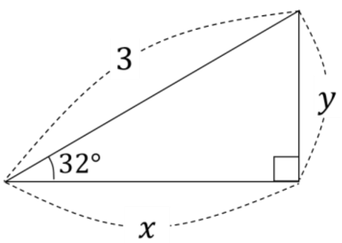
練習問題 1-A

1.

（1）



$\cos 32° = \dfrac{x}{3}$ だから

$x = 3 \cdot \cos 32°$

$= 3 \cdot 0.8480$

$= 2.544 \approx \mathbf{2.54}$

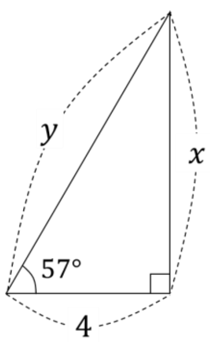
$\sin 32° = \dfrac{y}{3}$ だから

$y = 3 \cdot \sin 32°$

$= 3 \cdot 0.5299$

$= 1.5897 \approx \mathbf{1.59}$

（2）



$\tan 57° = \dfrac{x}{4}$ だから

$x = 4 \cdot \tan 57°$

$= 4 \cdot 1.5399$

$= 6.1596 \approx \mathbf{6.16}$

$\cos 57° = \dfrac{4}{y}$ だから

$y = \dfrac{4}{\cos 57°}$

$= \dfrac{4}{0.5446}$

$= 7.3448 \ldots \approx \mathbf{7.34}$

2.

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ より

$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$

$= 1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2$

$= 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25}$

α は鈍角であるから，$\cos \alpha < 0$

$\cos \alpha = -\sqrt{\dfrac{16}{25}} = -\dfrac{4}{5}$

また

$\tan \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

$= \dfrac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\dfrac{3}{4}$

よって

$\dfrac{5\cos \alpha - 2}{8\tan \alpha + 7} = \dfrac{5 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) - 2}{8 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + 5}$

$= \dfrac{-4-2}{-6+5} = \dfrac{-6}{-1} = \mathbf{6}$

3.

（1）左辺$= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)$

$= 1 \cdot (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)$

$= \{(1 - \cos^2 \theta) - \cos^2 \theta\}$

$= 1 - 2\cos^2 \theta =$右辺

【別解】

左辺$= (\sin^2 \theta)^2 - \cos^4 \theta$

$= (1 - \cos^2 \theta)^2 - \cos^4 \theta$

$= 1 - 2\cos^2 \theta + \cos^4 \theta - \cos^4 \theta$

$= 1 - 2\cos^2 \theta =$右辺

（2）左辺 $= \left(\dfrac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)^2 + \left\{1 - \left(\dfrac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)^4\right\}\cos^2 \theta$

$= \dfrac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \left(1 - \dfrac{\sin^4 \theta}{\cos^4 \theta}\right)\cos^2 \theta$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^4\theta - \sin^4\theta}{\cos^4\theta}\cdot\cos^2\theta$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^4\theta - \sin^4\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + (\cos^2\theta + \sin^2\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + 1\cdot(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$= 1 =$ 右辺

【別解】

左辺$= \tan^2\theta + (1-\tan^2\theta)(1+\tan^2\theta)\cos^2\theta$

$$= \tan^2\theta + (1-\tan^2\theta)\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\cos^2\theta$$

$= \tan^2\theta + (1-\tan^2\theta)\cdot 1$

$= \tan^2\theta + 1 - \tan^2\theta$

$= 1 =$右辺

4.

（１）$C = 180^\circ - (A+B)$

$= 180^\circ - (85^\circ + 65^\circ) = 30^\circ$

正弦定理より，$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$であるから

$$a = \frac{c}{\sin C}\cdot\sin A$$

$$= \frac{5}{\sin 30^\circ}\cdot\sin 85^\circ$$

$$= \frac{5}{\frac{1}{2}}\cdot 0.9962$$

$= 10\cdot 0.9962$

$= 9.962$

よって，$\boldsymbol{a = 9.96}$

同様に

$$b = \frac{c}{\sin C}\cdot\sin B$$

$= 10\cdot\sin 65^\circ$

$= 10\cdot 0.9063$

$= 9.063$

よって，$\boldsymbol{b = 9.06}$

（２）余弦定理より

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$= \frac{4^2+3^2-\left(\sqrt{37}\right)^2}{2\cdot 4\cdot 3}$$

$$= \frac{25-37}{24}$$

$$= \frac{-12}{24} = -\frac{1}{2}$$

よって，$\boldsymbol{C = 120^\circ}$

5.

