# 7章　場合の数と数列

§2　数列（p.219～p.229）

$\boxed{\text{問1}}$

（1）$a_1 = 3 \cdot 1 - 2 = 1$

$a_2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$

$a_3 = 3 \cdot 3 - 2 = 7$

$a_4 = 3 \cdot 4 - 2 = 10$

$a_5 = 3 \cdot 5 - 2 = 13$

よって，$\mathbf{1, 4, 7, 10, 13}$

（2）$b_1 = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^1 = -\dfrac{1}{3}$

$b_2 = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$

$b_3 = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^3 = -\dfrac{1}{27}$

$b_4 = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^4 = \dfrac{1}{81}$

$b_5 = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^5 = -\dfrac{1}{243}$

よって，$\boldsymbol{-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, -\dfrac{1}{27}, \dfrac{1}{81}, -\dfrac{1}{243}}$

（3）$c_1 = \dfrac{1}{1(1+2)} = \dfrac{1}{3}$

$c_2 = \dfrac{1}{2(2+2)} = \dfrac{1}{8}$

$c_3 = \dfrac{1}{3(3+2)} = \dfrac{1}{15}$

$c_4 = \dfrac{1}{4(4+2)} = \dfrac{1}{24}$

$c_5 = \dfrac{1}{5(5+2)} = \dfrac{1}{35}$

よって，$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{15}, \dfrac{1}{24}, \dfrac{1}{35}}$

$\boxed{\text{問2}}$

（1）$a_1 = (-1)^{1-1} = (-1)^0 = 1$

$a_2 = (-1)^{2-1} = (-1)^1 = -1$

$a_3 = (-1)^{3-1} = (-1)^2 = 1$

$a_4 = (-1)^{4-1} = (-1)^3 = -1$

$a_5 = (-1)^{5-1} = (-1)^4 = 1$

$a_6 = (-1)^{6-1} = (-1)^5 = -1$

よって，$\mathbf{1, -1, 1, -1, 1, -1}$

（2）$b_1 = \dfrac{a_1+1}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1$

$b_2 = \dfrac{a_2+1}{2} = \dfrac{-1+1}{2} = 0$

$b_3 = \dfrac{a_3+1}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1$

$b_4 = \dfrac{a_4+1}{2} = \dfrac{-1+1}{2} = 0$

$b_5 = \dfrac{a_5+1}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1$

$b_6 = \dfrac{a_6+1}{2} = \dfrac{-1+1}{2} = 0$

よって，$\mathbf{1, 0, 1, 0, 1, 0}$

$\boxed{\text{問3}}$

（1）公差を$d$とすると，

$12 = 2 + 2d$であるから，$d = 5$

したがって，2の次の項は，

$2 + 5 = 7$

12の次の２項は，

$12 + 5 = 17$，　$17 + 5 = 22$

よって，2，$\boxed{\mathbf{7}}$，12，$\boxed{\mathbf{17}}$，$\boxed{\mathbf{22}}$

（2）公差を$d$とすると，

$5 = -4 + 3d$であるから，$d = 3$

したがって，$-4$の前の項は，

$-4 - 3 = -7$

$-4$の次の２項は，

$-4 + 3 = -1$，$-1 + 3 = 2$

よって，$\boxed{\mathbf{-7}}$，$-4$，$\boxed{\mathbf{-1}}$，$\boxed{\mathbf{2}}$，5

$\boxed{\text{問4}}$

（1）一般項を$a_n$とすると，

$a_n = 35 + (n-1) \cdot (-3)$

$\quad = \boldsymbol{-3n + 38}$

（2）$a_{10} = -3 \cdot 10 + 38 = \mathbf{8}$

（３）第$n$項が$-22$であるとすると，

$$a_n = -3n + 38 = -22$$
$$-3n = -60$$
$$n = 20$$

よって，**第 20 項**

（４）第$n$項ではじめて負の数になるとすると，

$$a_n = -3n + 38 < 0$$
$$-3n < -38$$
$$n > \frac{38}{3} = 12.666\ldots$$

よって，**第 13 項**

問５

（１）初項が$-1$で，交差が$3$であるから，項数を$n$とすると，

$$-1 + (n-1)\cdot 3 = 56$$
$$3n - 4 = 56$$
$$n = 20$$

よって，求める和は，

$$\frac{20(-1+56)}{2} = \frac{20\cdot 55}{2}$$
$$= 10\cdot 55 = \mathbf{550}$$

（２）初項が$1$で，$2n-1$は第$n$項であるから，

求める和は，

$$\frac{n\{1+(2n-1)\}}{2} = \frac{n(2n)}{2} = \boldsymbol{n^2}$$

問６

第$n$項までの和は，

$$\frac{n\{2\cdot(-4)+(n-1)\cdot 3\}}{2} = \frac{3n^2-11n}{2}$$

よって，$\dfrac{3n^2-11n}{2} = 35$

これを解くと，

$$3n^2 - 11n = 70$$
$$3n^2 - 11n - 70 = 0$$
$$(3n+10)(n-7) = 0$$
$$n = -\frac{10}{3},\ 7$$

