練習問題 1-A

1.

往路について

$A \to B$の行き方は，6通り

$B \to C$の行き方は，5通り

復路は，往路と同じ道は通らないので

$C \to B$の行き方は，4通り

$B \to A$の行き方は，5通り

よって，積の法則より，$6 \times 5 \times 4 \times 5 = \mathbf{600}$**通り**

2.

目の出方を（大の目，小の目）で表す．

i）目の和が4のとき

$(1,\ 3)$，$(2,\ 2)$，$(3,\ 1)$の3通り

ii）目の和が8のとき

$(2,\ 6)$，$(3,\ 5)$，$(4,\ 4)$，$(5,\ 3)$，$(6,\ 2)$の5通り

iii）目の和が12のとき

$(6,\ 6)$の1通り

よって，和の法則より，$3 + 5 + 1 = \mathbf{9}$**通り**

3.

（1）最高位（百の位）の数字の選び方は，0以外の7通りあり，残りの2つの位については他の7つの数字から2つをとる順列になるので

$7 \times {}_7\mathrm{P}_2 = 7 \cdot 7 \cdot 6 = \mathbf{294}$**個**

（2）最高位（百の位）の数字の選び方は，0以外の7通りあり，残りの2つの位については他の8つの数字の重複順列になるので

$7 \times 8^2 = \mathbf{448}$**個**

4.

（1）与式 $= \dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 2 \cdot 1}{(n-3)(n-4)(n-5)\cdots 2 \cdot 1}$

$= \boldsymbol{(n-1)(n-2)}$

（2）与式 $= \dfrac{(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1}{(n+1)n(n-1)\cdots 2 \cdot 1}$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{n(n+1)}}$

（3）与式 $= \dfrac{(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdots 2 \cdot 1}{(n-r-1)(n-r-2)\cdots 2 \cdot 1}$

$= \boldsymbol{(n-r)(n-r+1)}$

5.

6個のボールそれぞれについて，入れる箱の選び方は3通りずつあるので

$3^6 = \mathbf{729}$**通り**

6.

横方向の線分の中から2本，縦方向の線分の中から2本を選ぶと1つの平行四辺形ができる．

横方向7本の中から2本の線分の選び方は

${}_7\mathrm{C}_2 = \dfrac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$ 通り

縦方向の6本の中から2本の線分の選び方は

${}_6\mathrm{P}_2 = \dfrac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$ 通り

よって，平行四辺形の個数は，$21 \times 15 = \mathbf{315}$**個**

7.

最初に，7個の位の中から，1を置く3個の位を選ぶと

${}_7\mathrm{C}_3 = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$ 通り

残りの4個の位は，2と3の2つの数字の重複順列であるから，

$35 \times 2^4 = \mathbf{560}$**個**

8.

（1）3が3個，4が2個，5が2個あるので，

$\dfrac{7!}{3!\,2!\,2!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \mathbf{210}$**個**

（2）偶数は，1の位が4のときである．残りの位に並べる数字は，3が3個，4が1個，5が2個であるから

$\dfrac{6!}{3!\,1!\,2!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \mathbf{60}$**個**

9.

この展開式の一般項は

$$ {}_6\mathrm{C}_r(2x^2)^{6-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r = {}_6\mathrm{C}_r 2^{6-r}(-1)^r x^{2(6-r)}\cdot\frac{1}{x^r} $$

$$ = {}_6\mathrm{C}_r 2^{6-r}(-1)^r\cdot\frac{x^{12-2r}}{x^r} $$

$$ = {}_6\mathrm{C}_r 2^{6-r}(-1)^r\cdot x^{12-3r} $$

（１）$x^{12-3r} = x^3$となるのは，$12-3r=3$より，
$r=3$のときであるから，x^3の係数は
${}_6\mathrm{C}_3 2^{6-3}(-1)^3 = 20\cdot 8\cdot(-1) = \mathbf{-160}$

（２）$x^{12-3r} = \dfrac{1}{x^3}$となるのは，$12-3r=-3$ より，
$r=5$ のときであるから，$\dfrac{1}{x^3}$の係数は
${}_6\mathrm{C}_5 2^{6-5}(-1)^5 = 6\cdot 2\cdot(-1) = \mathbf{-12}$

（３）定数項は，$12-3r=0$より，$r=4$のときであるから
${}_6\mathrm{C}_4 2^{6-4}(-1)^4 = 15\cdot 4\cdot 1 = \mathbf{60}$

練習問題 1-B

1.

