練習問題 1-A

1.

求める点Pの座標を，$(x,\ 0)$とする．

また，$2\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$より，$4\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$であるから

$$4\{(x-1)^2+(0+1)^2\}=(x+5)^2+(0-2)^2$$

$$4(x^2-2x+1+1)=x^2+10x+25+4$$

$$4x^2-8x+8=x^2+10x+29$$

$$3x^2-18x-21=0$$

$$x^2-6x-7=0$$

$$(x+1)(x-7)=0$$

よって，$x=-1,\ 7$

したがって，求める点Pの座標は，$\boldsymbol{(-1,\ 0)}$，$\boldsymbol{(7,\ 0)}$

2.

点$(3,\ 0)$を A，点$(2,\ 7)$を B，点$(-4,\ -1)$を C，

求める点の座標を$\mathrm{P}(x,\ y)$とする．

$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}$より，$\mathrm{PA}^2=\mathrm{PB}^2$であるから

$$(x-3)^2+y^2=(x-2)^2+(y-7)^2$$

整理すると，$x-7y=-22$・・・①

$\mathrm{PA}=\mathrm{PC}$より，$\mathrm{PA}^2=\mathrm{PC}^2$であるから

$$(x-3)^2+y^2=(x+4)^2+(y+1)^2$$

整理すると，$7x+y=-4$・・・②

①，②を連立させて解くと，

$x=-1,\ y=3$

よって，求める点の座標は，$\boldsymbol{(-1,\ 3)}$

3.

2 点を結ぶ線分を 3：1 に内分する点の座標は

$$\left(\frac{3\cdot 2+1\cdot a}{1+3},\ \frac{3\cdot 5+1\cdot b}{1+3}\right)=\left(\frac{6+a}{4},\ \frac{15+b}{4}\right)$$

である．この点が$(1,\ 4)$であるから

$\dfrac{6+a}{4}=1$ より，$a=-2$

$\dfrac{15+b}{4}=4$ より，$b=1$

よって，$\boldsymbol{a=-2}$，$\boldsymbol{b=1}$

4.

3 点を頂点とする三角形の重心の座標は

$$\left(\frac{3+(-1)+a}{3},\ \frac{1+6+2}{3}\right)=\left(\frac{2+a}{3},\ 3\right)$$

である．この点が直線$y=x+1$上にあるから，

xとyをそれぞれ代入して

$$3=\frac{2+a}{3}+1$$

これを解いて，$\boldsymbol{a=4}$

5.

（1）直線 AB の傾きは

$$\frac{-2-3}{5-2}=-\frac{5}{3}$$

よって，線分 AB の垂直二等分線の傾きは，$\dfrac{3}{5}$である．

また，線分 AB の中点の座標は，

$$\left(\frac{2+5}{2},\ \frac{3+(-2)}{2}\right)=\left(\frac{7}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

したがって，求める直線の方程式は，

$$y-\frac{1}{2}=\frac{3}{5}\left(x-\frac{7}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{y=\frac{3}{5}x-\frac{8}{5}}$$

または，

$\boldsymbol{3x-5y-8=0}$

（2）与えられた 2 点を通る直線の傾きは

$$\frac{-3-1}{4-(-1)}=-\frac{4}{5}$$

よって，求める直線の傾きは，$-\dfrac{4}{5}$であるから，

その方程式は

$$y-(-2)=-\frac{4}{5}(x-1)$$

$$\boldsymbol{y=-\frac{4}{5}x-\frac{6}{5}}$$

または，

$\boldsymbol{4x+5y+6=0}$

（３）２直線の交点の座標は

$$\begin{cases} 3x-4y-5=0 \\ 2x+y-7=0 \end{cases}$$

を解いて，$(x,\ y)=(3,\ 1)$

また，直線$2x-3y+1=0$の傾きは

$y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$より，$\frac{2}{3}$

したがって，求める直線の方程式は

$$y-1=\frac{2}{3}(x-3)$$

$$\boldsymbol{y=\frac{2}{3}x-1}$$

または，

$$\boldsymbol{2x-3y-3=0}$$

6.

２点を結ぶ線分を２：１に内分する点の座標は

$$\left(\frac{1\cdot(-2)+2\cdot 7}{2+1},\ \frac{1\cdot 4+2\cdot 1}{2+1}\right)=\left(\frac{12}{3},\ \frac{6}{3}\right)$$

$$=(4,\ 2)$$

また，２点を結ぶ直線の傾きは

$$\frac{1-4}{7-(-2)}=\frac{-3}{9}=-\frac{1}{3}$$

よって，求める直線の傾きは，3であるから，

その方程式は

$$y-2=3(x-4)$$

$$\boldsymbol{y=3x-10}$$

または，

$$\boldsymbol{3x-y-10=0}$$

7.

２直線$2x-3y+8=0$，$x-4y+9=0$の

交点の座標は

$$\begin{cases} 2x-3y+8=0 \\ \ \ x-4y+9=0 \end{cases}$$

を解いて，$(x,\ y)=(-1,\ 2)$

直線$kx-2y+1=0$がこの交点を通ればよいので

$$k\cdot(-1)-2\cdot 2+1=0$$

$$-k-3=0$$

よって，$\boldsymbol{k=-3}$

8.

