練習問題 2-A

1.

（１）与えられた等差数列の一般項をa_nとすると

$a_n = 50 + (n-1)\cdot(-3)$

$= -3n + 53$

$a_n < 0$とすると

$-3n + 53 < 0$

$-3n < -53$

$$n > \frac{53}{3} = 17.666\ldots$$

よって，はじめて負になるのは，**第 18 項**である．

（２）与えられた等差数列の初項から第n項までの和をS_nとすると

$$S_n = \frac{n\{2\cdot 50 + (n-1)\cdot(-3)\}}{2}$$

$$= \frac{n(-3n+103)}{2}$$

よって，第 10 項までの和は

$$S_{10} = \frac{10(-3\cdot 10 + 103)}{2}$$

$= 5\cdot 73$

$= \mathbf{365}$

（３）$S_n < 0$とすると

$$\frac{n(-3n+103)}{2} < 0$$

$-n(3n-103) < 0$

$n(3n-103) > 0$

$$n < 0,\ n > \frac{103}{3} = 34.333\ldots$$

$n > 0$であるから，はじめて負になるのは，**第 35 項**である．

2.

（１）与えられた等比数列の一般項をa_nとすると

$a_n = 3\cdot 2^{n-1}$

$a^n > 3000$とすると

$3\cdot 2^{n-1} > 3000$

$2^{n-1} > 1000$

ここで，$2^9 = 512$，$2^{10} = 1024$であるから，

はじめて3000より大きくなるのは，$n - 1 = 10$より，$n = 11$，すなわち**第 11 項**である．

（２）与えられた等比数列の初項から第n項までの和をS_nとすると

$$S_n = \frac{3(2^n - 1)}{2-1}$$

$= 3(2^n - 1)$

よって，第 7 項までの和は

$S_7 = 3(2^7 - 1)$

$= 3\cdot 127$

$= \mathbf{381}$

（３）$S_n > 30000$とすると

$3(2^n - 1) > 30000$

$2^n - 1 > 10000$

$2^n > 10001$

ここで，$2^{13} = 8192$，$2^{14} = 16384$であるから，

はじめて30000より大きくなるのは，**第 14 項**である．

3.

（１）初項 1，公比$-\dfrac{1}{2}$で，$-\dfrac{1}{2^9}$は第 10 項であるから，

求める和は，

$$\frac{1\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1-\frac{1}{1024}}{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1023}{1024}\times\frac{2}{3}$$

$$= \mathbf{\frac{341}{512}}$$

（２）初項$\sqrt{3}$，公比$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$であるから，求める和は，

$$\frac{\sqrt{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{10}\right\}}{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{3^5}\right)}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{3(3^5-1)}{3^5\left(\sqrt{3}+1\right)}$$

$$= \frac{242\left(\sqrt{3}-1\right)}{81\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}$$

$$=\frac{242(\sqrt{3}-1)}{81\cdot 2}$$

$$=\mathbf{\frac{121(\sqrt{3}-1)}{81}}$$

4.

（１）与式 $=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k^2-k)$

$$=3\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\frac{3}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)\{(2n+1)-1\}$$

$$=\boldsymbol{n^2(n+1)}$$

（２）与式 $=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+3k)$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}k^2+3\sum_{k=1}^{n-1}k$$

$$=\frac{1}{6}(n-1)n\{2(n-1)+1\}+\frac{3}{2}(n-1)n$$

$$=\frac{1}{6}n(n-1)\{2n-2+1+9\}$$

$$=\frac{1}{6}n(n-1)(2n+8)$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}n(n-1)(n+4)}$$

5.

（１）$a_2=4a_1+3=3\cdot 4+3$

$a_3=4a_2+3$

$=4(3\cdot 4+3)+3$

$=3\cdot 4^2+3\cdot 4+3$

$a_4=4a_3+3$

$=4(3\cdot 4^2+3\cdot 4+3)+3$

$=3\cdot 4^3+3\cdot 4^2+3\cdot 4+3$

よって，

$a_n=3\cdot 4^{n-1}+3\cdot 4^{n-2}+\cdots+3\cdot 4+3$

$=3+3\cdot 4+\cdots+3\cdot 4^{n-2}+3\cdot 4^{n-1}$

$$=\frac{3(4^n-1)}{4-1}$$

$$=\boldsymbol{4^n-1}$$

（２）$b_2=b_1+2\cdot 2=4+2\cdot 2$

$b_3=b_2+2\cdot 3$

$=4+2\cdot 2+2\cdot 3$

$b_4=b_3+2\cdot 4$

$=4+2\cdot 2+2\cdot 3+2\cdot 4$

よって，

$b_n=4+2\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+2n$

ここで，

$$2\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+2(n-1)=\sum_{k=1}^{n-1}2k$$

と表すことができるので

$$b_n=4+2\sum_{k=1}^{n-1}k$$

$$=4+\frac{2}{2}(n-1)n$$

$$=\boldsymbol{n^2-n+4}$$

6.

