２章　方程式と不等式

問１

（１）$(x+1)(x+5)=0$

$\boldsymbol{x=-1,\ -5}$

（２）$(x+2)^2=0$

$\boldsymbol{x=-2}$

（３）$x=\pm\sqrt{49}$

$\boldsymbol{x=\pm 7}$

（４）$x(x-2)=0$

$\boldsymbol{x=0,\ 2}$

（５）$(3x+2)(2x-3)=0$

$\boldsymbol{x=-\frac{2}{3},\ \frac{3}{2}}$

（６）$2x^2-5x-3=0$

$(2x+1)(x-3)=0$

$\boldsymbol{x=-\frac{1}{2},\ 3}$

問２

（１）$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}$

$=\boldsymbol{\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{2}}$

（２）$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot3\cdot(-1)}}{2\cdot3}$

$=\boldsymbol{\dfrac{-3\pm\sqrt{21}}{6}}$

（３）$x=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}$

$=\dfrac{4\pm\sqrt{8}}{2}$

$=\dfrac{4\pm2\sqrt{2}}{2}$

$=\boldsymbol{2\pm\sqrt{2}}$

（４）$x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot2\cdot(-5)}}{2\cdot2}$

$=\boldsymbol{\dfrac{1\pm\sqrt{41}}{4}}$

問３

（１）$(x+3)^2=0$

$\boldsymbol{x=-3}$

（２）$(2x-3)^2=0$

$\boldsymbol{x=\frac{3}{2}}$

問４

（１）$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}$

$=\dfrac{-3\pm\sqrt{-7}}{2}$

$=\boldsymbol{\dfrac{-3\pm\sqrt{7}i}{2}}$

（２）$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot2\cdot4}}{2\cdot2}$

$=\dfrac{-5\pm\sqrt{-7}}{4}$

$=\boldsymbol{\dfrac{-5\pm\sqrt{7}i}{4}}$

（３）$x^2=-9$

$x=\pm\sqrt{-9}$

$\boldsymbol{x=\pm3i}$

（４）$x=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot3\cdot3}}{2\cdot3}$

$=\dfrac{4\pm\sqrt{-20}}{6}$

$=\dfrac{4\pm2\sqrt{5}i}{6}$

$=\boldsymbol{\dfrac{2\pm\sqrt{5}i}{3}}$

問５　それぞれの２次方程式の判別式をDとする．

（１）$D=(-4)^2-4\cdot4\cdot1$

$=16-16=0$

よって，**２重解**をもつ．

（２）$D=1^2-4\cdot1\cdot2$

$=1-8=-7<0$

よって，**異なる２つの虚数解**をもつ．

（３）$D=(-2)^2-4\cdot3\cdot(-4)$

$=4+48=52>0$

よって，**異なる 2 つの実数解**をもつ．

問 6

それぞれの 2 次方程式の判別式をDとすると，

2 重解をもつための条件は，$D=0$である．

（１）$D=k^2-4\cdot 2\cdot k$

$=k^2-8k$

$=k(k-8)=0$

よって，$k=0$，8

i）$k=0$のときの 2 重解は

$$x=-\frac{b}{2a}$$

$$=-\frac{k}{2\cdot 2}$$

$$=-\frac{0}{4}=0$$

ii）$k=0$のときの 2 重解は

$$x=-\frac{b}{2a}$$

$$=-\frac{k}{2\cdot 2}$$

$$=-\frac{8}{4}=-2$$

したがって

$$\begin{cases}\boldsymbol{k=0}\textbf{のとき}\quad \boldsymbol{x=0}\\ \boldsymbol{k=8}\textbf{のとき}\quad \boldsymbol{x=-2}\end{cases}$$

（２）$D=(k-1)^2-4\cdot 1\cdot (k+2)$

$=k^2-2k+1-4k-8$

$=k^2-6k-7$

$=(k+1)(k-7)=0$

よって，$k=-1$，7

i）$k=-1$のときの 2 重解は

$$x=-\frac{b}{2a}$$

$$=-\frac{k-1}{2\cdot 1}$$

$$=-\frac{-1-1}{2}=1$$

ii）$k=7$のときの 2 重解は

$$x=-\frac{b}{2a}$$

$$=-\frac{k-1}{2\cdot 1}$$

$$=-\frac{7-1}{2}=-3$$

したがって

$$\begin{cases}\boldsymbol{k=-1}\textbf{のとき}\quad \boldsymbol{x=1}\\ \boldsymbol{k=7}\textbf{のとき}\quad \boldsymbol{x=-3}\end{cases}$$

