練習問題 2-A

1.

（１）指数を用いた形に書き換えると

$3^3 = x$

よって，$\boldsymbol{x = 27}$

【別解】

$\log_3 x = 3\log_3 3$

$= \log_3 3^3 = \log_3 27$

よって，$\boldsymbol{x = 27}$

（２）指数を用いた形に書き換えると

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = x$

$x = (3^{-1})^{-1} = 3^1$

よって，$\boldsymbol{x = 3}$

【別解】

$\log_{\frac{1}{3}} x = -\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$

$= \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

$= \log_{\frac{1}{3}} (3^{-1})^{-1}$

$= \log_{\frac{1}{3}} 3^1 = \log_{\frac{1}{3}} 3$

よって，$\boldsymbol{x = 3}$

（３）指数を用いた形に書き換えると

$8^{\frac{2}{3}} = x$

$x = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2$

よって，$\boldsymbol{x = 4}$

【別解】

$\log_8 x = \frac{2}{3}\log_8 8$

$= \log_8 8^{\frac{2}{3}}$

$= \log_8 (2^3)^{\frac{2}{3}}$

$= \log_8 2^2$

$= \log_8 4$

よって，$\boldsymbol{x = 4}$

（４）指数を用いた形に書き換えると

$x^4 = 16$

$x^4 = 2^4$

よって，$\boldsymbol{x = 2}$

【別解】

$\log_x 16 = 4\log_x x$

$\log_x 2^4 = \log_x x^4$

よって，$\boldsymbol{x = 2}$

（５）指数を用いた形に書き換えると

$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{4}$

$x^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{4}}$

$x^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{4}}$

$x^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$

よって，$\boldsymbol{x = 2}$

【別解】

$\log_x 4^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\log_x x$

$\log_x (2^2)^{\frac{1}{4}} = \log_x x^{\frac{1}{2}}$

$\log_x 2^{\frac{1}{2}} = \log_x x^{\frac{1}{2}}$

よって，$\boldsymbol{x = 2}$

（６）指数を用いた形に書き換えると

$\left(\sqrt{3}\right)^x = \frac{1}{27}$

$\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = \frac{1}{3^3}$

$3^{\frac{1}{2}x} = 3^{-3}$

よって，$\frac{1}{2}x = -3$，すなわち，$\boldsymbol{x = -6}$

【別解】

$\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27} = x\log_{\sqrt{3}} \sqrt{3}$

$\log_{\sqrt{3}} \left(\sqrt{3}\right)^{-6} = \log_{\sqrt{3}} \left(\sqrt{3}\right)^x$

よって，$\boldsymbol{x = -6}$

2.

（１）与式 $= \log_2 10 + \log_2 20 - \log_2 5^2$

$= \log_2 \frac{10 \cdot 20}{25}$

$= \log_2 8$

$= \log_2 2^3$

$= 3\log_2 2$

$= 3 \cdot 1 = \mathbf{3}$

（２）与式 $= \log_6 \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} + \log_6 \frac{1}{4}$

$= \log_6 \frac{2}{3} + \log_6 \frac{1}{4}$

$= \log_6 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}\right)$

$= \log_6 \frac{1}{6}$

$= \log_6 6^{-1}$

$= -\log_6 6$

$= \mathbf{-1}$

（３）底を3にそろえる．

与式 $= \log_3 5^2 \cdot \frac{\log_3 9}{\log_3 4} \cdot \frac{\log_3 8}{\log_3 5}$

$= 2\log_3 5 \cdot \frac{\log_3 3^2}{\log_3 2^2} \cdot \frac{\log_3 2^3}{\log_3 5}$

$= 2\log_3 5 \cdot \frac{2\log_3 3}{2\log_3 2} \cdot \frac{3\log_3 2}{\log_3 5}$

$= 2 \cdot 3 = \mathbf{6}$

3.　底を2に変換する．

$\log_6 9 = \frac{\log_2 9}{\log_2 6}$

$= \frac{\log_2 3^2}{\log_2 2 \cdot 3}$

$= \frac{2\log_2 3}{\log_2 2 + \log_2 3}$

$= \boldsymbol{\frac{2m}{1+m}}$

4.

