練習問題 2-A

1.

（１）$3x-1<5x+4$

$3x-5x<4+1$

$-2x<5$

$\boldsymbol{x>-\frac{5}{2}}$

（２）$\frac{2-x}{3} \geqq \frac{5+3x}{2}$

両辺に6をかけて

$2(2-x) \geqq 3(5+3x)$

$4-2x \geqq 15+9x$

$-2x-9x \geqq 15-4$

$-11x \geqq 11$

$\boldsymbol{x \leqq -1}$

（３）$x^2>4$

$x^2-4>0$

$(x+2)(x-2)>0$

$\boldsymbol{x<-2,\ x>2}$

（４）$5x+3 \leqq 2x^2$

$-2x^2+5x+3 \geqq 0$

$2x^2-5x-3 \leqq 0$

$(2x+1)(x-3) \leqq 0$

$\boldsymbol{-\frac{1}{2} \leqq x \leqq 3}$

2.

横の長さを$x$cmとすると縦の長さは$(12-x)$cm

となるので，$x(12-x) \geqq 27$（ただし，$0<x<12$）

$12x-x^2 \geqq 27$

$x^2-12x \leqq -27$

$x^2-12x+27 \leqq 0$

$(x-3)(x-9) \leqq 0$

$\boldsymbol{3 \leqq x \leqq 9}$

3.

（１）$x^3+2x^2-x-2 \geqq 0$

$P(x)=x^3+2x^2-x-2$とおく．

$P(1)=0$より，$x-1$で割り切れる．

$P(x)=(x-1)(x^2+3x+2)$

$=(x-1)(x+1)(x+2)$

$P(x)=0$を満たすのは，$x=-2$，-1，1のとき．

各区間における因数の符号を調べると表のようになる．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

表より，$\boldsymbol{-2 \leqq x \leqq -1,\quad x \geqq 1}$

（２）$3x^3-2x^2-7x-2<0$

$P(x)=3x^3-2x^2-7x-2$とおく．

$P(-1)=0$より，$x+1$で割り切れる．

$P(x)=(x+1)(3x^2-5x-2)$

$=(x+1)(3x+1)(x-2)$

$P(x)=0$ を満たすのは，$x=-1$，$-\frac{1}{3}$，2 のとき．

各区間における因数の符号を調べると表のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$3x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

表より，$\boldsymbol{x<-1,\quad -\frac{1}{3}<x<2}$

4.

（１）$x^2+y^2 \geqq 2(x+y-1)$

左辺$-$右辺$=x^2+y^2-2(x+y-1)$

$=x^2+y^2-2x-2y+2$

$=(x^2-2x+1)-1+(y^2-2y+1)-1+2$

$=(x-1)^2+(y-1)^2$

ここで，$(x-1)^2 \geqq 0$，$(y-1)^2 \geqq 0$より

$(x-1)^2+(y-1)^2 \geqq 0$・・・①

よって，$x^2+y^2 \geqq 2(x+y-1)$

①より，等号は$\boldsymbol{x=y=1}$**のとき**成り立つ.

（２）$x^2+2xy+2y^2 \geqq 0$

左辺$=x^2+2xy+y^2+y^2$

$=(x+y)^2+y^2$

ここで，$(x+y)^2 \geqq 0$，$y^2 \geqq 0$より

$(x+y)^2+y^2 \geqq 0$・・・②

よって，$x^2+2xy+2y^2 \geqq 0$

②より，$\boldsymbol{x=y=0}$のとき成り立つ.

（３）$\dfrac{a^2+b^2}{2} \geqq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$

$$\text{左辺}-\text{右辺}=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{(a+b)^2}{4}$$

$$=\frac{2a^2+2b^2-a^2-2ab-b^2}{4}$$

$$=\frac{a^2-2ab+b^2}{4}$$

$$=\frac{(a-b)^2}{4} \geqq 0 \text{・・・③}$$

よって

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geqq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

③より，等号は$a-b=0 \to \boldsymbol{a=b}$**のとき**成り立つ.

（４）$a^2+\dfrac{1}{a^2} \geqq 2$（$a \neq 0$）

$a \neq 0$ より，$a^2>0$，$\dfrac{1}{a^2}>0$ なので

相加・相乗平均の大小関係から

$$a^2+\frac{1}{a^2} \geqq 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{a^2}}=2$$

よって

$$a^2+\frac{1}{a^2} \geqq 2$$

また，$a^2=\dfrac{1}{a^2}$より

$a^4=1$

$a=\pm 1$

したがって，等号は$\boldsymbol{a=\pm 1}$**のとき**に成り立つ.

