分子から$af(a)$を引いて加える．

$$与式 = \lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(a)-af(x)+af(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{(x-a)f(a)-a\{f(x)-f(a)\}}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}\left\{\frac{(x-a)f(a)}{x-a}-\frac{a\{f(x)-f(a)\}}{x-a}\right\}$$

$$= \lim_{x\to a}\left\{f(a)-a\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right\}$$

$$= f(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{af'(a)}$$