3章　関数とグラフ

§2　いろいろな関数（p.88～p.97）

問1　$y=f(x)$とおく．

（１）$f(-x)=(-x)^3+2\cdot(-x)$

$=-x^3-2x$

$=-(x^3+2x)$

$=-f(x)$

よって，**奇関数**である．

（２）$f(-x)=-(-x)^4+3$

$=-x^4+3$

$=f(x)$

よって，**偶関数**である．

（３）$f(-x)=(-x)^2-(-x)$

$=x^2+x$

$f(-x)\neq f(x)$，$f(-x)\neq -f(x)$

よって，**奇関数でも偶関数でもない．**

問2

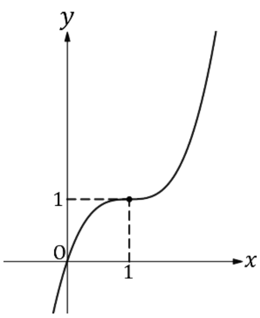
（１）この関数のグラフは，$y=x^3$のグラフを

x軸方向に1，y軸方向に1平行移動したものである．

また，$x=0$のとき

$y=(0-1)^3+1$

$=-1+1=0$



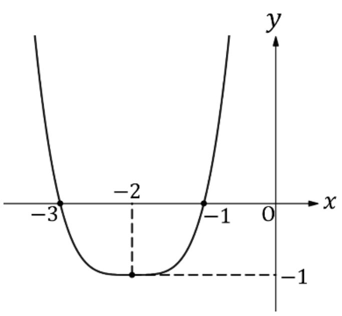
（２）この関数のグラフは，$y=x^4$のグラフを

x軸方向に-2，y軸方向に-1平行移動したものである．

また，$x=0$のとき

$y=(0+2)^4-1$

$=16-1=15$



問3

（１）この関数のグラフは，$y=\dfrac{4}{x}$のグラフをx軸方向に 1，

y軸方向に2平行移動したものである．

定義域は，$x\neq 1$，値域は，$y\neq 2$

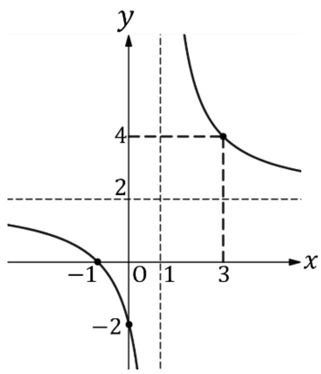
漸近線は，$x=1$，$y=2$

また，$x=0$のとき

$y=\dfrac{4}{0-1}+2$ より，$y=-2$

$y=0$のとき

$0=\dfrac{4}{x-1}+2$ より，$x=-1$



（２）この関数のグラフは，$y=-\dfrac{2}{x}$のグラフを

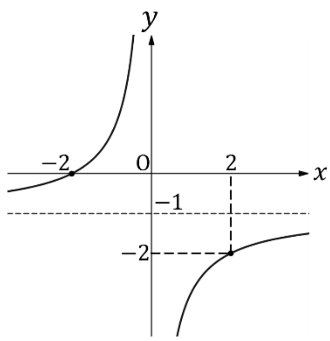
y軸方向に-1平行移動したものである．

定義域は，$x\neq 0$，値域は，$y\neq -1$

漸近線は，$x=0$，$y=-1$

また，$y=0$のとき

$0=-\dfrac{2}{x}-1$ より，$x=-2$



（３）この関数のグラフは，$y=-\dfrac{3}{x}$のグラフを

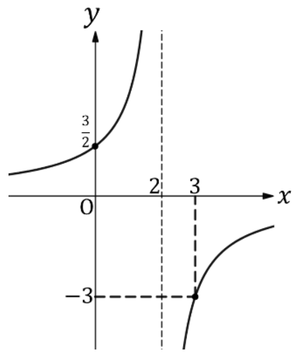
x軸方向に2平行移動したものである．

定義域は，$\boldsymbol{x \neq 2}$，値域は，$\boldsymbol{y \neq 0}$

漸近線は，$\boldsymbol{x = 2}$，$\boldsymbol{y = 0}$

また，$x = 0$のとき

$$y = -\frac{3}{0-2} \text{ より，} y = \frac{3}{2}$$



問4

（１）分子を分母で割ると

$$\begin{array}{r} 3 \\ x-1\overline{)\,3x-2} \\ \underline{3x-3} \\ 1 \end{array}$$

よって，$y = \dfrac{1}{x-1} + 3$

この関数のグラフは，$y = \dfrac{1}{x}$のグラフを

x軸方向に1，y軸方向に3平行移動したものである．

定義域は，$\boldsymbol{x \neq 1}$，値域は，$\boldsymbol{y \neq 3}$

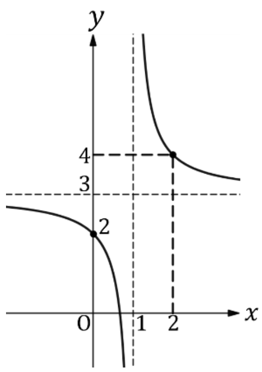
漸近線は，$\boldsymbol{x = 1}$，$\boldsymbol{y = 3}$