問 7

解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=6,\ \alpha\beta=\frac{c}{a}=3$$

（１）与式$=\alpha\beta+2\alpha+2\beta+4$

$=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4$

$=3+2\cdot 6+4$

$=3+12+4=\mathbf{19}$

（２）与式$=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)-2\alpha\beta$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=6^2-2\cdot 3$

$=36-6=\mathbf{30}$

（３）与式$=\dfrac{\beta^2}{\alpha\beta}+\dfrac{\alpha^2}{\alpha\beta}$

$$=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{30}{3}=\mathbf{10}$$

問 8

（１）$x^2-4x+2=0$を解くと

$x=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot 2}$

$=2\pm\sqrt{4-2}$

$=2\pm\sqrt{2}$

よって

$$\text{与式}=\boldsymbol{\left(x-2-\sqrt{2}\right)\left(x-2+\sqrt{2}\right)}$$

（２）$x^2-5x+7=0$を解くと

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot 7}}{2\cdot 1}$$

$$=\frac{5\pm\sqrt{-3}}{2}$$

$$=\frac{5\pm\sqrt{3}i}{2}$$

よって

$$与式 = \left(\boldsymbol{x - \frac{5+\sqrt{3}i}{2}}\right)\left(\boldsymbol{x - \frac{5-\sqrt{3}i}{2}}\right)$$

（３）$2x^2+2x+3=0$を解くと

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 2\cdot 3}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-5}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}i}{2}$$

よって

$$与式 = \boldsymbol{2\left(x + \frac{1-\sqrt{5}i}{2}\right)\left(x + \frac{1+\sqrt{5}i}{2}\right)}$$

（４）$4x^2-4x-1=0$を解くと

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot(-1)}}{4}$$

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$$

よって

$$与式 = \boldsymbol{4\left(x - \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)}$$

または

$$与式 = \boldsymbol{(2x-1-\sqrt{2})(2x-1+\sqrt{2})}$$

問９

（１）$x^2 = X$とおく．

$X^2 - X - 20 = 0$

$(X+4)(X-5)=0$

$(x^2+4)(x^2-5)=0$

$x^2+4=0$より，$x=\pm 2i$

$x^2-5=0$より，$x=\pm\sqrt{5}$

よって，$\boldsymbol{x = \pm 2i,\ \pm\sqrt{5}}$

（２）$x^2 = X$とく．

$x(x^4-3x^2-4)=0$

$x(X^2-3X-4)=0$

$x(X+1)(X-4)=0$

$x(x^2+1)(x^2-4)=0$

$x^2+1=0$より，$x=\pm i$

$x^2-4=0$より，$x=\pm 2$

よって，$\boldsymbol{x = 0,\ \pm 2,\ \pm i}$

問 10

（１）$P(x) = x^3 - 3x + 2$とおくと

$P(1)=0$であるから，$P(x)$は$x-1$を因数にもつ．

$$\begin{array}{r}
x^2 + x - 2 \\
x-1 \,\big)\, x^3 - 3x + 2 \\
x^3 - x^2 \\
\hline
x^2 - 3x + 2 \\
x^2 - x \\
\hline
-2x + 2 \\
-2x + 2 \\
\hline
0
\end{array}$$

$P(x) = (x-1)(x^2+x-2)$

よって，$(x-1)(x^2+x-2)=0$であるから

$x-1=0$より，$x=1$

$x^2+x-2=0$より，

$(x-1)(x+2)=0$

$x=1,\ -2$

以上より

$\boldsymbol{x = 1,\ -2}$

（２）$P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$とおくと

$P(1)=0$であるから，$P(x)$は$x-1$を因数にもつ．

$$\begin{array}{r}
2x^2 + 3x - 2 \\
x-1 \,\big)\, 2x^3 + x^2 - 5x + 2 \\
2x^3 - 2x^2 \\
\hline
3x^2 - 5x + 2 \\
3x^2 - 3x \\
\hline
-2x + 2 \\
-2x + 2 \\
\hline
0
\end{array}$$

