新基礎数学改訂版

# ２章　方程式と不等式

§２　不等式（p.52～p.67）

$\boxed{問１}$

（１）$3x-5>x+3$

$3x-x>3+5$

$2x>8$

$\boldsymbol{x>4}$

（２）$x-4\leqq 3-2x$

$x+2x\leqq 3+4$

$3x\leqq 7$

$\boldsymbol{x\leqq \frac{7}{3}}$

（３）$2x+3\geqq 3x-7$

$2x-3x\geqq -7-3$

$-x\geqq -10$

$\boldsymbol{x\leqq 10}$

（４）$2x+5<\dfrac{x-5}{3}$

両辺に3をかけて，

$3(2x+5)<x-5$

$6x+15<x-5$

$6x-x<-5-15$

$5x<-20$

$\boldsymbol{x<-4}$

$\boxed{問２}$

りんごの個数を$x$個とすると，柿の個数は$7-x$個.

したがって，不等式は以下のようになる.

$110x+80(7-x)\leqq 700$

両辺を10で割ると，

$11x+8(7-x)\leqq 70$

$11x+56-8x\leqq 70$

$3x\leqq 70-56$

$3x\leqq 14$

$x\leqq 4.666\ldots$

よって，**4個まで買える.**

$\boxed{問３}$　上の式を①，下の式を②とする.

（１）①を解くと

$x+2>1$

$x>-1$

②を解くと

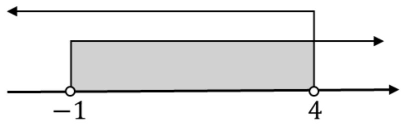
$x+6>2(x+1)$

$x+6>2x+2$

$x-2x>2-6$

$-x>-4$

$x<4$




よって，$\boldsymbol{-1<x<4}$

（２）①を解くと

$3x+6<4$

$3x<4-6$

$3x<-2$

$x<-\frac{2}{3}$

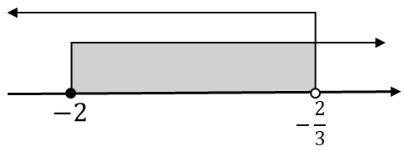
②を解くと

$x+1\leqq 4x+7$

$x-4x\leqq 7-1$

$-3x\leqq 6$

$x\geqq -2$




よって，$\boldsymbol{-2\leqq x<-\frac{2}{3}}$

（３）①を解くと

$2x+3\leqq 3x-1$

$2x-3x\leqq -1-3$

$-x\leqq -4$

$x\geqq 4$

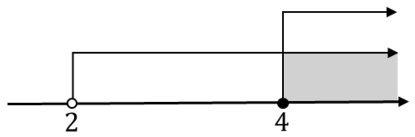
②を解くと，

$x-2>4-2x$

$x + 2x > 4 + 2$

$3x > 6$

$x > 2$



よって，$\boldsymbol{x \geqq 4}$

（４）①を解くと

$3(x-1) \leqq x+7$

$3x-3 \leqq x+7$

$3x-x \leqq 7+3$

$2x \leqq 10$

$x \leqq 5$

②を解くと

$$\frac{x-1}{2} \leqq \frac{4}{3}x+1$$

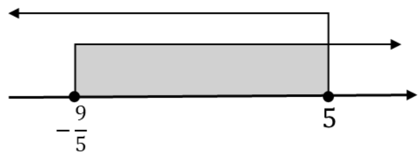
$$\frac{6(x-1)}{2} \leqq 6\left(\frac{4}{3}x+1\right)$$

$3x-3 \leqq 8x+6$

$3x-8x \leqq 6+3$

$-5x \leqq 9$

$$x \geqq -\frac{9}{5}$$



よって，$\boldsymbol{-\frac{9}{5} \leqq x \leqq 5}$

問４

（１）$x^2-7x+10<0$

$(x-2)(x-5)<0$

よって，$\boldsymbol{2<x<5}$

（２）$-2x^2+x+1<0$

両辺に$-1$をかけて，

$2x^2-x-1>0$

$(2x+1)(x-1)>0$

よって，$\boldsymbol{x<-\frac{1}{2}}$，$\boldsymbol{x>1}$

（３）$-x^2+9 \geqq 0$

両辺に$-1$をかけて，

$x^2-9 \leqq 0$

$(x+3)(x-3) \leqq 0$

よって，$\boldsymbol{-3 \leqq x \leqq 3}$

（４）$3x^2+11x+6 \geqq 0$

$(3x+2)(x+3) \geqq 0$

よって，$\boldsymbol{x \leqq -3}$，$\boldsymbol{x \geqq -\frac{2}{3}}$

問５

（１）$(x-2)(x+1)(2x+1)>0$

$P(x)=(x-2)(x+1)(2x+1)$とおく．

$P(x)=0$ になるのは，$x=-1$，$-\frac{1}{2}$，2 のとき．

各区間における因数の符号を調べると表のようになる．

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $-\frac{1}{2}$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $2x+1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $P(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