（１）正弦定理より

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$であるから

$$\sin A = \frac{a}{2R}$$

$$\sin B = \frac{b}{2R}$$

また、余弦定理より

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

これらを与えられた等式に代入すると

$$\boldsymbol{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{\frac{a}{2R}}{\frac{b}{2R}}}$$

（２）（１）より

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{\frac{a}{2R}}{\frac{b}{2R}}$$

右辺を約分して整理すると

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2a} = a$$

両辺に$2a$をかけて

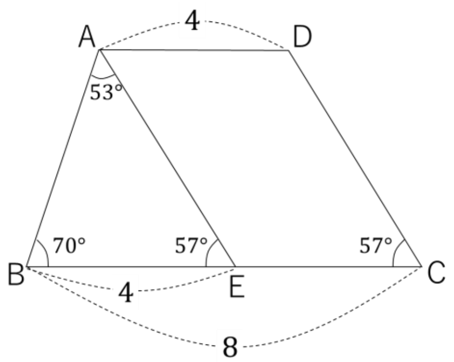
$a^2+b^2-c^2 = 2a^2$

$b^2 = c^2 + a^2$

よって，$\triangle$ ABCは，$\boldsymbol{B = 90^\circ}$**の直角三角形.**

6.

点 A を通り辺 CD に平行な直線と辺 BC との交点を E とする.



$\triangle$ ABEにおいて

$\angle \mathrm{BAE} = 180° - (70° + 57°) = 53°$，$\mathrm{BE} = 4$

正弦定理より，$\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin 57°} = \dfrac{4}{\sin 53°}$

よって

$$\mathrm{AB} = \frac{4}{\sin 53°} \cdot \sin 57°$$

$$= \frac{4}{0.7986} \cdot 0.8387$$

$$= 4.2008 \ldots \approx \mathbf{4.2}$$

点 A から辺 BC に垂線 AH を引くと，

$\sin 70° = \dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AB}}$であるから

$$\mathrm{AH} = \mathrm{AB} \cdot \sin 70°$$

$$= 4.20 \cdot 0.9397$$

$$= 3.94674 \approx 3.947$$

よって，台形の面積は

$$\frac{1}{2}(4 + 8) \cdot 3.947 = 6 \cdot 3.947$$

$$= 23.682 \approx \mathbf{23.7}$$

練習問題 1-B

1.

$\triangle$ ABCは二等辺三角形なので

$$\angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{ACB} = \frac{180° - 36°}{2}$$

$$= \frac{144°}{2} = 72°$$

BDは，∠ABCの二等分線なので

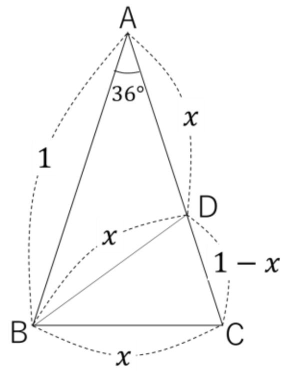
$$\angle \mathrm{ABD} = \angle \mathrm{DBC} = \frac{1}{2} \times 72° = 36°$$

また，$\angle \mathrm{BDC} = 36° + 36° = 72°$

したがって，$\triangle$ DAB，$\triangle$ BCDは二等辺三角形であるから

$\mathrm{AD} = \mathrm{BD} = \mathrm{BC} = x$

よって，$\mathrm{DC} = 1 - x$



また，$\triangle$ ABC∽$\triangle$ BCDであるから

$\mathrm{AB} : \mathrm{BC} = \mathrm{BC} : \mathrm{CD}$

すなわち，$1 : x = x : (1 - x)$

$x^2 = 1 - x$

$x^2 + x - 1 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2}$$

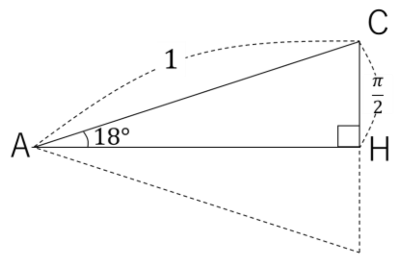
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$x > 0$であるから，

$$x = \boldsymbol{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}$$

（２）頂点 A から底辺 BC に垂線 AH を引くと，

AH は∠BACを二等分するので，$\angle \mathrm{CAH} = 18°$.



$\triangle$ CAH において，$\sin 18° = \dfrac{\frac{x}{2}}{1} = \dfrac{x}{2}$であるから

$$\sin 18° = \frac{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}{2}$$

$$= \boldsymbol{\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}}$$

2.

与式を変形して

$\sin(\alpha - 90°) = \sin\big(90° - (180° - \alpha)\big)$

αは鈍角であるから，$180° - \alpha < 90°$

よって，余角の関係より

$\sin\big(90° - (180° - \alpha)\big) = \cos(180° - \alpha)$

また，補角の関係より

$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$

以上より，$\sin(\alpha - 90°) = -\cos\alpha$・・・①

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$より，

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$
$$= 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2$$
$$= 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$$

αは鈍角であるから，$\cos\alpha < 0$

$$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{21}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$$

①より，

$$\sin(\alpha - 90°) = -\left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{21}}{5}}$$

3.

△ABCの外接円の半径をRとすると正弦定理より，

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$であるから，

$$\sin A = \frac{a}{2R},\ \sin B = \frac{b}{2R},\ \sin C = \frac{c}{2R}$$

これらを等式の左辺に代入すると

$$左辺 = (b-c)\frac{a}{2R} + (c-a)\frac{b}{2R} + (a-b)\frac{c}{2R}$$
$$= \frac{(b-c)a + (c-a)b + (a-b)c}{2R}$$
$$= \frac{ba - ca + cb - ab + ac - bc}{2R}$$
$$= \frac{0}{2R} = 0 = 右辺$$

4.