$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}\cdot 3^{n-1}$ ・・・①とする．

[1] $n=1$のとき

$$a_1=\frac{1(1+1)}{2}\cdot 3^{1-1}$$

$$=\frac{2}{2}\cdot 1=1$$

よって，$n=1$のとき，①は成り立つ．

[2] $n=k$のとき，①が成り立つと仮定する．

$$a_k=\frac{k(k+1)}{2}\cdot 3^{k-1}$$

$n=k+1$のとき，漸化式より

$$a_{k+1}=3a_k+(k+1)3^k$$

$$=3\cdot\frac{k(k+1)}{2}\cdot 3^{k-1}+(k+1)3^k$$

$$=\frac{k(k+1)}{2}\cdot 3^k+(k+1)3^k$$

$$=(k+1)3^k\left(\frac{k}{2}+1\right)$$

$$=(k+1)3^k\cdot\frac{k+2}{2}$$

$$=\frac{(k+1)\{(k+1)+1\}}{2}\cdot 3^k$$

よって，$n=k+1$のときも①が成り立つ．

[1], [2]から，すべての自然数nについて①が成り立つ．

練習問題 2-B

1.

（１）$b_n = a_{n-1} - a_n$より，$b_k = a_{k-1} - a_k$であるから，

これを与式の右辺に代入すると

$$\begin{aligned}右辺 &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k-1} - a_k)\\ &= a_1 + \{(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots \\ &\qquad + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1})\}\\ &= a_1 + (-a_1 + a_n)\\ &= a_n = 右辺\end{aligned}$$

よって，$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

（２）$b_1 = 2 - 1 = 1$

$b_2 = 5 - 2 = 3$

$b_3 = 10 - 5 = 5$

$b_4 = 17 - 10 = 7$

であるから，$\{b_n\}$は

1，3，5，7，⋯

となる．よって，その一般項は

$b_n = 2n - 1$

したがって，$n \geqq 2$のとき

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k\\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k - 1)\\ &= 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} 1\\ &= 1 + \frac{2}{2}(n-1)n - (n-1)\\ &= 1 + n^2 - n - n + 1\\ &= \boldsymbol{n^2 - 2n + 2}\end{aligned}$$

$n = 1$のとき，$a_1 = 1^2 = 1$であるから，

$n = 1$のときも，この式は成り立つ．

よって，$a_n = n^2$

2.

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$

$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$

であるから，$n \geqq 2$のとき

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1}\\ &= n^2 - 2n - \{(n-1)^2 - 2(n-1)\}\\ &= n^2 - 2n - (n^2 - 2n + 1 - 2n + 2)\\ &= 2n - 3 \cdot\cdot\cdot ①\end{aligned}$$

また，$a_1 = S_1 = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$

一方①において，$n = 1$とすると

$a_1 = 2 \cdot 1 - 3 = -1$

よって，①は，$n = 1$のときも成り立つ．

したがって，$a_n = \boldsymbol{2n - 3}$

（初項-1，公比2の等差数列）

3.

（１）$a_2 = \mathbf{1}$，$a_3 = \mathbf{3}$，$a_4 = \mathbf{6}$

（２）k本の直線による交点がa_n個あるとき，

$k + 1$本目の直線は他のk本の直線と交わり，

交点の数はk個増加するので

$\boldsymbol{a_{k+1} = a_k + k}$

（３）$a_1 = 1$

$a_2 = 1 + 2$

$a_3 = (1 + 2) + 3$

$a_4 = (1 + 2 + 3) + 4$

$a_5 = (1 + 2 + 3 + 4) + 5$

$$\begin{aligned}a_n &= \{1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2)\} + (n-1)\\ &= 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1)\\ &= \frac{1}{2}(n-1)n\\ &= \boldsymbol{\frac{n(n-1)}{2}}\end{aligned}$$

4.

「$6^n - 1$は5で割り切れる」という命題を①とおく．

[1] $n = 1$のとき

$6^1 - 1 = 5$となり，5で割り切れる．

よって，$n = 1$のとき，①は成り立つ．

[2] $n = k$のとき，①が成り立つと仮定する．

$6^k - 1$が5で割り切れるので，整数mを用いて

$6^k - 1$が$5m$

と表すことができるから

$6^k = 5m + 1$

$n = k + 1$のとき

$6^k - 1 = 6^k \cdot 6 - 1$

$= (5m+1)\cdot 6-1$

$= 30m+6-1$

$= 30m+5$

$= 5(6m+1)$

よって，$6^{k+1}-1$も5で割り切れるから，

$n=k+1$のときも①が成り立つ．

$[1], [2]$ から，すべての自然数nについて①が成り立つ．

5.

整数$p^l q^m r^n$の約数は

$p^a q^b r^c$

ただし

$a=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ l$

$b=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m$

$c=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$

で表すことができるので，その総和は，次の式を展開することで求められる．

$$(p^0+p^1+p^2+\cdots+p^l)\times(q^0+q^1+q^2+\cdots+q^m)\times(r^0+r^1+r^2+\cdots+r^n)$$

ここで

$p^0+p^1+p^2+\cdots+p^l=1+p+p^2+\cdots+p^l$

は，初項1，公比pの等比数列の初項から第$(l+1)$項までの和であり，$p\neq 1$であるから

$$p^0+p^1+p^2+\cdots+p^l=\frac{p^{l+1}-1}{p-1}$$

同様に

$$q^0+q^1+q^2+\cdots+q^m=\frac{q^{m+1}-1}{q-1}$$

$$r^0+r^1+r^2+\cdots+r^n=\frac{r^{n+1}-1}{r-1}$$

したがって，約数の総和は

$$\frac{p^{l+1}-1}{p-1}\cdot\frac{q^{m+1}-1}{q-1}\cdot\frac{r^{n+1}-1}{r-1}$$