$n$は自然数で，$n > 0$なので，$n = 7$

したがって，**第 7 項**

問７

（１）公比を$r$とすると，

$-108 = 4r^3$であるから，$r = -3$

したがって，$4$の次の 2 項は，

$4\times(-3) = -12$，$-12\times(-3) = 36$

$-108$の次の項は，

$-108\times(-3) = 324$

よって，4，$\boxed{\mathbf{-12}}$，$\boxed{\mathbf{36}}$，$-108$，$\boxed{\mathbf{324}}$

（２）公比を$r$とすると，

$18 = 72r^2$であるから，$r = \pm\dfrac{1}{2}$

したがって，$72$の前の項は，

$$72 \div \left(\pm\frac{1}{2}\right) = \pm 144$$

$72$の次の項は，

$$72 \times \left(\pm\frac{1}{2}\right) = \pm 36$$

$18$の次の項は，

$$18 \times \left(\pm\frac{1}{2}\right) = \pm 9$$

よって，$\boxed{\mathbf{\pm 144}}$，72，$\boxed{\mathbf{\pm 36}}$，18，$\boxed{\mathbf{\pm 9}}$　（複号同順）

問８

公比を$r$とすると，

$a_4 = -24r^{4-1} = 3$ であるから，$r = -\dfrac{1}{2}$

よって，第 10 項は，

$$a_{10} = -24\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{10-1}$$
$$= -2^3\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{2^9}\right)$$
$$= 3\cdot\frac{1}{2^6}$$
$$= \mathbf{\frac{3}{64}}$$

問９

初項$1$，公比$2$で，$2^9$は第 10 項であるから，

求める和は，

$$\frac{1(2^{10}-1)}{2-1} = 1024 - 1$$
$$= \mathbf{1023}$$

問 10

（1）一般項を$a_n$とすると，

$$a_n = \mathbf{3 \cdot 2^{n-1}}$$

（2）第$n$項が384であるとすると，

$$384 = 3 \cdot 2^{n-1}$$
$$2^{n-1} = 128$$
$$2^{n-1} = 2^7$$
$$n - 1 = 7$$
$$n = 8$$

よって，**第 8 項**

（3）384は第 8 項であるから，求める和は，

$$\frac{3(2^8 - 1)}{2 - 1} = 3(256 - 1)$$
$$= 3 \cdot 255$$
$$= \mathbf{765}$$

問 11

（1）与式$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$

$$= 1 + 4 + 9 + 16 + 25$$
$$= \mathbf{55}$$

（2）与式$= (3 \cdot 1 - 2) + (3 \cdot 2 - 2) + (3 \cdot 3 - 2) + \cdots$

$$\cdots + (3 \cdot 8 - 2) + (3 \cdot 9 - 2) + (3 \cdot 10 - 2)$$
$$= 1 + 4 + 7 + \cdots + 22 + 25 + 28$$
$$= \frac{10(2 \cdot 1 + 9 \cdot 3)}{2}$$
$$= \mathbf{145}$$

（3）与式$= 2 \cdot 3^{1-1} + 2 \cdot 3^{2-1} + 2 \cdot 3^{3-1} + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1}$

$$= 2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1}$$
$$= 2(1 + 3 + 9 + \cdots + 3^{n-1})$$
$$= 2(3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1})$$
$$= 2\left\{\frac{1(3^n - 1)}{3 - 1}\right\}$$
$$= \mathbf{3^n - 1}$$

問 12

（1）初項101，公差1の等差数列の第$k$項は，

$$101 + (k - 1) \cdot 1 = 100 + k$$

また，項数を$n$とすると，$n + 100 = 200$より，

$n = 100$であるから，

$$\text{与式} = \boldsymbol{\sum_{k=1}^{100} (100 + k)}$$

（2）初項 1，公比$-\dfrac{1}{2}$の等比数列の第$k$項は，

$$1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

また，項数を$n$とすると，

$\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = -\dfrac{1}{512} = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^9$ より，$n = 10$ であるから，

$$\text{与式} = \boldsymbol{\sum_{k=1}^{10} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}}$$