5.

（１）逆「$\boldsymbol{x=0}$**ならば**$\boldsymbol{xy=0}$」**真**

対偶「$\boldsymbol{x \neq 0}$**ならば**$\boldsymbol{xy \neq 0}$」**偽**（反例：$x=1$，$y=0$）

（２）逆「$\boldsymbol{x^2=1}$**ならば**$\boldsymbol{x=1}$**または**$\boldsymbol{x=-1}$」**真**

対偶「$\boldsymbol{x^2 \neq 1}$**ならば**$\boldsymbol{x \neq 1}$**かつ**$\boldsymbol{x \neq -1}$」**真**

6.

（１）$|a|=3 \underset{\circ}{\overset{\circ}{\rightleftarrows}} a^2=9$

よって，$|a|=3 \Leftrightarrow a^2=9$

であるから，**必要十分**条件.

（２）$(x-1)(x+3)=0 \underset{\circ}{\overset{\times}{\rightleftarrows}} x=-3$

よって，$(x-1)(x+3)=0 \Leftarrow x=-3$

であるから，**必要**条件.

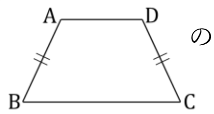
※ $\xrightarrow{\times}$ の反例は$x=1$のとき.

（３）四角形 ABCD が平行四辺形$\underset{\times}{\overset{\circ}{\rightleftarrows}}$ AB = CD

よって，四角形 ABCD が平行四辺形 ⇒ AB = CD

であるから，**十分**条件.

※ $\xleftarrow{\times}$ の反例は



のようなとき.

練習問題 2-B

1.

（１）上の式から，①，②，③とする.

①を解くと

$3x-2x \geqq -1-3$

$x \geqq -4$

②を解くと

$2x+x<1$

$3x<1$

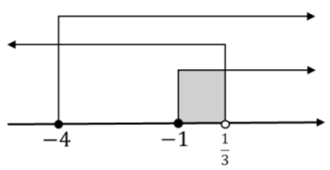
$x<\dfrac{1}{3}$

③を解くと

$x-4x \leqq 3$

$-3x \leqq 3$

$x \geqq -1$



よって，$-\mathbf{1} \leqq \boldsymbol{x} < \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$

（２）上の式を①，下の式を②とする．

①を解くと

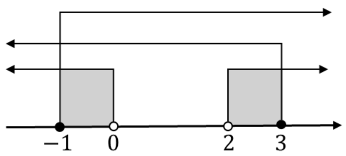
$(x-3)(x+1) \leqq 0$

$-1 \leqq x \leqq 3$

②を解くと

$x(x-1) > 0$

$x < 0$，$x > 2$



よって，$\boldsymbol{-1 \leqq x < 0}$，$\boldsymbol{2 < x \leqq 3}$

2.

（１）$\dfrac{x-5}{x-1} > 0$

両辺に$(x-1)^2 > 0$をかける．

$(x-1)(x-5) > 0$

$\boldsymbol{x < 1}$，$\boldsymbol{x > 5}$

（２）$\dfrac{2x}{x-1} - 1 < 0$

両辺に$(x-1)^2 > 0$をかける．

$2x(x-1) - (x-1)^2 < 0$

$2x^2 - 2x - x^2 + 2x - 1 < 0$

$x^2 - 1 < 0$

$(x+1)(x-1) < 0$

$\boldsymbol{-1 < x < 1}$

3.

（１）相加・相乗平均の大小関係より

$a + \dfrac{4}{b} \geqq 2\sqrt{a \cdot \dfrac{4}{b}} = 4\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

$b + \dfrac{4}{c} \geqq 2\sqrt{b \cdot \dfrac{4}{c}} = 4\sqrt{\dfrac{b}{c}}$

$c + \dfrac{4}{a} \geqq 2\sqrt{c \cdot \dfrac{4}{a}} = 4\sqrt{\dfrac{c}{a}}$

３式の両辺を掛け合わせると

$\left(a + \dfrac{4}{b}\right)\left(b + \dfrac{4}{c}\right)\left(c + \dfrac{4}{a}\right) \geqq 4\sqrt{\dfrac{a}{b}} \cdot 4\sqrt{\dfrac{b}{c}} \cdot 4\sqrt{\dfrac{c}{a}} = 64$

