7章　場合の数と数列

§1　場合の数（p.204〜p.216）

問1

168を素因数分解すると，

$168 = 2^3 \times 3 \times 7$

各素因数の指数はそれぞれ3，1，1であるから，

約数の個数は，

$(3+1)(1+1)(1+1) = 4 \cdot 2 \cdot 2 = \mathbf{16}$**個**

問2

（１）各因数の指数はそれぞれ3，2，4であるから，

約数の個数は，

$(3+1)(2+1)(4+1) = 4 \cdot 3 \cdot 5 = \mathbf{60}$**個**

（２）$x^5 - x^3 = x^3(x+1)(x-1)$

各因数の指数はそれぞれ3，1，1であるから，

約数の個数は，

$(3+1)(1+1)(1+1) = 4 \cdot 2 \cdot 2 = \mathbf{16}$**個**

問3

$4x + y \leqq 16$より，$y \leqq 16 - 4x$

i）$x = 1$のとき

$1 \leqq y \leqq 12$であるから, 12 個

ii）$x = 2$のとき

$1 \leqq y \leqq 8$であるから, 8 個

iii）$x = 3$のとき

$1 \leqq y \leqq 4$であるから, 4 個

和の法則より，求める個数は，$12 + 8 + 4 = \mathbf{24}$**個**

問4

$3x + y + z = 12$より，$y + z = 12 - 3x$

i）$x = 1$のとき

$y + z = 9$であるから，これを満たす正の整数の

組$(x,\ y)$は

$(1,\ 8)$，$(2,\ 7)$，$(3,\ 6)$，$(4,\ 5)$，

$(5,\ 4)$，$(6,\ 3)$，$(7,\ 2)$，$(8,\ 1)$の８個

ii）$x = 2$のとき

$y + z = 6$であるから，これを満たす正の整数の

組$(y,\ z)$は

$(1,\ 5)$，$(2,\ 4)$，$(3,\ 3)$，$(4,\ 2)$，$(5,\ 1)$の５個

iii）$x = 3$のとき

$y + z = 3$であるから，これを満たす正の整数の

組$(y,\ z)$は

$(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$の２個

和の法則より，求める個数は，$8 + 5 + 2 = \mathbf{15}$**個**

問5

目の出方を（大の目，中の目，小の目）で表す.

i）大の目が1になる場合

$(1,\ 1,\ 1)$の１通り

ii）大の目が2になる場合

$(2,\ 1,\ 2)$，$(2,\ 2,\ 1)$の２通り

iii）大の目が3になる場合

$(3,\ 1,\ 3)$，$(3,\ 3,\ 1)$の２通り

iv）大の目が4になる場合

$(4,\ 1,\ 4)$，$(4,\ 2,\ 2)$，$(4,\ 4,\ 1)$の３通り

v）大の目が5になる場合

$(5,\ 1,\ 5)$，$(5,\ 5,\ 1)$の２通り

vi）大の目が6になる場合

$(6,\ 1,\ 6)$，$(6,\ 2,\ 3)$，$(6,\ 3,\ 2)$，$(6,\ 6,\ 1)$の４通り

和の法則より，求める個数は，

$1 + 2 + 2 + 3 + 2 + 4 = \mathbf{14}$**通り**

問6

（１）与式$= 5 \cdot 4 \cdot 3 = \mathbf{60}$

（２）与式$= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \mathbf{840}$

（３）与式$= \mathbf{6}$

（４）与式$= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{720}$

問7

（１）与式$= 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{6}$

（２）与式$= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{24}$

（３）与式$= \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \mathbf{10}$

（４）与式$= \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-2)(n-3)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} = \boldsymbol{n(n-1)}$

問8

２つの母音a，eを両端に並べるときの並べ方は，$2!$通り

その各々の並べ方に対して，母音の間に並べる残りの 4 文字の並べ方は，4!通り

よって，積の法則より，並べ方の数は，

$2! \times 4! = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = \mathbf{48個}$

問 9

（1） 6 つの部屋から 3 つを選び, A, B, C の順に宿泊する部屋を決めればよいので

$_6\mathrm{P}_3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \mathbf{120通り}$

（2）連続する番号となるような部屋の選び方は，

1-2-3, 2-3-4, 3-4-5, 4-5-6,

の 4 通りあり，その各々の部屋の選び方に対して，3 人の部屋の選び方は，3!通り

よって，積の法則より，$4 \times 3! = \mathbf{24通り}$

問 10

1 つのさいころの目の出方は 6 通りあるから，

$6^3 = \mathbf{216通り}$

問 11

1 人の手の出し方は 3 通りあるから，

$3^4 = \mathbf{81通り}$

問 12

1 つの場所に置く数字は 0, 1 の 2 通りあるから，

$2^{10} = \mathbf{1024通り}$

問 13

（1）与式 $= \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \mathbf{120}$

（2）与式 $= \dfrac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = \mathbf{21}$

（3）与式 $= {}_7\mathrm{P}_2 = \mathbf{21}$

（4）与式 $= \dfrac{n}{1} = \boldsymbol{n}$

（5）与式 $= {}_n\mathrm{P}_0 = \mathbf{1}$

問 14

$$左辺 = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

$$右辺 = \frac{n!}{\{n-(n-r)\}!\,(n-r)!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

よって，左辺=右辺

問 15

（1）$_8\mathrm{C}_3 = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \mathbf{56通り}$

（2）男子を 3 人選ぶ選び方は，（1）より 56 通り.