問 13

（1）与式$= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k^2 - k)$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k$$
$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1)$$
$$= \frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1) - 3\}$$
$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n-2)$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}n(n+1)(n-1)}$$

（2）この数列の第$k$項は，$k(2k+1)$であるから，

$$\text{与式} = \sum_{k=1}^{n} k(2k+1)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} 2k^2 + k$$
$$= 2\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$$
$$= \frac{2}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$$
$$= \frac{1}{6}n(n+1)\{2(2n+1) + 3\}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(4n+5)}$$

（3）この数列の第$k$項は，$(2k-1)^2$であるから，

$$\text{与式} = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (4k^2 - 4k + 1)$$

$$= 4\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= \frac{4}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{4}{2}n(n+1) + n$$

$$= \frac{1}{3}n\{2(n+1)(2n+1) - 6(n+1) + 3\}$$

$$= \frac{1}{3}n\{4n^2 + 6n + 2 - 6n - 6 + 3\}$$

$$= \frac{1}{3}n(4n^2 - 1)$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1)}$$

問 14

（1）$\boldsymbol{a_1 = 1}$，$\boldsymbol{a_{k+1} = 3a_k + 2}$　$(k = 1, 2, 3, \cdots)$

（2）$\boldsymbol{a_1 = 2}$，$\boldsymbol{a_{k+1} = (a_k - 1)^2}$　$(k = 1, 2, 3, \cdots)$

問 15

（1）$a_1 = 1$

$a_2 = {a_1}^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$

$a_3 = {a_2}^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$

$a_4 = {a_3}^2 + 1 = 5^2 + 1 = 26$

よって，**1，2，5，26**

（2）$b_1 = 3$

$b_2 = b_1 + 3 \cdot 1 = 3 + 6 = 6$

$b_3 = b_2 + 3 \cdot 2 = 6 + 6 = 12$

$b_4 = b_3 + 3 \cdot 3 = 12 + 9 = 21$

よって，**3，6，12，21**

問 16

（1）$a_2 = 3a_1 + 4 = 4 \cdot 3 + 4$

$a_3 = 3a_2 + 4$

$= 3(4 \cdot 3 + 4) + 4$

$= 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 4$

$a_4 = 3a_3 + 4$

$= 3(4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 4) + 4$

$= 4 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 4$

よって，

$a_n = 4 \cdot 3^{n-1} + 4 \cdot 3^{n-2} + \cdots + 4 \cdot 3 + 4$

$= 4 + 4 \cdot 3 + \cdots + 4 \cdot 3^{n-2} + 4 \cdot 3^{n-1}$

$$= \frac{4(3^n - 1)}{3 - 1}$$

$$= \frac{4(3^n - 1)}{2}$$

$= 2(3^n - 1)$

$= \boldsymbol{2 \cdot 3^n - 2}$

（2）$b_2 = b_1 + (2 \cdot 1 - 1)$

$= 2 + (2 \cdot 1 - 1)$

$b_3 = b_2 + (2 \cdot 2 - 1)$

$= 2 + (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1)$

$b_4 = b_3 + (2 \cdot 3 - 1)$

$= 2 + (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1)$

よって，

$b_n = 2 + (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1)$

$+ \cdots + \{2(n-1) - 1\}$

ここで，

$(2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) + \cdots$

$$+ \{2(n-1) - 1\} = \sum_{k=1}^{n-1}(2k - 1)$$

と表すことができるので

$$b_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k - 1)$$

$$= 2 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} 1$$

$$= 2 + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} - (n-1)$$

$= 2 + n^2 - n - n + 1$

$= \boldsymbol{n^2 - 2n + 3}$

問 17

$$a_n = \frac{2n + 2}{n}$$ ・・・①とする．

［1］$n = 1$のとき

$$a_1 = \frac{2 \cdot 1 + 2}{1} = 4$$

よって，$n = 1$のとき，①は成り立つ．

［2］$n = k$のとき，①が成り立つと仮定する．

$$a_k = \frac{2k + 2}{k}$$

$n = k + 1$のとき

漸化式より

$$a_{k+1} = 4 - \frac{4}{a_k}$$

$$= 4 - \frac{4}{\frac{2k + 2}{k}}$$

$$= 4 - \frac{2k}{k+1}$$

$$= \frac{4(k+1)}{k+1} - \frac{2k}{k+1}$$

$$= \frac{4k+4-2k}{k+1}$$

$$= \frac{2k+4}{k+1}$$

$$= \frac{2(k+1)+2}{k+1}$$

よって，$n = k+1$のときも①が成り立つ.

[1], [2]から，すべての自然数$n$について①が成り立つ.