練習問題 1-A

1.

（１）$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2}$

$=\boldsymbol{\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{4}}$

（２）$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-3\cdot 5}}{3}$

$=\dfrac{2\pm\sqrt{-11}}{3}$

$=\boldsymbol{\dfrac{2\pm\sqrt{11}i}{3}}$

（３）左辺を展開して整理すると

$(x^2-2x+1)+(x^2+4x+4)=0$

$2x^2+2x+5=0$

よって

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-2\cdot 5}}{2}$

$=\dfrac{-1\pm\sqrt{-9}}{2}$

$=\boldsymbol{\dfrac{-1\pm 3i}{2}}$

（４）$P(x)=3x^3-x^2-5x-1$とおくと

$P(-1)=0$なので，$P(x)$は$x+1$を因数にもつ．

$$\begin{array}{r@{}l}
 & 3x^2-4x-1 \\
x+1\,\big) & 3x^3-\ \ x^2-5x-1 \\
 & \underline{3x^3+3x^2} \\
 & -4x^2-5x-1 \\
 & \underline{-4x^2-4x} \\
 & -x-1 \\
 & \underline{-x-1} \\
 & 0
\end{array}$$

$P(x)=(x+1)(3x^2-4x-1)$

よって，$(x+1)(3x^2-4x-1)=0$

$x+1=0$より，$x=-1$

$3x^2-4x-1=0$より，

$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-3\cdot(-1)}}{3}$

$=\dfrac{2\pm\sqrt{7}}{3}$

よって，$\boldsymbol{x=-1,\ \dfrac{2\pm\sqrt{7}}{3}}$

（５）両辺に$(x-1)(x-3)$をかけて

$(x-3)-(x-1)=2(x-1)(x-3)$

$x-3-x+1=2x^2-8x+6$

$2x^2-8x+8=0$

$x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$

$\boldsymbol{x=2}$

（６）両辺を２乗して

$7-2x=x^2-4x+4$

$x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$

$x=-1,\ 3$

i）$x=-1$のとき

左辺$=\sqrt{7-2\cdot(-1)}=\sqrt{9}=3$

右辺$=-1-2=-3$

よって，不適.

ii）$x=3$のとき

左辺$=\sqrt{7-2\cdot 3}=1$

右辺$=3-2=1$

よって，$\boldsymbol{x=3}$

2.

（１）３式を，上から①，②，③とする．

$$\begin{array}{lrl}
① & & x-y+z=3 \\
② & +) & 2x-y-z=5 \\
\hline
 & & 3x-2y=8\cdot\cdot\cdot ④
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrl}
①\times 2 & & 2x-2y+2z=6 \\
③ & +) & x+3y-2z=8 \\
\hline
 & & 3x+y=14\cdot\cdot\cdot ⑤
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrl}
④ & & 3x-2y=8 \\
⑤ & -) & 3x+\ \ y=14 \\
\hline
 & & -3y=-6 \\
 & & y=2\cdot\cdot\cdot ⑥
\end{array}$$

⑥を⑤に代入して，$x=4\cdot\cdot\cdot$⑦

⑥，⑦を①に代入して，$z=1$

よって，$(x,\ y,\ z)=\boldsymbol{(4,\ 2,\ 1)}$

（２）３式を，上から①，②，③とする．

$$\begin{array}{lrr} ①\times -2 & & -2x+2y+2z=-4 \\ ② & +) & 4x-3y-2z=9 \\ \hline & & 2x-y=5\cdot\cdot\cdot④ \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} ② & & 4x-3y-2z=9 \\ ③ & +) & 2x-y+2z=3 \\ \hline & & 6x-4y=12 \\ & & 3x-2y=6\cdot\cdot\cdot⑤ \end{array}$$

$$\begin{array}{lrr} ④\times -2 & & -4x+2z=-10 \\ ⑤ & +) & 3x-2y=6 \\ \hline & & -x=-4 \\ & & x=4\cdot\cdot\cdot⑥ \end{array}$$