$b\neq 0$，$b'\neq 0$であるから

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

$$y=-\frac{a'}{b'}x-\frac{c'}{b'}$$

（１）２直線が平行または一致の条件は，

傾きが等しいことであるから

$$-\frac{a}{b}=-\frac{a'}{b'}$$

すなわち，$ab'=a'b$

（２）２直線が垂直の条件は，傾きの積が-1に

なることであるから

$$-\frac{a}{b}\cdot\left(-\frac{a'}{b'}\right)=-1$$

$$\frac{aa'}{bb'}=-1$$

$$aa'=-bb'$$

すなわち，$aa'+bb'=0$

練習問題 1-B

1.

i）$m+1=0$，すなわち$m=-1$のとき

２直線の式は

$2x-1=0$，$-x+2y+2=0$

となるので，２直線は平行ではない．

ii）$m+3=0$，すなわち$m=-3$のとき

２直線の式は

$2x-2y-3=0$，$-3x+2=0$

となるので，２直線は平行ではない．

iii）$m\neq -1$ かつ $m\neq -3$のとき

２直線が平行となるための条件は，

前ページの **8.**より

$$2\cdot(m+3)=m\cdot(m+1)$$

である．これを解くと

$$2m+6=m^2+m$$

$$m^2-m-6=0$$

$$(m-3)(m+2)=0$$

$$m=3,\ -2$$

$m=3$のとき，２直線の式は

$$2x+4y+3=0\ \ \rightarrow\ \ y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$$

$$3x+6y+2=0\ \ \rightarrow\ \ y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}$$

となるので２直線は平行である．

$m=-2$のとき，２直線の式は

$2x-y-2=0 \quad \to \quad y=2x-2$

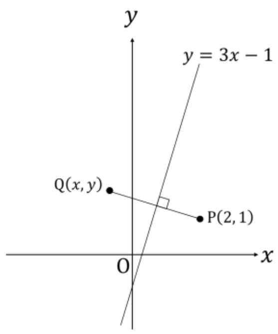
$-2x+y+2=0 \quad \to \quad y=2x-2$

となるので２直線は一致する．

よって，$\boldsymbol{m=3}$

2.

点(2，1)をP，求める点の座標をQ(x，y)とする．



直線PQは$y=3x-1$と垂直で，

その傾きは$\dfrac{y-1}{x-2}$であるから

$$3\cdot\frac{y-1}{x-2}=-1$$

$$3(y-1)=-(x-2)$$

すなわち，

$x+3y=5$・・・①

また，線分 PQ の中点は，$\left(\dfrac{x+2}{2}，\dfrac{y+1}{2}\right)$で

この点は直線$y=3x-1$上にあるので

$$\frac{y+1}{2}=3\cdot\frac{x+2}{2}-1$$

$$y+1=3(x+2)-2$$

すなわち，

$3x-y=-3$・・・②

①，②を連立させて解くと

$$\begin{cases}x+3y=5\\3x-y=-3\end{cases}$$

$$x=-\frac{2}{5}，\ y=\frac{9}{5}$$

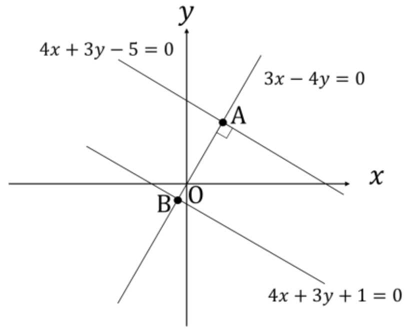
よって，$\left(\boldsymbol{-\dfrac{2}{5}}，\boldsymbol{\dfrac{9}{5}}\right)$

3.

２直線に垂直で，原点を通る直線の方程式は

$3x-4y=0$

である．図のように，この直線と与えられた２直線との交点をそれぞれ, A, B とすると，線分 AB の長さが求める長さである．



点 A の座標は

$$\begin{cases}4x+3y-5=0\\3x-4y=0\end{cases}$$

を解いて，$(x，y)=\left(\dfrac{4}{5}，\dfrac{3}{5}\right)$

点 B の座標は

$$\begin{cases}4x+3y+1=0\\3x-4y=0\end{cases}$$

を解いて，$(x，y)=\left(-\dfrac{4}{25}，-\dfrac{3}{25}\right)$

よって

$$\begin{aligned}AB&=\sqrt{\left(-\frac{4}{25}-\frac{4}{5}\right)^2+\left(-\frac{3}{25}-\frac{3}{5}\right)^2}\\&=\sqrt{\left(-\frac{24}{25}\right)^2+\left(-\frac{18}{25}\right)^2}\\&=\sqrt{\frac{24^2+18^2}{25^2}}\\&=\sqrt{\frac{(6\cdot4)^2+(6\cdot3)^2}{25^2}}\\&=\sqrt{\frac{6^2(4^2+3^2)}{25^2}}\\&=\frac{6}{25}\sqrt{25}\\&=\frac{6}{5}\end{aligned}$$

したがって，求める線分の長さは，$\boldsymbol{\dfrac{6}{5}}$

【別解】このページの **6.**の方法を用いる．

点(−1，1)は，直線$4x+3y+1=0$上の点である．

求める線分の長さは，この点と直線$4x+3y-5=0$との距離と等しいから

$$\frac{|4\cdot(-1)+3\cdot1+(-5)|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|-6|}{\sqrt{25}}=\boldsymbol{\frac{6}{5}}$$

4.