また，$x = 0$のとき

$$y = \frac{1}{0-1} + 3 \text{ より，} y = 2$$

$y = 0$のとき

$$0 = \frac{1}{x-1} + 3 \text{ より，} x = \frac{2}{3}$$



【式変形別解】

$$y = \frac{3(x-1)+1}{x-1}$$

$$= \frac{3(x-1)}{x-1} + \frac{1}{x-1}$$

$$= \frac{1}{x-1} + 3$$

（２）分子を分母で割ると

$$\begin{array}{r} -3 \\ x+1\overline{)\,-3x} \\ \underline{-3x-3} \\ 3 \end{array}$$

よって，$y = \dfrac{3}{x+1} - 3$

この関数のグラフは，$y = \dfrac{3}{x}$のグラフをx軸

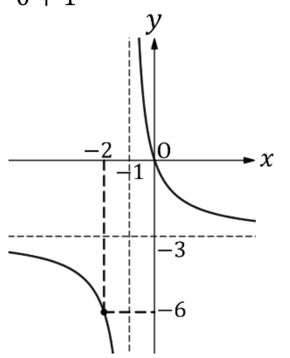
方向に-1，y軸方向に-3平行移動したものである．

定義域は，$\boldsymbol{x \neq -1}$，値域は，$\boldsymbol{y \neq -3}$

漸近線は，$\boldsymbol{x = -1}$，$\boldsymbol{y = -3}$

また，$x = 0$のとき

$$y = \frac{3}{0+1} - 3 \text{ より，} y = 0$$



【式変形別解】

$$y = \frac{-3(x+1)+3}{x+1}$$

$$= \frac{-3(x+1)}{x+1} + \frac{3}{x+1}$$

$$= \frac{3}{x+1} - 3$$

問5

（１）$4 - x \geqq 0$より，定義域は，$\boldsymbol{x \leqq 4}$

（２）$x^2 - 3x - 10 \geqq 0$を解くと

$(x+2)(x-5) \geqq 0$

$x \leqq -2$，$x \geqq 5$

よって，定義域は，$\boldsymbol{x \leqq -2}$，$\boldsymbol{x \geqq 5}$

（３）分母$\neq 0$であるから，$x - 3 > 0$より，

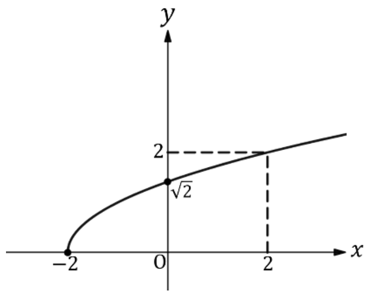
定義域は$\boldsymbol{x > 3}$

問６

（１）この関数のグラフは，$y=\sqrt{x}$のグラフをx軸方向に-2平行移動したものである．

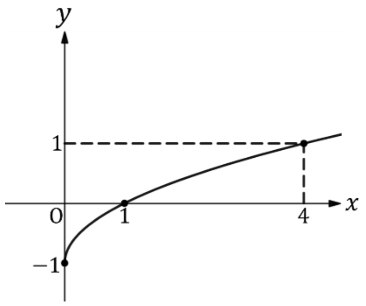
定義域は，$x+2\geqq 0$より，$\boldsymbol{x\geqq -2}$，**値域は，**$\boldsymbol{y\geqq 0}$

また，$x=0$のとき，$y=\sqrt{0+2}=\sqrt{2}$



（２）この関数のグラフは，$y=\sqrt{x}$のグラフをy軸方向に-1平行移動したものである．

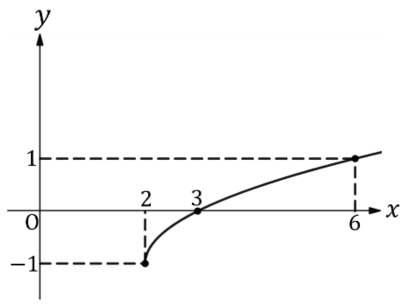
定義域は，$\boldsymbol{x\geqq 0}$**，値域は，**$\boldsymbol{y\geqq -1}$



（３）この関数のグラフは，$y=\sqrt{x}$のグラフをx軸方向に2，y軸方向に-1平行移動したものである．

定義域は，$x-2\geqq 0$より，$\boldsymbol{x\geqq 2}$，**値域は，**$\boldsymbol{y\geqq -1}$

また，$y=0$のとき，$0=\sqrt{x-2}-1$より，$x=3$



問７　$y=f(x)$とする．

（１）求める関数の式は，$y=-f(x)$であるから

$$
\begin{aligned}
y&=-f(x)\\
&=-(x^2-x+1)\\
&=-x^2+x-1
\end{aligned}
$$

よって，$\boldsymbol{y=-x^2+x-1}$

（２）求める関数の式は，$y=f(-x)$であるから

$$
\begin{aligned}
y&=f(-x)\\
&=(-x)^2-(-x)+1\\
&=x^2+x+1
\end{aligned}
$$

よって，$\boldsymbol{y=x^2+x+1}$

（３）求める関数の式は，$y=-f(-x)$であるから

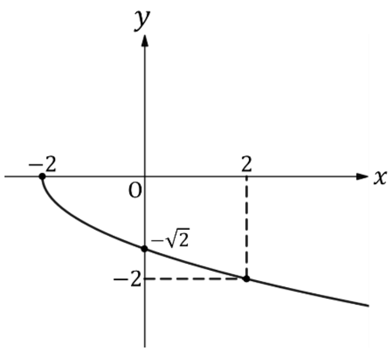
$$
\begin{aligned}
y&=-f(-x)\\
&=-\{(-x)^2-(-x)+1\}\\
&=-(x^2+x+1)\\
&=-x^2-x-1
\end{aligned}
$$

