4章　指数関数と対数関数

問1

（1）$\log_2 16 = m$とおくと

$2^m = 16$

$2^m = 2^4$

よって，$m = 4$であるから，$\log_2 16 = \mathbf{4}$

【別解】

与式$= \log_2 2^4$

$= 4\log_2 2$

$= 4 \cdot 1 = \mathbf{4}$

（2）$\log_3 \dfrac{1}{9} = m$とおくと

$3^m = \dfrac{1}{9}$

$3^m = 3^{-2}$

よって，$m = -2$ であるから，$\log_3 \dfrac{1}{9} = \mathbf{-2}$

【別解】

与式$= \log_3 3^{-2}$

$= -2\log_3 3$

$= -2 \cdot 1 = \mathbf{-2}$

（3）$\log_3 1 = m$とおくと

$3^m = 1$

$3^m = 3^0$

よって，$m = 0$であるから，$\log_3 1 = \mathbf{0}$

【別解】

与式$= \log_3 3^0$

$= 0\log_3 3 = \mathbf{0}$

（4）$\log_{10} 0.1 = m$とおくと

$10^m = 0.1$

$10^m = \dfrac{1}{10}$

$10^m = 10^{-1}$

よって，$m = -1$であるから，$\log_{10} 0.1 = \mathbf{-1}$

【別解】

与式$= \log_{10} 10^{-1}$

$= -1\log_{10} 10$

$= -1 \cdot 1 = \mathbf{-1}$

（5）$\log_{0.1} 0.01 = m$とおくと

$0.1^m = 0.01$

$0.1^m = 0.1^2$

よって，$m = 2$であるから，$\log_{0.1} 0.01 = \mathbf{2}$

【別解】

与式$= \log_{0.1} 0.1^2$

$= 2\log_{0.1} 0.1$

$= 2 \cdot 1 = \mathbf{2}$

（6）$\log_5 \sqrt[3]{25} = m$とおくと

$5^m = \sqrt[3]{25}$

$5^m = 25^{\frac{1}{3}}$

$5^m = (5^2)^{\frac{1}{3}}$

$5^m = 5^{\frac{2}{3}}$

よって，$m = \dfrac{2}{3}$であるから，$\log_5 \sqrt[3]{25} = \mathbf{\dfrac{2}{3}}$

【別解】

与式$= \log_5 5^{\frac{2}{3}}$

$= \dfrac{2}{3}\log_5 5$

$= \dfrac{2}{3} \cdot 1 = \mathbf{\dfrac{2}{3}}$

問2

（1）与式$= \log_3 3^5$

$= 5\log_3 3$

$= 5 \cdot 1 = \mathbf{5}$

（2）与式$= \log_2 \left(\dfrac{4}{3} \times \dfrac{3}{2}\right)$

$= \log_2 2$

$= \mathbf{1}$

【別解】

与式$= (\log_2 4 - \log_2 3) + (\log_2 3 - \log_2 2)$

$= \log_2 2^2 - \log_2 3 + \log_2 3 - \log_2 2$

$= 2 - 1 = \mathbf{1}$

（3）与式 $= \log_2 \dfrac{20}{5\sqrt{2}}$

$= \log_2 \dfrac{20\sqrt{2}}{10}$　※分母を有理化

$= \log_2 2\sqrt{2}$

$= \log_2 2^{\frac{3}{2}}$

$= \dfrac{3}{2}\log_2 2$

$= \dfrac{3}{2}\cdot 1 = \boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

（4）与式 $= \log_3 5^{\frac{1}{2}} - \log_3 \dfrac{\sqrt{15}}{3}$

$= \log_3 \dfrac{\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{15}}{3}}$

$= \log_3 \dfrac{3}{\sqrt{3}}$

$= \log_3 \dfrac{3\sqrt{3}}{3}$　※分母を有理化

$= \log_3 \sqrt{3}$

$= \log_3 3^{\frac{1}{2}}$

$= \dfrac{1}{2}\log_3 3$

$= \dfrac{1}{2}\cdot 1 = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

問3

（1）左辺 $= \log_a 1 - \log_a M$

$= 0 - \log_a M$

$= -\log_a M =$ 右辺

（2）左辺 $= \log_a M^{\frac{1}{n}}$

$= \dfrac{1}{n}\log_a M =$ 右辺

問4

（1）左辺 $= (\log_a L + \log_a M) + \log_a N$

$= \log_a LM + \log_a N$

$= \log_a LMN =$ 右辺

（2）（1）の証明より

与式 $= \log_{10}\left(0.4 \times \dfrac{50}{3} \times 1.5\right)$

$= \log_{10}\left(\dfrac{4}{10} \times \dfrac{50}{3} \times \dfrac{15}{10}\right)$

$= \log_{10} 10 = \mathbf{1}$

問5

底を3にする.