$\triangle$ ABCの重心の座標は

$\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$である．

$m>0$，$n>0$より，$m+n\neq 0$であるから，

点P，Q，Rの座標はそれぞれ

$$P\left(\frac{nx_2+mx_3}{m+n},\ \frac{ny_2+my_3}{m+n}\right)$$

$$Q\left(\frac{nx_3+mx_1}{m+n},\ \frac{ny_3+my_1}{m+n}\right)$$

$$R\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$$

となる．$\triangle$ PQRの重心の座標を$(g_x,\ g_y)$とすると

$$g_x=\frac{\dfrac{nx_2+mx_3}{m+n}+\dfrac{nx_3+mx_1}{m+n}+\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n}}{3}$$

$$=\frac{\dfrac{m(x_1+x_2+x_3)+n(x_1+x_2+x_3)}{m+n}}{3}$$

$$=\frac{(m+n)(x_1+x_2+x_3)}{3(m+n)}$$

$$=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$g_y=\frac{\dfrac{ny_2+my_3}{m+n}+\dfrac{ny_3+my_1}{m+n}+\dfrac{ny_1+my_2}{m+n}}{3}$$

$$=\frac{\dfrac{m(y_1+y_2+y_3)+n(y_1+y_2+y_3)}{m+n}}{3}$$

$$=\frac{(m+n)(y_1+y_2+y_3)}{3(m+n)}$$

$$=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

よって，$\triangle$ PQRの重心の座標も

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

となるので，２つの三角形の重心は一致する．

5.

（１）

i）$ab\neq 0$のとき

直線OHは直線lに垂直なので，その方程式は

$bx-ay=0$

となる．

点Hはこの直線とlの交点である．

$$\begin{cases} ax+by+c=0 & \cdots ① \\ bx-ay=0 & \cdots ② \end{cases}$$

を解くと

$$\begin{array}{lrl} ①\times a & & a^2x+aby=-ac \\ ②\times b & +) & b^2x-aby=0 \\ \hline & & (a^2+b^2)x=-ac \end{array}$$

$$x=-\frac{ac}{a^2+b^2}\quad\cdots ③$$

②より，$y=\dfrac{b}{a}x$

これに③を代入して

$$y=\frac{b}{a}\cdot\left(-\frac{ac}{a^2+b^2}\right)=-\frac{bc}{a^2+b^2}$$

よって，点Hの座標は

$$\left(-\frac{ac}{a^2+b^2},\ -\frac{bc}{a^2+b^2}\right)\quad\cdots ④$$

ii）$a=0$，$b\neq 0$のとき

直線の式は，$y=-\dfrac{c}{b}$となるので，点 H の座標は，

$\left(0,\ -\dfrac{c}{b}\right)$となり，④はこれを満たす．

iii）$a\neq 0$，$b=0$のとき

直線の式は，$y=-\dfrac{c}{a}$となるので，点 H の座標は，

$\left(-\dfrac{c}{a},\ 0\right)$となり，④はこれを満たす．

以上より，点Hの座標は

$$\left(-\boldsymbol{\frac{ac}{a^2+b^2}},\ -\boldsymbol{\frac{bc}{a^2+b^2}}\right)$$

（２）$$\mathrm{OH}=\sqrt{\left(-\frac{ac}{a^2+b^2}\right)^2+\left(-\frac{bc}{a^2+b^2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2c^2+b^2c^2}{(a^2+b^2)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{c^2(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{c^2}{a^2+b^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{c^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

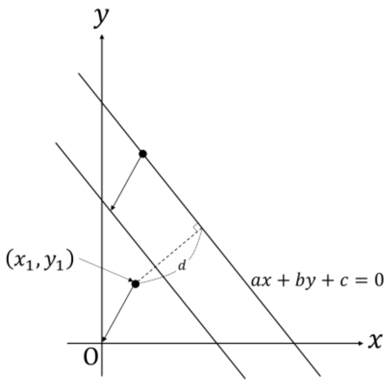
6.

与えられた点と直線を，x軸方向に$-x_1$，

y軸方向に$-y_1$だけ平行移動すると，点$(x_1,\ y_1)$は

原点に，直線は$a(x+x_1)+b(y+y_1)+c=0$に

移る．



移動した直線の方程式を整理すると

$$ax+ax_1+by+by_1+c=0$$

$$ax+by+(ax_1+by_1+c)=0$$

dは，この直線と原点との距離に等しいので，

5.より

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

である．