表より，$\boldsymbol{-1<x<-\frac{1}{2}}$，$\boldsymbol{x>2}$

（２）$x^3+2x^2-5x-6 \leqq 0$

$P(x)=x^3+2x^2-5x-6$とおく．

$P(2)=0$となるので，$P(x)$は$x-2$で割り切れる．

よって，$P(x)=(x-2)(x^2+4x+3)$

$=(x-2)(x+1)(x+3)$

$P(x)=0$となるのは，$x=-3$，$-1$，$2$のとき．

各区間における因数の符号を調べると表のようになる．

| $x$ | $\cdots$ | $-3$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+3$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x+1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $P(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

表より，$x \leqq \boldsymbol{-3}$，$\boldsymbol{-1 \leqq x \leqq 2}$

問６　$a^2 \geqq 1$を証明→$a^2-1 \geqq 0$を示せばよい．

左辺 = 右辺$= a^2-1$

$=(a+1)(a-1)$

ここで，$a \geqq 1$より

$a+1 \geqq 2 > 0$，$a-1 \geqq 0$

よって，$(a+1)(a-1) \geqq 0$

したがって，$a^2 \geqq 1$

また，等号が成り立つのは$a+1=0$か$a-1=0$のとき．

$a \geqq 1$より，$\boldsymbol{a=1}$**のとき**に成り立つ．

$\boxed{\text{問 7}}$

$a+c>b+d$を証明→$(a+c)-(b+d)>0$を示せばよい．

$$\begin{aligned}\text{左辺}=\text{右辺}&=(a+c)-(b+d)\\&=a+c-b-d\\&=(a-b)+(c-d)\end{aligned}$$

ここで，$a>b$より$(a-b)>0$

$c>d$より$(c-d)>0$

よって，$(a-b)+(c-d)>0$

したがって，$a+c>b+d$

$\boxed{\text{問 8}}$

$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$を証明

→左辺−右辺$\geqq 0$を示せばよい．

$$\begin{aligned}\text{左辺}-\text{右辺}&=(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2\\&=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2\\&\qquad-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)\\&=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2\\&\qquad-a^2x^2-2abxy-b^2y^2\\&=a^2y^2-2abxy+b^2x^2\\&=(ay-bx)^2 \geqq 0\end{aligned}$$

よって，$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$

また，等号が成り立つのは，$ay-bx=0$のとき．

すなわち，$\boldsymbol{ay=bx}$**のとき**に成り立つ．

$\boxed{\text{問 9}}$

（１）$x^2-4x+4 \geqq 0$

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=x^2-4x+4\\&=(x-2)^2\end{aligned}$$

ここで，$(x-2)^2 \geqq 0$より，$x^2-4x+4 \geqq 0$

（２）$x^2-6x+10>0$

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=x^2-6x+10\\&=x^2-6x+9+1\\&=(x-3)^2+1\end{aligned}$$

ここで，$(x-3)^2 \geqq 0$より，$(x-3)^2+1 \geqq 1$

よって，$x^2-6x+10>0$

$\boxed{\text{問 10}}$

（１）$a+\dfrac{4}{a} \geqq 4$

$a>0$ より，$\dfrac{4}{a}>0$

相加・相乗平均の大小関係より

$$a+\frac{4}{a} \geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{4}{a}}=2\sqrt{4}=4$$

よって，$a+\dfrac{4}{a} \geqq 4$

また，等号が成り立つのは

$a=\dfrac{4}{a}$ より$a^2=4$

$a>0$より，$\boldsymbol{a=2}$**のとき**等号が成り立つ．

（２）$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b} \geqq 2$

$a>0$，$b>0$ より$\dfrac{b}{a}>0$，$\dfrac{a}{b}>0$ なので

相加・相乗平均の大小関係より

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geqq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$$