$\log_{9\sqrt{3}} 3 = \dfrac{\log_3 3}{\log_3 9\sqrt{3}}$

$= \dfrac{1}{\log_3 3^{\frac{5}{2}}}$

$= \dfrac{1}{\frac{5}{2}\log_3 3}$

$= \dfrac{1}{\frac{5}{2}\cdot 1}$

$= \boldsymbol{\dfrac{2}{5}}$

問6

$\log_a b$の底をbにする.

$\log_a b = \dfrac{\log_b b}{\log_b a} = \dfrac{1}{\log_b a}$

また

$\log_b \dfrac{1}{a} = \log_b a^{-1}$

$= -\log_b a$であるから

与式 $= \dfrac{1}{\log_b a}\cdot(-\log_b a)$

$= \mathbf{-1}$

問7

（1）底を2にそろえる.

与式 $= \dfrac{\log_2 2}{\log_2 3}\cdot\dfrac{\log_2 9}{\log_2 4}$

$= \dfrac{1}{\log_2 3}\cdot\dfrac{\log_2 3^2}{\log_2 2^2}$

$= \dfrac{1}{\log_2 3}\cdot\dfrac{2\log_2 3}{2\log_2 2}$

$= \dfrac{1}{\log_2 3}\cdot\dfrac{2\log_2 3}{2}$

$= 1\cdot 1 = \mathbf{1}$

（2）底を2にそろえる.

与式 $= \log_2 3^2 \cdot \dfrac{\log_2 16}{\log_2 5}\cdot\dfrac{\log_2 25}{\log_2 3}$

$= 2\log_2 3 \cdot \dfrac{\log_2 2^4}{\log_2 5} \cdot \dfrac{\log_2 5^2}{\log_2 3}$

$= 2\log_2 3 \cdot \dfrac{4\log_2 2}{\log_2 5} \cdot \dfrac{2\log_2 5}{\log_2 3}$

$= 2 \cdot 4 \cdot 2 = \mathbf{16}$

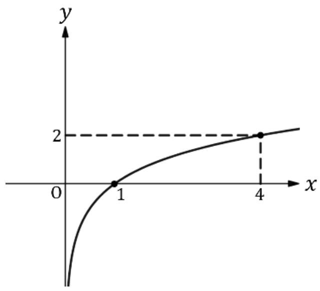
問8

（１）$x = 1$のとき，$y = \log_4 1 = 0$

$x = 4$のとき，$y = \log_4 4 = 1$

グラフは，２点$(1,\ 0)$，$(4,\ 1)$を通り，

単調に増加する曲線となる．



（２）この関数のグラフは，$y = \log_2 x$のグラフを

x軸方向に1平行移動したものであり，

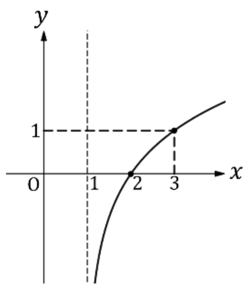
漸近線は，$x = 1$である．

$x = 2$のとき，$y = \log_2(2-1) = 0$

$x = 3$のとき，$y = \log_2(3-1) = 1$

グラフは，２点$(2,\ 0)$，$(3,\ 1)$を通り，

単調に増加する曲線となる．



（３）この関数のグラフは，$y = \log_3 x$のグラフと

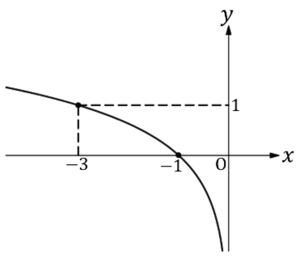
y軸に関して対称である．

$x = -1$のとき，$y = \log_3\{-(-1)\} = 0$

$x = -3$のとき，$y = \log_3\{-(-3)\} = 1$

グラフは，２点$(-1,\ 0)$，$(-3,\ 1)$を通り，

単調に減少する曲線となる．



問9

（１）$\dfrac{1}{81} = \dfrac{1}{3^4} = 3^{-4}$

$\sqrt{27} = 27^{\frac{1}{2}} = (3^3)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}}$