（１）$\log_3 4 = \log_3 \sqrt{16}$

$2 = \log_3 3^2 = \log_3 9 = \log_3 \sqrt{81}$

$\log_3 \sqrt{45}$

$\frac{1}{2}\log_3 50 = \log_3 50^{\frac{1}{2}} = \log_3 \sqrt{50}$

$y = \log_3 x$は，単調に増加するので

$\log_3 \sqrt{81} > \log_3 \sqrt{50} > \log_3 \sqrt{45} > \log_3 \sqrt{16}$

よって

$\mathbf{2}$，$\boldsymbol{\frac{1}{2}\log_3 50}$，$\boldsymbol{\log_3 \sqrt{45}}$，$\boldsymbol{\log_3 4}$

（２）$\sqrt{3} > \sqrt[6]{6} > \sqrt[3]{2}$

$y = \log_{0.5} x$は，単調に減少するので

$\log_{0.5} \sqrt[3]{2} > \log_{0.5} \sqrt[6]{6} > \log_{0.5} \sqrt{3}$

よって

$\boldsymbol{\log_{0.5} \sqrt[3]{2}}$，$\boldsymbol{\log_{0.5} \sqrt[6]{6}}$，$\boldsymbol{\log_{0.5} \sqrt{3}}$

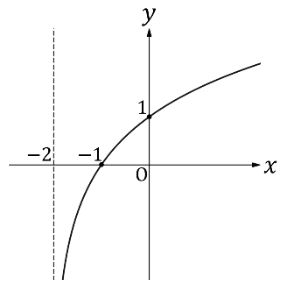
5.

（１）この関数のグラフは，$y = \log_2 x$のグラフを，

x軸方向に-2平行移動したものである．

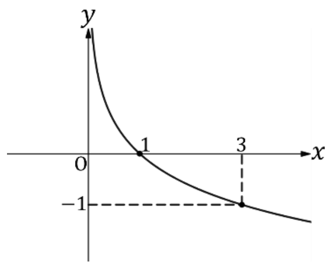
また，$x = 0$のとき，$y = \log_2(0+2) = 1$

$x = -2$が漸近線．



（２）この関数のグラフは，$y = \log_3 x$のグラフを，

x軸に関して対称移動したものである．

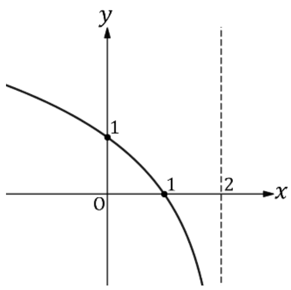


（３）$y = \log_2\{-(x-2)\}$

この関数のグラフは，$y = \log_2(-x)$のグラフを，

x軸方向に2平行移動したものである．

また，$x = 0$のとき，$y = \log_2(2-0) = 1$



6.

真数条件より，$x-1>0$，$x-3>0$，$13-x>0$

であるから，$3<x<13$・・・①

$\log_4(x-1)(x-3) = \log_4(13-x)$

よって

$(x-1)(x-3)=13-x$

$x^2-4x+3=13-x$

$x^2-3x-10=0$

$(x+2)(x-5)=0$

$x=-2,\ 5$

①より，$\boldsymbol{x=5}$

7.

（１）真数条件より，$1-3x>0$であるから

$x<\dfrac{1}{3}$・・・①

$\log_4(1-3x) \geqq 2\log_4 4$

$\log_4(1-3x) \geqq \log_4 4^2$

$\log_4(1-3x) \geqq \log_4 16$

$y=\log_4 x$は単調に増加するから

$1-3x \geqq 16$

$-3x \geqq 15$

$x \leqq -5$

これは，①を満たすので，$\boldsymbol{x \leqq -5}$

（２）真数条件より，$1-3x>0$であるから

$x<\dfrac{1}{3}$・・・①

$\log_4(1-3x) \leqq 2\log_4 4$

$\log_4(1-3x) \leqq \log_4 4^2$

$\log_4(1-3x) \leqq \log_4 16$

$y=\log_4 x$は単調に増加するから

$1-3x \leqq 16$

$-3x \leqq 15$

$x \geqq -5$

これと①より

$$\boldsymbol{-5 \leqq x < \frac{1}{3}}$$

8.

ガラスを 1 枚通過するごとに，明るさは$\dfrac{91}{100}$倍になる.

重ねるガラスの枚数をn枚とすると

$$\left(\frac{91}{100}\right)^n \leqq \frac{4}{10}$$

両辺の常用対数をとると

$$\log_{10}\left(\frac{91}{100}\right)^n \leqq \log_{10}\frac{4}{10}$$

$$n\log_{10}\frac{91}{100} \leqq \log_{10}\frac{4}{10}$$

$$n\log_{10}\frac{9.1}{10} \leqq \log_{10}4-\log_{10}10$$

$$n(\log_{10}9.1-\log_{10}10) \leqq \log_{10}2^2-\log_{10}10$$

$$n(\log_{10}9.1-1) \leqq 2\log_{10}2-1$$

対数表より，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}9.1=0.9590$

であるから，

$n(0.9590-1) \leqq 2\cdot 0.3010-1$

$-0.041n \leqq -0.398$

$$n \geqq \frac{-0.398}{-0.041}$$

$n \geqq 9.707\ldots$

nは，これを満たす最小の整数なので，$n=10$

したがって，重ねる枚数は **10 枚以上.**

練習問題 2-B

1.