したがって

$\left(a + \dfrac{4}{b}\right)\left(b + \dfrac{4}{c}\right)\left(c + \dfrac{4}{a}\right) \geqq 64$

また，等号が成り立つのは

$a = \dfrac{4}{b}$，$b = \dfrac{4}{c}$，$c = \dfrac{4}{a}$

となるとき，この連立方程式を解く．

$ab = 4$・・・①

$bc = 4$・・・②

$ca = 4$・・・③

①，②より，$ab = bc$

$b \neq 0$より，$a = c$・・・④

④を，③に代入すると

$c^2 = 4$

$c > 0$より，$c = 2$・・・⑤

①，④，⑤より，

等号は$\boldsymbol{a = b = c = 2}$**のとき**成り立つ．

（２）$\sqrt{ab} \geqq \dfrac{2ab}{a+b}$

相加・相乗平均の大小関係より

$a + b \geqq 2\sqrt{ab}$

両辺に$\dfrac{\sqrt{ab}}{a+b}$をかけると

$\sqrt{ab} \geqq \dfrac{2ab}{a+b}$

等号は$\boldsymbol{a = b}$**のとき**成り立つ．

4.

（１）$(1+a^2) - (2a - a^2) = 1 + a^2 - 2a + a^2$

$= 2a^2 - 2a + 1$

$= 2(a^2 - a) + 1$

$= 2\left\{\left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}\right\} + 1$

$= 2\left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} + 1$

$= 22\left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2} > 0$

よって，$(1+a^2) - (2a - a^2) > 0$

したがって，$1 + a^2 > 2a - a^2$

（２）左辺を因数分解すると

1		$-a(2-a)$	$\rightarrow$	$-2a+a^2$
1		$-(1+a^2)$	$\rightarrow$	$-1-a^2$
1		$a(1+a^2)(2-a)$		$-2a-1$

よって，$\{x-a(a-a)\}\{x-(1+a^2)\}>0$

ここで，$1+a^2>2a-a^2$より

$\boldsymbol{x<2a-a^2,\ x>1+a^2}$

5.

（１）命題 **真**

逆「$\boldsymbol{x-y=-1}$**ならば**$\boldsymbol{x=2}$**かつ**$\boldsymbol{y=3}$**である」偽**

（反例：$x=3$，$y=4$）

対偶「$\boldsymbol{x-y\neq-1}$**ならば**$\boldsymbol{x\neq2}$**または**$\boldsymbol{y\neq3}$**である」真**

（２）命題 **偽**（反例：$a=1$，$b=i$）※iは虚数単位

逆「$\boldsymbol{a=0}$**かつ**$\boldsymbol{b=0}$**ならば**$\boldsymbol{a^2+b^2=0}$**」真**

対偶「$\boldsymbol{a\neq0}$**または**$\boldsymbol{b\neq0}$**ならば**$\boldsymbol{a^2+b^2\neq0}$**」偽**

（反例：$a=1$，$b=i$）

6.

（１）この命題の対偶は，

「$x\geqq2$かつ$y\geqq2$ならば$x^2+y^2\geqq8$」

これを証明する．

$x\geqq2$より$x^2\geqq4$

$y\geqq2$より$y^2\geqq4$

両辺を足し合わせて，$x^2+y^2\geqq8$となり対偶は真．

よって，この命題も真である．

（２）この命題の対偶は，

「nが３の倍数でないならばn^2も３の倍数ではない」

これを証明する．

nが３の倍数ではないので，整数mを用いて，

$n=3m+1$または$n=3m+2$と表すことができる．

（ⅰ）$n=3m+1$のとき

$$\begin{aligned} n^2 &= (3m+1)^2 \\ &= 9m^2+6m+1 \\ &= 3(3m^2+2m)+1 \end{aligned}$$

よって，n^2は３の倍数ではない．

（ⅱ）$n=3m+2$のとき

$$\begin{aligned} n^2 &= (3m+2)^2 \\ &= 9m^2+12m+4 \\ &= 3(3m^2+4m+1)+1 \end{aligned}$$

よって，n^2は３の倍数ではない．

（ⅰ）（ⅱ）より，対偶は真．

したがって命題も真である．