であるから，定義域は

$3^{-4} < x < 3^{\frac{3}{2}}$

$y = \log_3 y$は単調に増加するので

$\log_3 3^{-4} < y < \log_3 3^{\frac{3}{2}}$

すなわち

$-4\log_3 3 < y < \dfrac{3}{2}\log_3 3$

よって，$\boldsymbol{-4 < y < \dfrac{3}{2}}$

（２）$0.125 = 0.5^3$

$0.25 = 0.5^2$

であるから，定義域は

$0.5^3 < x \leqq 0.5^2$

$y = \log_{0.5} x$は単調に減少するので

$\log_{0.5} 0.5^3 > y \geqq \log_{0.5} 0.5^2$

すなわち

$3\log_{0.5} 0.5 > y \geqq 2\log_{0.5} 0.5$

よって，$\boldsymbol{2 \leqq y < 3}$

問10

（１）$0.25 < 2 < 5$

$y = \log_4 x$は単調に増加するから

$\boldsymbol{\log_4 0.25 < \log_4 2 < \log_4 5}$

（２）$\dfrac{1}{9} < \sqrt{3} < 3$

$y = \log_{\frac{1}{3}} x$ は単調に減少するから

$\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{9} > \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3} > \log_{\frac{1}{3}} 3$

すなわち

$\boldsymbol{\log_{\frac{1}{3}} 3 < \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3} < \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{9}}$