⑥を④に代入して，$y=3\cdot\cdot\cdot$⑦

⑥，⑦を①に代入して，$z=-1$

よって，$(x,\ y,\ z)=(\mathbf{4},\ \mathbf{3},\ \mathbf{-1})$

（３）２式を，上から①，②とする．

①より，$y=-x+1\cdot\cdot\cdot$①'

①'を②に代入して

$x^2-x(-x+1)-2(-x+1)^2=7$

$x^2+x^2-x-2x^2+4x-2=7$

$3x=9$

$x=3$

これを，①'に代入して，$y=-2$

よって，$(x,\ y)=(\mathbf{3},\ \mathbf{-2})$

（４）２式を，上から①，②とする．

①より，$y=-x+2\cdot\cdot\cdot$①'

①'を②に代入して

$x^2-2x(-x+2)-2(-x+2)^2=0$

$x^2+2x^2-4x-2x^2+8x-8=0$

$x^2+4x-8=0$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-1\cdot(-8)}}{1}$$

$=-2\pm2\sqrt{3}$

これを，①'に代入して

$y=-\left(-2\pm2\sqrt{3}\right)+2$

$=2\mp2\sqrt{3}+2$

$=4\mp2\sqrt{3}$

よって

$(x,\ y)=\left(\mathbf{-2\pm2\sqrt{3}},\ \mathbf{4\mp2\sqrt{3}}\right)$ **（複号同順）**

3.

与式を整理すると

$x^2-2x+1=kx-3k$

$x^2+(-2-k)x+(1+3k)=0$

この方程式の判別式をDとすると

$D=(-2-k)^2-4\cdot1\cdot(1+3k)$

$=4+4k+k^2-4-12k$

$=k^2-8k$

２重解をもつための条件は，$D=0$であるから

$k^2-8k=0$

$k(k-8)=0$

$k=0,\ 8$

i）$k=0$のとき

$$x=-\frac{b}{2a}$$

$$=-\frac{-2-k}{2\cdot1}$$

$$=-\frac{-2}{2}=1$$

ii）$k=8$のとき

$$x=-\frac{b}{2a}$$

$$=-\frac{-2-k}{2\cdot1}$$

$$=-\frac{-10}{2}=5$$

したがって

$$\begin{cases} \boldsymbol{k=0}\textbf{のとき}\quad \boldsymbol{x=1} \\ \boldsymbol{k=8}\textbf{のとき}\quad \boldsymbol{x=5} \end{cases}$$

4.

解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=2,\ \alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$$

（１）与式$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$$=2^2-2\cdot\frac{1}{3}$$

$$=4-\frac{2}{3}=\mathbf{\frac{10}{3}}$$

（２）与式 $= (\alpha^2+\beta^2)^2 - 2(\alpha\beta)^2$

$$= \left(\frac{10}{3}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$= \frac{100}{9} - \frac{2}{9}$$

$$= \boldsymbol{\frac{98}{9}}$$

（３）与式 $= (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

$$= 2\cdot\left(\frac{10}{3}-\frac{1}{3}\right)$$

$$= 2\cdot 3$$

$$= \mathbf{6}$$

5.

（１）$9x^2-3x-1=0$を解くと

$$x = \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 9\cdot(-1)}}{2\cdot 9}$$

$$= \frac{3\pm\sqrt{45}}{18}$$

$$= \frac{3\pm 3\sqrt{5}}{18}$$

$$= \frac{1\pm\sqrt{5}}{6}$$

よって

与式 $= \boldsymbol{9\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{6}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{6}\right)}$

または

与式 $= \boldsymbol{\left(3x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(3x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}$

（２）$15x^2+26x+8=0$を解くと

$(5x+2)(3x+4)=0$

$x = -\frac{2}{5}$，$-\frac{4}{3}$

よって

与式 $= \boldsymbol{15\left(x+\frac{2}{5}\right)\left(x+\frac{4}{3}\right)}$

または

与式 $= \boldsymbol{(5x+2)(3x+4)}$

【別解】※たすき掛けを用いる．

$$\begin{array}{cccc} 5 & 2 & \rightarrow & 6 \\ 3 & 4 & \rightarrow & 20 \\ \hline 15 & 8 & & 26 \end{array}$$

よって

与式$= \boldsymbol{(5x+2)(3x+4)}$

6.