余弦定理より

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

これらを等式に代入すると

$$a \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + b \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = c \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

両辺に$2abc$をかけて整理すると

$$a^2(b^2 + c^2 - a^2) + b^2(c^2 + a^2 - b^2) = c^2(a^2 + b^2 - c^2)$$
$$a^2b^2 + a^2c^2 - a^4 + b^2c^2 + b^2a^2 - b^4 = c^2a^2 + c^2b^2 - c^4$$
$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - c^4 = 0$$
$$(a^2 - b^2)^2 - c^4 = 0$$
$$\{(a^2 - b^2) + c^2\}\{(a^2 - b^2) - c^2\} = 0$$
$$(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 - b^2 - c^2) = 0$$

よって，$a^2 - b^2 + c^2 = 0$または，$a^2 - b^2 - c^2 = 0$

i）$a^2 - b^2 + c^2 = 0$のとき

$a^2 + c^2 = b^2$であるから，△ABCは

ACを斜辺とする($\boldsymbol{B = 90°}$の)直角三角形

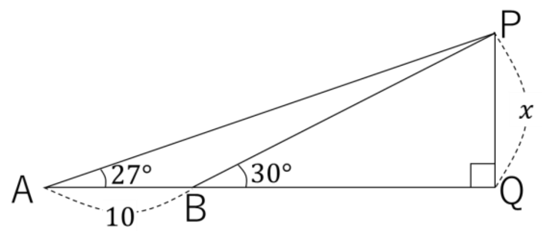
ii）$a^2 - b^2 - c^2 = 0$のとき

$b^2 + c^2 = a^2$であるから，△ABCは

BCを斜辺とする($\boldsymbol{A = 90°}$の)直角三角形

5.

図のように，木が立っている地点をQ，点 A から 10m 進んだ地点を B とし，$\mathrm{PQ} = x$(m)とする．



△PBQにおいて

$$\tan 30° = \frac{x}{\mathrm{BQ}}$$・・・①

△PAQにおいて

$$\tan 27° = \frac{x}{10 + \mathrm{BQ}}$$・・・②

①より，$x = \mathrm{BQ} \cdot \tan 30° = \dfrac{\mathrm{BQ}}{\sqrt{3}}$

すなわち，$\mathrm{BQ} = \sqrt{3}x$

②より，$x = (10 + \mathrm{BQ})\tan 27°$

よって

$$x = (10 + \sqrt{3}x)\tan 27°$$

巻末の表より，$\tan 27° = 0.5095$であるから

$$x = 0.5095(10 + \sqrt{3}x)$$
$$x = 5.095 + 0.5095\sqrt{3}x$$
$$(1 - 0.5095\sqrt{3})x = 5.095$$

$$x=\frac{5.095}{1-0.5095\sqrt{3}}$$

$$=\frac{5.095}{1-0.5095\cdot 1.732}$$

$$=\frac{5.095}{1-0.8825}$$

$$=\frac{5.095}{0.1175}$$

$$=43.3617\ldots\approx 43.36$$

これは，観測者の目の高さからの木の高さなので，

目の高さを足して

$43.36+1.6=44.96\approx 45.0$

よって，**木の高さは45.0m**

6.

$A+B+C=180°$より，$B+C=180°-A$

よって，$\sin(B+C)=\sin(180°-A)=\sin A$

正弦定理より，

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$であるから

$$右辺=\frac{a^2\cdot\frac{b}{2R}\cdot\sin C}{2\cdot\frac{a}{2R}}$$

$$=\frac{ab\sin C}{2}=\frac{1}{2}ab\sin C=S=左辺$$

7.

（１）余弦定理より

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$\sin^2 A+\cos^2 A=1$，$\sin A>0$であるから

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{(2bc)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{\{2bc+(b^2+c^2-a^2)\}\{2bc-(b^2+c^2-a^2)\}}}{2bc}$$

$$=\frac{\sqrt{\{(b^2+2bc+c^2)-a^2\}\{a^2-(b^2-2bc+c^2)\}}}{2bc}$$

$$=\frac{\sqrt{\{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\}}}{2bc}$$

$$=\frac{\sqrt{\{(b+c)+a\}\{(b+c)-a\}\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}}}{2bc}$$

$$=\frac{\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2bc}$$

（２）$s=\dfrac{a+b+c}{2}$より，$a+b+c=2s$

よって

$b+c-a=a+b+c-2a$

$=2s-2a=2(s-a)$

$a+b-c=a+b+c-2c$

$=2s-2c=2(s-c)$

$a-b+c=a+b+c-2b$

$=2s-2b=2(s-b)$

ここで，（１）と面積の公式より

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

$$=\frac{1}{2}bc\cdot\frac{\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2bc}$$

$$=\frac{\sqrt{2s\cdot 2(s-a)\cdot 2(s-c)\cdot 2(s-b)}}{4}$$

$$=\frac{4\sqrt{s(s-a)(s-c)(s-b)}}{4}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$