よって，$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b} \geqq 2$

また，等号が成立するのは$\dfrac{b}{a}=\dfrac{a}{b}$のとき．

したがって，$\boldsymbol{a=b}$**のとき**等号が成立する．

$\boxed{\text{問 11}}$

$$\begin{aligned}B&=\left\{x \mid x^2>4, x\text{は整数}\right\}\\&=\left\{x \mid x^2-4>0, x\text{は整数}\right\}\\&=\left\{x \mid (x+2)(x-2)>0, x\text{は整数}\right\}\\&=\left\{x \mid x<-2, x>2, x\text{は整数}\right\}\\&=\{x \mid \cdots-4,-3,3,4\cdots\}\end{aligned}$$

であるから

$\boldsymbol{\overline{B}=\{-2,-1,0,1,2\}}$

問 12

（1）$\boldsymbol{A \cap B = \{2, 5\}}$

（2）$\boldsymbol{A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}}$

（3）$\overline{A} = \{1, 6, 7, 9, 10\}$，$\overline{B} = \{3, 4, 6, 8, 9, 10\}$

よって，$\boldsymbol{\overline{A} \cap \overline{B} = \{6, 9, 10\}}$

（4）求める集合は（2）の補集合であるから

$\boldsymbol{\overline{A \cup B} = \{6, 9, 10\}}$

問 13

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \overline{\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \cap \overline{C}} \\
&= \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \cup \overline{\overline{C}} \\
&= \left(\overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}}\right) \cup C \\
&= (A \cap B) \cup C = \text{右辺}
\end{aligned}
$$

問 14

（1）**真**

（2）**偽　反例：$\boldsymbol{x = -3}$**など

問 15

（1）$x = y \underset{\bigcirc}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}} x + z = y + z$

よって，$x + y \Leftrightarrow x + z = y + z$

であるから，**必要十分**条件.

（2）$ac = bc \underset{\bigcirc}{\overset{\times}{\rightleftarrows}} a = b$

よって，$ac = bc \Leftarrow a = b$

であるから，**必要**条件.

※ $\xrightarrow{\times}$ の反例は$a = 1$，$b = 2$，$c = 0$など.

（3）$n$は 4 の倍数 $\underset{\times}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}}$ $n$は 2 の倍数

よって，$n$は 4 の倍数$\Rightarrow$ $n$は 2 の倍数

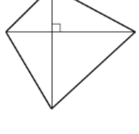
であるから，**十分**条件.

※ $\xleftarrow{\times}$ の反例は$n = 2$など.

（4）ひし形である $\underset{\times}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}}$ 対角線が垂直に交わる

よって，ひし形である$\Rightarrow$対角線が垂直に交わる

であるから，**十分**条件.

※ $\xleftarrow{\times}$ の反例は  のようなとき.

問 16

与えられた条件の否定$\overline{p}$は「$n$は 4 の倍数ではない」

また，$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$であるから

$\boldsymbol{\overline{P} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}}$

問 17

（1）与えられた条件の否定は「$x \geqq 1$かつ$x \leqq 3$」

であるから，$\boldsymbol{1 \leqq x \leqq 3}$

（2）与えられた条件は，「整数$n$は 4 で割り切れ，

かつ 5 で割り切れる」であるから，この否定は

**整数$\boldsymbol{n}$は 4 で割り切れないか5で割り切れない**

問 18

逆　$\boldsymbol{xy < 0 \to x < 0}$**かつ**$\boldsymbol{y > 0}$

裏　$\boldsymbol{x \geqq 0}$**または**$\boldsymbol{y \leqq 0 \to xy \geqq 0}$

対偶　$\boldsymbol{xy \geqq 0 \to x \geqq 0}$**または**$\boldsymbol{y \leqq 0}$

問 19

命題「$mn$が偶数ならば，$m$が偶数または$n$が偶数」

対偶は「$m$も$n$も奇数ならば，$mn$は奇数」これを証明する.

$m$も$n$も奇数のとき，自然数$a$，$b$を用いて

$m = 2a + 1$，$n = 2b + 1$と表すことができる.

$$
\begin{aligned}
mn &= (2a + 1)(2b + 1) \\
&= 4ab + 2a + 2b + 1 \\
&= 2(2ab + a + b) + 1
\end{aligned}
$$

となり$mn$は奇数になる.

対偶が真なのでもとの命題も真である.