（１）解と係数の関係より，

$$\frac{c}{a} = \alpha\beta = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{1-3}{4}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

（２）（１）より

$$\frac{c}{2} = -\frac{1}{2}$$

よって，$c=-1$

また，解と係数の関係より，

$$-\frac{b}{a} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{2} = 1$$

$a=2$であるから，

$$-\frac{b}{2} = 1$$

$$b = -2$$

したがって，求める２次方程式は，

$\boldsymbol{2x^2-2x-1=0}$

7.

（１）右辺をxについて整理すると

右辺$= 2x^3+3x^2+cx+2bx^2+3bx+bc$

$= 2x^3+(3+2b)x^2+(3b+c)x+bc$

この等式が，xについての恒等式になるための

条件は

$$\begin{cases} 3+2b=7 \\ 3b+c=9 \\ bc=a \end{cases}$$

これを解いて，$(a,\ b,\ c) = (\mathbf{6},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3})$

（２）右辺をxについて整理すると

右辺$= ax^2-2ax+a+bx^2-bx+cx$

$\quad = (a+b)x^2+(-2a-b+c)x+a$

この等式が，xについての恒等式になるための条件は

$$\begin{cases} a+b=3 \\ -2a-b+c=-1 \\ a=1 \end{cases}$$

これを解いて，$(a,\ b,\ c) = (\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3})$

練習問題 1-B

1.

（１）$x^2 = X$とおく．

$3X^2+14X-5=0$

$(3X-1)(X+5)=0$

$(3x^2-1)(x^2+5)=0$

$x^2 = \dfrac{1}{3},\ -5$

$x^2 = \dfrac{1}{3}$より，$x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$x^2 = -5$より，$x = \pm\sqrt{5}i$

よって，$\boldsymbol{x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{5}i}$

（２）$P(x) = 3x^4+x^3-17x^2+19x-6$とおくと

$P(1)=0$なので，$P(x)$は$x-1$を因数にもつ．

$$\begin{array}{r}
3x^3+4x^2-13x+6 \\
x-1\,\overline{)\,3x^4+\ x^3-17x^2+19x-6} \\
\underline{3x^4-3x^3\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
4x^3-17x^2+19x-6 \\
\underline{4x^3-\ \ 4x^2\qquad\qquad} \\
-13x^2+19x-6 \\
\underline{-13x^2+13x\qquad} \\
6x-6 \\
\underline{6x-6} \\
0
\end{array}$$

$P(x) = (x-1)(3x^3+4x^2-13x+6)$

$Q(x) = 3x^3+4x^2-13x+6$とおくと

$Q(1)=0$なので，$Q(x)$は$x-1$を因数にもつ．

$$\begin{array}{r}
3x^2+7x-6 \\
x-1\,\overline{)\,3x^3+4x^2-13x+6} \\
\underline{3x^3-3x^2\qquad\qquad\quad} \\
7x^2-13x+6 \\
\underline{7x^2-7x\qquad} \\
-6x+6 \\
\underline{-6x+6} \\
0
\end{array}$$

$Q(x) = (x-1)(3x^2+7x-6)$

よって

$P(x) = (x-1)(x-1)(3x^2+7x-6)$

$\quad = (x-1)^2(x+3)(3x-2)$

したがって

$\boldsymbol{x = 1,\ -3,\ \dfrac{2}{3}}$

（３）$\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{10}{(x-1)(x-3)} = \dfrac{x}{x-3}$