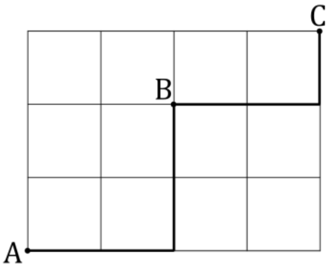
（１）７人の円順列なので
$(7-1)! = 6! = \mathbf{720}$**通り**

（２）女子３人を１組として，男子４人と女子１組での円順列の数は
$(5-1)! = 4! = 24$通り
この各々に対して，女子の並び方は
$3! = 6$通り
よって，$24\times 6 = \mathbf{144}$**通り**

（３）まず，男子４人だけが座ると
$(4-1)! = 3! = 6$通り
の座り方があり，女子３人が, ４か所ある男子の間に順に座っていけばよいので
$6\times {}_4\mathrm{P}_3 = 6\times 4\cdot 3\cdot 2 = \mathbf{144}$**通り**

2.

（１）図の最短経路を－－｜|－－|と表すことにすると，Ａ から Ｂ までの最短経路の数は，縦棒３本，横棒４本を横一列に並べた時の並べ方の総数と一致する．



したがって

$$ \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} $$

$= \mathbf{35}$

（２）A 地点から C 地点までの最短の経路は,

$\dfrac{4!}{2!\,2!} = 6$

C 地点から B 地点までの最短の経路の数は

$\dfrac{3!}{2!\,1!} = 3$

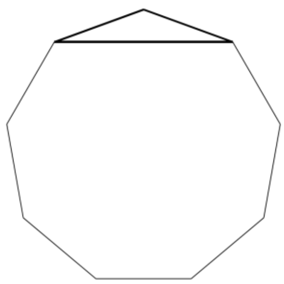
よって, C 地点を通る通路の数は
$6\times 3 = 18$であるから,
C 地点を通らない通路の数は
$35-18 = \mathbf{17}$

3.

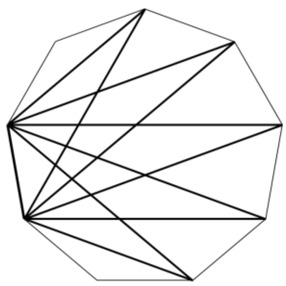
（１）９個の頂点の中から３個を選べば１つの三角形ができるので

${}_9\mathrm{C}_3 = \dfrac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = \mathbf{84}$**個**

（２）図のように，正九角形と２辺を共有する三角形は，１個の頂点に対して１個ずつできるので **9 個**



（３）図のように，正九角形と１辺を共有する三角形は１個の辺に対して５個ずつできるので
$5\times 9 = \mathbf{45}$**個**



（４）以上より，正九角形と辺を共有しない

三角形の個数は

$84-(9+45)=\mathbf{30個}$

4.

（１）まず, 0 が最高位にある場合も含めた数字の列の総数を求めると, 0 が 1 個，1 が 2 個，2 が 2 個，3 が 1 個あるので

$$\frac{6!}{1!\,2!\,2!\,1!}=180$$

次に，最高位が 0 のときの数字の総数は

$$\frac{5!}{2!\,2!\,1!}=30$$

よって，$180-30=\mathbf{150個}$

（２）一の位が 0 の場合と 2 の場合に分けて考える．

i）一の位が 0 のとき

0 以外の 5 個の数字を並べればよいので

$$\frac{5!}{2!\,2!\,1!}=30$$

ii）一の位が 2 のとき

0 が最高位にある場合も含めた数字の列の総数は，0 が 1 個，1 が 2 個，2 が 1 個，3 が 1 個あるので

$$\frac{5!}{1!\,2!\,1!\,1!}=60$$

最高位が 0 のときの数字の列の総数は，1 が 2 個，2 が 1 個，3 が 1 個あるので

$$\frac{4!}{2!\,1!\,1!}=12$$

よって，一の位が 2 のときの偶数の数は，

$60-12=48$

以上より，$30+48=\mathbf{78個}$

5.