（１）与式 $=\log_6\left(\dfrac{2}{5}\right)^3+\log_6\dfrac{5}{3}-\log_6\left(\dfrac{2}{15}\right)^2$

$$=\log_6\frac{4}{125}+\log_6\frac{5}{3}-\log_6\frac{4}{225}$$

$$=\log_6\left(\frac{4}{125}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{225}{4}\right)$$

$$=\log_6 6=\mathbf{1}$$

（２）底を2にそろえる.

与式 $=\log_2 5\cdot\dfrac{\log_2 4}{\log_2 9}\cdot\dfrac{\log_2 3}{\log_2 25}$

$$=\log_2 5\cdot\frac{\log_2 2^2}{\log_2 3^2}\cdot\frac{\log_2 3}{\log_2 5^2}$$

$$=\log_2 5\cdot\frac{2\log_2 2}{2\log_2 3}\cdot\frac{\log_2 3}{2\log_2 5}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

（３）底を2にそろえる.

与式 $=\left(\dfrac{\log_2 4}{\log_2 3}+\dfrac{\log_2 4}{\log_2 9}\right)\cdot\log_2 9$

$$= \left(\frac{\log_2 2^2}{\log_2 3} + \frac{\log_2 2^2}{\log_2 3^2}\right) \cdot \log_2 3^2$$

$$= \left(\frac{2\log_2 2}{\log_2 3} + \frac{2\log_2 2}{2\log_2 3}\right) \cdot 2\log_2 3$$

$$= \frac{2}{\log_2 3} \cdot 2\log_2 3 + \frac{1}{\log_2 3} \cdot 2\log_2 3$$

$$= 4 + 2 = \mathbf{6}$$

2.

（1）真数条件より，$x^2 + 3x + 2 > 0$，$x + 2 > 0$

$x^2 + 3x + 2 > 0$を解くと

$(x+1)(x+2) > 0$

$x < -2$，$x > -1$・・・①

$x + 2 > 0$を解くと，$x > -2$・・・②

①，②より，$x > -1$・・・③

与式より

$$\log_2 \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2} = 3\log_2 2$$

$$\log_2 \frac{(x+1)(x+2)}{x+2} = \log_2 2^3$$

$$\log_2(x+1) = \log_2 8$$

したがって，$x + 1 = 8$であるから，$x = 7$

これは，③を満たすので，$\boldsymbol{x = 7}$

（2）真数条件より，$x^2 - 2x > 0$，$x + 2 > 0$

$x^2 - 2x > 0$を解くと

$x(x-2) > 0$

$x < 0$，$x > 2$・・・①

$x + 2 > 0$を解くと，$x > -2$・・・②

①，②より，$-2 < x < 0$，$x > 2$・・・③

与式より

$\log_2(x^2 - 2x) - \log_2(x-1) = 1$

$$\log_2 \frac{x^2 - 2x}{x - 1} = \log_2 2$$

よって

$$\frac{x^2 - 2x}{x - 1} = 2$$

$$x^2 - 2x = 2(x-1)$$

$$x^2 - 2x = 2x - 2$$

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$x = -(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 1 \cdot 2}$$

$$= 2 \pm \sqrt{2}$$

③より，$\boldsymbol{x = 2 + \sqrt{2}}$

（3）真数条件より，$x > 0$・・・①

$\log_2 x = X$とおくと

$X^2 + 2X - 3 = 0$

$(X-1)(X+3) = 0$

$X = 1$，-3

$X = 1$より，$\log_2 x = 1$，よって，$x = 2$

$X = -3$より，$\log_2 x = -3$

$$x = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

これらは，①を満たす.

以上より

$$\boldsymbol{x = 2,\ \frac{1}{8}}$$

3.

a^X，a^Yのそれぞれの両辺に底をaとする対数をとると

$$\log_a a^X = \log_a \frac{3}{4}$$

$$X \log_a a = \log_a 3 - \log_a 2^2$$

$$X = \log_a 3 - 2\log_a 2$$

$$\log_a a^Y = \log_a \frac{9}{2}$$

$$Y \log_a a = \log_a 3^2 - \log_a 2$$

$$Y = 2\log_a 3 - \log_a 2$$

よって

$$\begin{cases} X = \log_a 3 - 2\log_a 2 \\ Y = 2\log_a 3 - \log_a 2 \end{cases}$$

これを，$\log_a 2$について解くと

$$2X - Y = -3\log_a 2$$

$$\log_a 2 = \boldsymbol{\frac{-2X + Y}{3}}$$

4.