両辺に$(x-1)(x-3)$をかけると

$5(x-3)+10 = x(x-1)$

$5x-15+10 = x^2-x$

$x^2-6x+5=0$

$(x-1)(x-5)=0$

$x = 1,\ 5$

ここで，$x=1$は元の方程式の分母を0にするので，無縁解．

したがって，$\boldsymbol{x=5}$

（４）$2x+3 = \pm(3x-2)$

i）$2x+3 = 3x-2$のとき

$-x=-5$

$x=5$

ii）$2x+3=-3x+2$のとき

$5x=-1$

$x = -\dfrac{1}{5}$

よって，$\boldsymbol{x = 5,\ -\dfrac{1}{5}}$

（５）両辺を２乗すると

$x-5 = \left(\sqrt{x+3}-2\right)^2$

$x-5 = (x+3)-4\sqrt{x+2}+4$

$4\sqrt{x+2} = 12$

$\sqrt{x+3} = 3$

両辺を２乗すると

$x+3=9$

$x=6$

これは，もとの方程式を満たすから，$\boldsymbol{x=6}$

2.

（１）２式を，上から①，②とする．

①より，$y = 1-x$・・・①’

①’を②に代入して，

$x^3+(1-x)^3=7$

$x^3+(1-3x+3x^2-x^3)=7$

$3x^2-3x-6=0$

$x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$x=-1,\ 2$

これを①'に代入すると

$x=-1$のとき，$y=2$

$x=2$のとき，$y=-1$

よって，$(x,\ y)=(\mathbf{-1},\ \mathbf{2}),\ (\mathbf{2},\ \mathbf{-1})$

（２）２式を，上から①，②とする．

①より，$(x+y)(x-3y)=0$

$x=-y,\ 3y$

i）$x=-y$・・・③のとき

②に代入して，

$(-y)^2+(-y)y+2y^2=14$

$y^2-y^2+2y^2=14$

$y^2=7$

$y=\pm\sqrt{7}$

これを③に代入して，$x=\mp\sqrt{7}$

ii）$x=3y$・・・④のとき

②に代入して，

$(3y)^2+3y\cdot y+2y^2=14$

$9y^2+3y^2+2y^2=14$

$y^2=1$

$y=\pm 1$

これを④に代入して，$x=\pm 3$

以上より，

$(x,\ y)=\left(\pm\sqrt{\mathbf{7}},\ \mp\sqrt{\mathbf{7}}\right),\ (\pm\mathbf{3},\ \pm\mathbf{1})$　**（複号同順）**

3.

（１）右辺を通分し，分子をxについて整理すると

$$右辺=\frac{a(x^2-x+1)}{x(x^2-x+1)}+\frac{(bx+c)x}{(x^2-x+1)x}$$

$$=\frac{ax^2-ax+a+bx^2+cx}{x(x^2-x+1)}$$

$$=\frac{(a+b)x^2+(-a+c)x+a}{x(x^2-x+1)}$$

左辺の分子の係数と比較して，

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -a+c=5 \\ a=-4 \end{cases}$$

これを解いて，$(a,\ b,\ c)=(\mathbf{-4},\ \mathbf{4},\ \mathbf{1})$

（２）右辺を通分し，分子をxについて整理すると

$$右辺=\frac{a(x-2)^2}{x(x-2)^2}+\frac{bx(x-2)}{(x-2)x(x-2)}+\frac{cx}{(x-2)^2x}$$

$$=\frac{ax^2-4ax+4a+bx^2-2bx+cx}{x(x-2)^2}$$

$$=\frac{(a+b)x^2+(-4a-2b+c)x+4a}{x(x-2)^2}$$

左辺の分子と比較して，

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -4a-2b+c=5 \\ 4a=-4 \end{cases}$$

これを解いて，$(a,\ b,\ c)=(\mathbf{-1},\ \mathbf{1},\ \mathbf{3})$

4.