また，女子 6 人の中から 2 人を選ぶ方法は，

$_6\mathrm{C}_2 = \dfrac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$ 通り

よって，積の法則より，$56 \times 15 = \mathbf{840通り}$

問 16

6 個の点の中から 2 個を選べば 1 つの線分ができるので，線分の数は

$_6\mathrm{C}_2 = \dfrac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = \mathbf{15本}$

6 個の点の中から 3 個を選べば 1 つの三角形ができるので，三角形の数は

$_6\mathrm{C}_3 = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \mathbf{20個}$

問 17

$$\begin{aligned} 左辺 &= {}_7\mathrm{C}_4 + {}_7\mathrm{C}_3 \\ &= {}_6\mathrm{C}_4 + {}_6\mathrm{C}_3 + {}_6\mathrm{C}_3 + {}_6\mathrm{C}_2 \\ &= {}_6\mathrm{C}_2 + 2{}_6\mathrm{C}_3 + {}_6\mathrm{C}_4 = 右辺 \end{aligned}$$

問 18

1 が 4 個，2 が 3 個，3 が 1 個あるから，

求める整数の個数は，

$\dfrac{8!}{4!\,3!\,1!} = \mathbf{280個}$

問 19

同じものが，3 個，1 個，2 個ずつあるので，

求める並べ方の個数は，

$\dfrac{6!}{3!\,1!\,2!} = \mathbf{60通り}$

青玉 2 個を 1 組とすると，赤玉 3 個，白玉 1 個，青玉 1 組の並べ方の個数は，

$\dfrac{5!}{3!\,1!\,1!} = \mathbf{20通り}$

$\boxed{問 20}$

（１）６人の円順列なので

$(6-1)! = 5! = \mathbf{120通り}$

（２）男子３人の並び方は，３人の円順列であるから

$(3-1)! = 2! = 2$

また，３人の女子が３か所ある男子の間に

並んでいけばよいから

$2 \times 3! = 2 \cdot 6 = \mathbf{12通り}$

$\boxed{問 21}$

（１）与式$= {}_6\mathrm{C}_0 a^6 + {}_6\mathrm{C}_1 a^5 \cdot 1 + {}_6\mathrm{C}_2 a^4 \cdot 1^2 + {}_6\mathrm{C}_3 a^3 \cdot 1^3$

$+ {}_6\mathrm{C}_4 a^2 \cdot 1^4 + {}_6\mathrm{C}_5 a \cdot 1^5 + {}_6\mathrm{C}_6 1^6$

$= \boldsymbol{a^6 + 6a^5 + 15a^4 + 20a^3 + 15a^2 + 6a + 1}$

（２）与式$= {}_4\mathrm{C}_0 a^4 + {}_4\mathrm{C}_1 a^3 \cdot 3b + {}_4\mathrm{C}_2 a^2 \cdot (3b)^2$

$+ {}_4\mathrm{C}_3 a \cdot (3b)^3 + {}_4\mathrm{C}_4 (3b)^4$

$= \boldsymbol{a^4 + 12a^3 b + 54a^2 b^2 + 108ab^3 + 81b^4}$

（３）与式$= {}_7\mathrm{C}_0 x^7 + {}_7\mathrm{C}_1 x^6 \cdot (-1) + {}_7\mathrm{C}_2 x^5 \cdot (-1)^2$

$+ {}_7\mathrm{C}_3 x^4 \cdot (-1)^3 + {}_7\mathrm{C}_4 x^3 \cdot (-1)^4$

$+ {}_7\mathrm{C}_5 x^2 \cdot (-1)^5 + {}_7\mathrm{C}_6 x \cdot (-1)^6 + {}_7\mathrm{C}_7 \cdot (-1)^7$

$= \boldsymbol{x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4}$

$\boldsymbol{+35x^3 - 21x^2 + 7x - 1}$

$\boxed{問 22}$

この展開式の一般項は，

$${}_8\mathrm{C}_r \left(\frac{x}{2}\right)^{8-r} (-2y)^r = {}_8\mathrm{C}_r \left(\frac{1}{2}\right)^{8-r} (-2)^r x^{8-r} y^r$$

$x^{8-r}y^r = x^5y^3$となるのは，$r = 3$のときであるから，

求める係数は

$${}_8\mathrm{C}_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{8-3} (-2)^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1}\left(\frac{1}{2}\right)^5 (-2)^3 = \mathbf{-14}$$