問11

（１）真数条件より，$x > 0$，$x - 1 > 0$であるから

$x > 0$・・・①

$$\log_3 \frac{x}{x-1} = 2$$

$$\log_3 \frac{x}{x-1} = \log_3 3^2$$

よって

$$\frac{x}{x-1} = 9$$

$$x = 9(x-1)$$

$$x = 9x - 9$$

$$8x = 9$$

$$x = \frac{9}{8}$$

これは，①を満たしている．

よって，$\boldsymbol{x = \frac{9}{8}}$

（２）真数条件より，$x+2>0$，$x-1>0$であるから

$x > 1$・・・①

$\log_4(x+2)(x-1) = 1$

$\log_4(x+2)(x-1) = \log_4 4$

よって

$(x+2)(x-1) = 4$

$x^2 + x - 2 = 4$

$x^2 + x - 6 = 0$

$(x-2)(x+3) = 0$

$x = 2,\ -3$

①より，$\boldsymbol{x = 2}$

$\boxed{\text{問 12}}$

（１）真数条件より，$2x+1>0$であるから

$x > -\frac{1}{2}$・・・①

$\log_3(2x+1) \geqq 2\log_3 3$

$\log_3(2x+1) \geqq \log_3 3^2$

$\log_3(2x+1) \geqq \log_3 9$

底が1より大きいので

$2x + 1 \geqq 9$

$2x \geqq 8$

$x \geqq 4$

これは，①を満たす．

よって，$\boldsymbol{x \geqq 4}$

（２）真数条件より，$2x+1>0$であるから

$x > -\frac{1}{2}$・・・①

$\log_3(2x+1) \leqq 2\log_3 3$

$\log_3(2x+1) \leqq \log_3 3^2$

$\log_3(2x+1) \leqq \log_3 9$

底が1より大きいので

$2x + 1 \leqq 9$

$2x \leqq 8$

$x \leqq 4$

これと①より

$$\boldsymbol{-\frac{1}{2} < x \leqq 4}$$

$\boxed{\text{問 13}}$

（１）与式 $= \log_{10}(2 \times 3)$

$= \log_{10} 2 + \log_{10} 3$

$= 0.3010 + 0.4771 = \mathbf{0.7781}$

（２）与式 $= \log_{10} \frac{15}{10}$

$= \log_{10} \frac{3}{2}$

$= \log_{10} 3 - \log_{10} 2$

$= 0.4771 - 0.3010 = \mathbf{0.1761}$

（３）底を10にする．

$$与式 = \frac{\log_{10} 9}{\log_{10} 5}$$

$$= \frac{\log_{10} 3^2}{\log_{10} \frac{10}{2}}$$

$$= \frac{2\log_{10} 3}{\log_{10} 10 - \log_{10} 2}$$

$$= \frac{2 \cdot 0.4771}{1 - 0.3010}$$

$$= \frac{0.9542}{0.699}$$

$= 1.3650 \ldots \approx \mathbf{1.365}$

$\boxed{\text{問 14}}$

（１）両辺の常用対数をとると

$\log_{10} 10^n \leqq \log_{10} 1.1^{200}$

$n \log_{10} 10 \leqq 200 \log_{10} 1.1$

$n \leqq 200 \log_{10} 1.1$

対数表より，$\log_{10} 1.1 = 0.0414$であるから

$200\log_{10} 1.1 = 200 \cdot 0.0414 = 8.28$

よって，$n \leqq 8.28$であり，nはこれを満たす最大の整数なので，$\boldsymbol{n = 8}$

（２）両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} 10^n \leqq \log_{10} 1.2^{200}$$

$$n\log_{10} 10 \leqq 200\log_{10} 1.2$$

$$n \leqq 200\log_{10} 1.2$$

対数表より，$\log_{10} 1.2 = 0.0792$であるから

$200\log_{10} 1.2 = 200 \cdot 0.0792 = 15.84$

よって，$n \leqq 15.84$であり，nはこれを満たす最大の整数なので，$\boldsymbol{n = 15}$

問 15

両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} 10^{-n} \geqq \log_{10} \frac{1}{3^{100}}$$

$$-n\log_{10} 10 \geqq \log_{10} 3^{-100}$$

$$-n \geqq -100\log_{10} 3$$

$$n \leqq 100\log_{10} 3$$

対数表より，$\log_{10} 3 = 0.4771$であるから

$100\log_{10} 3 = 100 \cdot 0.4771 = 47.71$

よって，$n \leqq 47.71$であり，nはこれを満たす最大の整数なので，$\boldsymbol{n = 47}$

問 16

1 時間ごとに前の時間のr倍になるとすると

$r^6 = 3$ より，$r = 3^{\frac{1}{6}}$

ここで，n時間後に最初の量の 10 倍以上になるとすると

$r^n \geqq 10$

すなわち，$3^{\frac{n}{6}} \geqq 10$

両辺の常用対数をとって

$$\log_{10} 3^{\frac{n}{6}} \geqq \log_{10} 10$$

$$\frac{n}{6}\log_{10} 3 \geqq 1$$

$$n \geqq \frac{6}{\log_{10} 3}$$

対数表より，$\log_{10} 3 = 0.4771$であるから

$$\frac{6}{\log_{10} 3} = \frac{6}{0.4771} = 12.575 \ldots$$

したがって，$n \geqq 12.575 \ldots$

よって，はじめて 10 倍以上になるのは **13 時間後**である．

問 17

普通預金は，１年間で$\frac{103}{100}$倍になる．

経過年数をn年とすると

$$\left(\frac{103}{100}\right)^n \geqq 1.5$$

$$\left(\frac{103}{100}\right)^n \geqq \frac{3}{2}$$

両辺の常用対数をとると

$$\log_{10}\left(\frac{103}{100}\right)^n \geqq \log_{10}\frac{3}{2}$$

$$n\log_{10}\frac{103}{100} \geqq \log_{10}\frac{3}{2}$$

$$n\log_{10} 1.03 \geqq \log_{10} 3 - \log_{10} 2$$

$$n \geqq \frac{\log_{10} 3 - \log_{10} 2}{\log_{10} 1.03}$$

対数表より，$\log_{10} 1.03 = 0.0128$，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$であるから

$$\frac{\log_{10} 3 - \log_{10} 2}{\log_{10} 1.03} = \frac{0.4771 - 0.3010}{0.0128}$$

$$= 13.75 \ldots$$

したがって，$n \geqq 13.75$

よって，預金が 1.5 倍となるのは **14 年後**である．