二項定理を用いて，$(1+x)^n$を展開すると

$$\begin{aligned}(1+x)^n&={}_n\mathrm{C}_0 1^n+{}_n\mathrm{C}_1 1^{n-1}x\\&\quad+{}_n\mathrm{C}_2 1^{n-2}x^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n x^n\\&={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1 x+{}_n\mathrm{C}_2 x^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n x^n\end{aligned}$$

ここで，$x=1$を代入すると

$$\begin{aligned}(1+1)^n&={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\cdot 1+{}_n\mathrm{C}_2\cdot 1^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\cdot 1^n\\&={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\end{aligned}$$

すなわち，$2^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n$

6.

二項定理と同様の考え方で三項定理を導出すると

$p+q+r=n$のとき

$(a+b+c)^n$の$a^p b^q c^r$の係数は，$\dfrac{n!}{p!\,q!\,r!}$となる．

これを用いると

（１）$\dfrac{(3+2+2)!}{3!\,2!\,2!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1}=\mathbf{210}$

（２）$\dfrac{(5+1+1)!}{5!\,1!\,1!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot1\cdot1}=\mathbf{42}$

（３）$\dfrac{(5+2)!}{5!\,2!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1}=\mathbf{21}$

7.

6.で導出した三項定理より，

$(x^2+x+1)^6$の展開式の一般項は

$$\frac{6!}{p!\,q!\,r!}(x^2)^p x^q\cdot 1^r=\frac{6!}{p!\,q!\,r!}\cdot x^{2p+q}$$

である．（ただし，$p+q+r=6$）

（１）$x^{11}=x^{2p+q}$となるのは

$$\begin{cases}2p+q=11 & \cdot\cdot\cdot①\\ p+q+r=6 & \cdot\cdot\cdot②\end{cases}$$

が成り立つときである．

①－②より，$p-r=5$

また，②より，$q=6-(p+r)$

$q\geqq 0$であるから

$6-(p+r)\geqq 0$

すなわち，$p+r\leqq 6$

よって

$$\begin{cases}p-r=5\\ p+r\leqq 6\end{cases}$$

これを満たすp，rの組を求めると

$(p,\ r)=(5,\ 0)$

したがって

$(p,\ q,\ r)=(5,\ 1,\ 0)$

以上より，x^{11}の係数は

$$\frac{6!}{5!\,1!\,0!}=\mathbf{6}$$

（２）$x^9=x^{2p+q}$となるのは

$$\begin{cases}2p+q=9\\ p+q+r=6\end{cases}$$

が成り立つときであるから,（１）と同様にして

$$\begin{cases} p-r=3 \\ p+r \leqq 6 \end{cases}$$

これを満たすp，rの組を求めると

$(p,\ r)=(4,\ 1),\ (3,\ 0)$

したがって

$(p,\ q,\ r)=(4,\ 1,\ 1),\ (3,\ 3,\ 0)$

以上より，x^9の係数は

$$\frac{6!}{4!\,1!\,1!}+\frac{6!}{3!\,3!\,0!}=30+20=\mathbf{50}$$

（３）$x^6=x^{2p+q}$となるのは

$$\begin{cases} 2p+q=6 \\ p+q+r=6 \end{cases}$$

が成り立つときであるから,（１）と同様にして

$$\begin{cases} p-r=0 \\ p+r \leqq 6 \end{cases}$$

これを満たすp，rの組を求めると

$(p,\ r)=(3,\ 3),\ (2,\ 2),\ (1,\ 1),\ (0,\ 0)$

したがって

$(p,\ q,\ r)=(3,\ 0,\ 3),\ (2,\ 2,\ 2),$

$(1,\ 4,\ 1),\ (0,\ 6,\ 0)$

以上より，x^6の係数は

$$\frac{6!}{3!\,0!\,3!}+\frac{6!}{2!\,2!\,2!}+\frac{6!}{1!\,4!\,1!}+\frac{6!}{0!\,6!\,0!}$$

$$=20+90+30+1=\mathbf{141}$$