よって，$\boldsymbol{y=-x^2-x-1}$

問８　問６の関数を$y=f(x)$とおく．

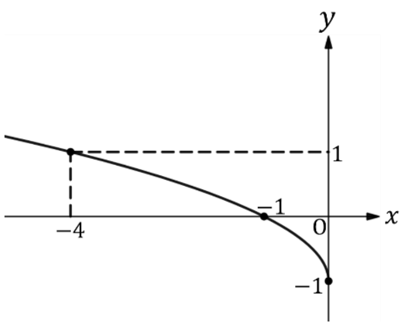
（１）この関数のグラフは，$y=-f(x)$であるから

問６のグラフをx軸に関して対称にしたものである．



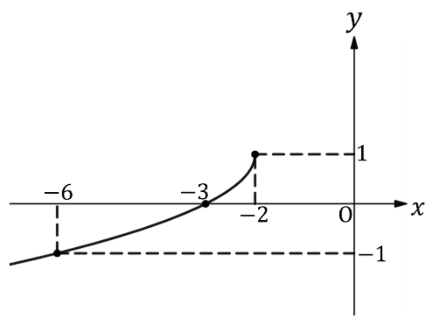
（２）この関数のグラフは，$y=f(-x)$であるから

問６のグラフをy軸に関して対称にしたものである．



（３）この関数のグラフは，$y=-f(x)$であるから

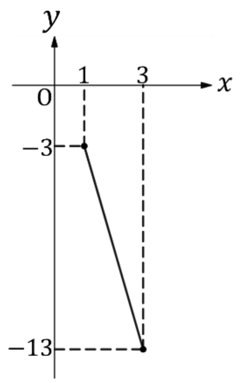
問６のグラフを原点に関して対称にしたものである．



問９

（１）$x=1$のとき，$y=-5\cdot 1+2=-3$

$x=3$のとき，$y=-5\cdot 3+2=-13$



よって，この関数の値域は，$-13 \leqq y \leqq -3$

$y = -5x + 2$をxについて解くと

$5x = -y + 2$

$x = -\dfrac{1}{5}y + \dfrac{2}{5}$

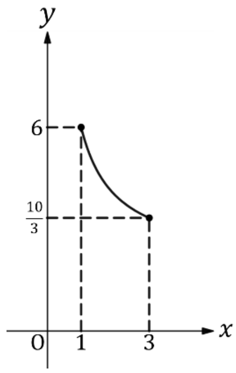
よって，逆関数は，$\boldsymbol{y = -\dfrac{1}{5}x + \dfrac{2}{5}}$

また，逆関数の**定義域，値域はそれぞれ**

$\boldsymbol{-13 \leqq x \leqq -3}$**，**$\boldsymbol{1 \leqq y \leqq 3}$

（2）$x = 1$ のとき，$y = \dfrac{4}{1} + 2 = 6$

$x = 3$ のとき，$y = \dfrac{4}{3} + 2 = \dfrac{10}{3}$



よって，この関数のグラフの値域は，$\dfrac{10}{3} \leqq y \leqq 6$

$y = \dfrac{4}{x} + 2$ をxについて解くと

$xy = 4 + 2x$

$(y-2)x = 4$

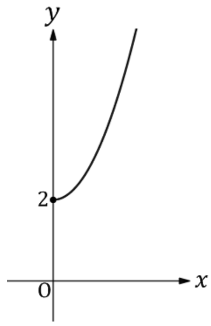
$x = \dfrac{4}{y-2} \quad \left(\dfrac{10}{3} \leqq y \leqq 6 \text{ より，} x \neq 2\right)$

よって，逆関数は，$\boldsymbol{y = \dfrac{4}{x-2}}$

また，逆関数の**定義域，値域はそれぞれ**

$\boldsymbol{\dfrac{10}{3} \leqq x \leqq 6}$**，**$\boldsymbol{1 \leqq y \leqq 3}$

（3）$x = 0$のとき，$y = 0^2 + 2 = 2$



この関数の値域は，$y \geqq 2$

$y = x^2 + 2$をxについて解くと

$x^2 = y - 2$

$x = \pm\sqrt{y-2}$

$x \leqq 0$より，$x = -\sqrt{y-2}$であるから，

逆関数は，$\boldsymbol{y = -\sqrt{x-2}}$

また，逆関数の**定義域，値域はそれぞれ**

$\boldsymbol{x \geqq 2}$**，**$\boldsymbol{y \leqq 0}$