$x+y+z=0$より，$z=-x-y$

これを，左辺に代入すると

$$左辺=x^3+y^3+(-x-y)^3-3xy(-x-y)$$

$$=x^3+y^3-x^3-3x^2y-3xy^2-y^3+3x^2y+3xy^2$$

$$=0=右辺$$

5.

$$左辺=(x+y)^3+z^3-3xy(x+y)-3xyz$$

$$=\{(x+y)+z\}\{(x+y)^2-(x+y)z+z^2\}-3xy(x+y+z)$$

$$=(x+y+z)(x^2+2xy+y^2-xz-yz+z^2)-3xy(x+y+z)$$

$$=(x+y+z)\{(x^2+y^2+z^2+2xy-yz-zx)-3xy\}$$

$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=右辺$$

6.

$abc=1$ より，$c=\dfrac{1}{ab}$

これを，左辺に代入すると

$$左辺=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{b\cdot\frac{1}{ab}+b+1}+\frac{\frac{1}{ab}}{\frac{1}{ab}\cdot a+\frac{1}{ab}+1}$$

$$=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{\frac{1}{a}+b+1}+\frac{\frac{1}{ab}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}+1}$$

$$=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{1+ab+a}+\frac{1}{a+1+ab}$$

$$=\frac{a+ab+1}{a+ab+1}$$

$$=1=右辺$$

7.

道路の幅をxm とすると，

$$35\times 48-(35-2x)(48-2x)=240$$

これを解くと，

$$1680-(4x^2-166x+1680)=240$$

$$4x^2-166x+240=0$$

$$x=\frac{-(-83)\pm\sqrt{(-83)^2-4\cdot 240}}{4}$$

$$=\frac{83\pm\sqrt{5929}}{4}$$

$$=\frac{83\pm 77}{4}$$

$$=\frac{75}{2},\ \frac{3}{2}$$

ここで，$0<x<\dfrac{35}{2}$より，$x=\dfrac{75}{2}$は不適.

したがって，道の幅は，$\mathbf{1.5m}$

8.

直角をはさむ2辺長さを，$x$cm，$y$cm とすると，
斜辺の長さは，$\sqrt{x^2+y^2}$cm となる．
周囲の長さが14cm であるから，

$$x+y+\sqrt{x^2+y^2}=14$$

面積が 7cm^{2}であるから，$\dfrac{1}{2}xy=7$

よって

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2+y^2}=14 \cdot\cdot\cdot ① \\ xy=14 \cdot\cdot\cdot ② \end{cases}$$

①より

$$\sqrt{x^2+y^2}=14-x-y$$

両辺を2乗すると

$$x^2+y^2=(14-x-y)^2$$

$$x^2+y^2=14^2+x^2+y^2-2\cdot 14x+2xy-2\cdot 14y$$

$$14x-xy+14y-14\cdot 7=0$$

②を代入すると

$$14x-14+14y=14\cdot 7$$

$$x-1+y=7$$

$$x+y=8 \cdot\cdot\cdot ③$$

③より，$y=8-x \cdot\cdot\cdot$ ③’

これを，②に代入して

$$x(8-x)=14$$

$$x^2-8x+14=0$$

$$x=-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-1\cdot 14}$$

$$=4\pm\sqrt{2}$$

③’に代入して

$x=4+\sqrt{2}$のとき，$y=4-\sqrt{2}$

$x=4-\sqrt{2}$のとき，$y=4+\sqrt{2}$

これらは，①，②を満たす.

このとき，斜辺の長さはいずれの場合も

$$\sqrt{\left(4+\sqrt{2}\right)^2+\left(4-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{36}=6$$

よって，3辺の長さは，$\mathbf{4+\sqrt{2}}$**cm**，$\mathbf{4-\sqrt{2}}$**cm**，**6cm**