両辺に底を2とする対数をとると

$$\log_2 3^x = \log_2 2^y$$

$$x \log_2 3 = y \log_2 2$$

$$\boldsymbol{y = x \log_2 3}$$

5.

（1）真数条件より，$x > 0$・・・①，$\log_x x > 0$

$\log_x x > 0$を解くと，$x > 1$・・・②

①，②より，$x > 1$・・・③

与式より

$\log_4(\log_2 x) < \log_4 4$

底の4は1より大きいので

$\log_2 x < 4$

$\log_2 x < 4\log_2 2$

$\log_2 x < \log_2 2^4$

底の2は1より大きいので

$x < 16$

これと，③より，$\mathbf{1 < x < 16}$

（２）真数条件より，$3 + x > 0$，$3 - x > 0$

それぞれ解くと，$x > -3$，$x < 3$

よって，$-3 < x < 3$・・・①

底の0.5は1より小さいので

$3 + x < 3 - x$

$2x < 0$

$x < 0$

これと，①より，$\mathbf{-3 < x < 0}$

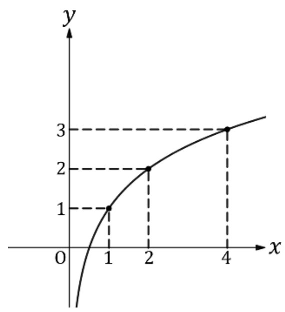
6.

（１）$y = \log_2 2 + \log_2 x$

$y = \log_2 x + 1$

この関数のグラフは，$y = \log_2 x$のグラフを，

y軸方向に，-1平行移動したものである．



（２）真数条件より，$|x| > 0$であるから，$x \neq 0$

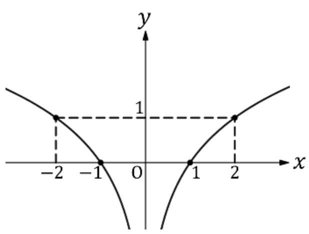
i）$x > 0$のとき

$y = \log_2 x$のグラフとなる．

ii）$x < 0$のとき

$y = \log_2(-x)$であるから，$y = \log_2 x$のグラフを，

y軸に関して対称移動したグラフとなる．



7.

$\log_b a = \dfrac{\log_a a}{\log_a b} = \dfrac{1}{\log_a b}$を，与えられた条件に代入

すると

$$\log_a b + \frac{1}{\log_a b} = \frac{8}{3}$$

両辺に，$\log_a b$をかけると

$$(\log_a b)^2 + 1 = \frac{8}{3}\log_a b$$

$$3(\log_a b)^2 + 3 = 8\log_a b$$

$$3(\log_a b)^2 - 8\log_a b + 3 = 0$$

$$\log_a b = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 3\cdot 3}}{3}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 9}}{3}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$$

ここで，$0 < a < b < 1$より

$\log_a 1 < \log_a b < \log_a a$

すなわち，$0 < \log_a b < 1$であるから

$$\log_a b = \frac{4 - \sqrt{7}}{3}$$

以上より

$$\log_a b - \log_b a = \log_a b - \frac{1}{\log_a b}$$

$$= \frac{4 - \sqrt{7}}{3} - \frac{1}{\frac{4 - \sqrt{7}}{3}}$$

$$= \frac{4 - \sqrt{7}}{3} - \frac{3}{4 - \sqrt{7}}$$

$$= \frac{4 - \sqrt{7}}{3} - \frac{3\left(4 + \sqrt{7}\right)}{\left(4 - \sqrt{7}\right)\left(4 + \sqrt{7}\right)}$$

$$= \frac{4 - \sqrt{7}}{3} - \frac{3\left(4 + \sqrt{7}\right)}{16 - 7}$$

$$= \frac{4 - \sqrt{7}}{3} - \frac{3\left(4 + \sqrt{7}\right)}{9}$$

$$= \frac{4 - \sqrt{7}}{3} - \frac{4 + \sqrt{7}}{3}$$

$$= \frac{4 - \sqrt{7} - 4 - \sqrt{7}}{3}$$

$$= -\boldsymbol{\frac{2\sqrt{7}}{3}}$$