$P(x) = (x-1)(2x^2+3x-2)$

$ = (x-1)(2x-1)(x+2)$

よって，$(x-1)(2x-1)(x+2)=0$であるから

$\boldsymbol{x = 1,\ \frac{1}{2},\ -2}$

問 11　３式を，上から①，②，③とする．

（１）

$$\begin{array}{lrl}
① & & x + y + z = 1 \\
② & -) & x + 2y + 3z = 3 \\
\hline
 & & -y - 2z = -2 \cdots ④
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrl}
①\times 2 & & 2x + 2y + 2z = 2 \\
③ & -) & 2x + 3y - 2z = -8 \\
\hline
 & & -y + 4z = 10 \cdots ⑤
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrl}
④\times 2 & & -2y - 4z = -4 \\
⑤ & +) & -y + 4z = 10 \\
\hline
 & & -3y = 6 \\
 & & y = -2 \cdots ⑥
\end{array}$$

⑥を⑤に代入して，$z=2$・・・⑦

⑥，⑦を①に代入して，$x=1$

よって，$(x,\ y,\ z)=(\mathbf{1},\ -\mathbf{2},\ \mathbf{2})$

（２）①より，$x=-2y$・・・①’

これを，②，③に代入して

$-2y+y+2z=5$

$-y+2z=5$・・・②’

$2\cdot(-2y)+3y-z=-4$

$-y-z=-4$

$y+z=4$・・・③’

$$\begin{array}{lr} ②' & -y+2z=5 \\ ③' \quad +) & y+\ z=4 \\ \hline & 3z=9 \end{array}$$

$z=3$・・・④

④を③’に代入して，$y=1$・・・⑤

⑤を①’に代入して，$x=-2$

よって，$(x,\ y,\ z)=(-\mathbf{2},\ \mathbf{1},\ \mathbf{3})$

問 12　2 式を，上から①，②とする．

（１）①より，$y=2x-1$・・・①’

これを，②に代入して

$2x^2-(2x-1)^2+3(2x-1)=4$

$2x^2-(4x^2-4x+1)+6x-3-4=0$

$-2x^2+10x-8=0$

$x^2-5x+4=0$

$(x-1)(x-4)=0$

$x=1，4$

これらを，①’に代入して

$x=1$のとき，$y=1$

$x=4$のとき，$y=7$

よって，$(x,\ y)=(\mathbf{1},\ \mathbf{1})，(\mathbf{4},\ \mathbf{7})$

（２）①より，$y=-x+2$・・・①’

②に代入して

$x^2+x(-x+2)+(-x+2)^2=5$

$x^2-x^2+2x+x^2-4x+4-5=0$

$x^2-2x-1=0$

$x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot(-1)}$

$=1\pm\sqrt{2}$・・・③

③を①’に代入

$x=-\left(1\pm\sqrt{2}\right)+2$

$=-1\mp\sqrt{2}+2$

$=1\mp\sqrt{2}$

よって，$(x,\ y)=\left(\mathbf{1}\pm\sqrt{\mathbf{2}},\ \mathbf{1}\mp\sqrt{\mathbf{2}}\right)$　**（複号同順）**

問 14

（１）$2x+3=\pm1$

$2x=-3\pm1$

$x=\dfrac{-3\pm1}{2}$

$\boldsymbol{x=-1,\ -2}$

（２）$|3x-5|=2$

$3x-5=\pm2$

$3x=5\pm2$

$x=\dfrac{5\pm2}{3}$

$\boldsymbol{x=\dfrac{7}{3},\ 1}$

問 14

（１）両辺に$(x-2)(x+3)$をかけると，

$6(x+3)+(x-2)=3x$

$6x+18+x-2=3x$

$4x=-16$

$\boldsymbol{x=-4}$

（２）両辺に$(x+5)(x-5)$をかけると，

$x(x-5)+(x+5)=2x^2$

$x^2-5x+x+5=2x^2$

$x^2+4x-5=0$

$(x-1)(x+5)=0$

$x=1，-5$

ここで，$x=-5$は元の方程式の分母を0にするので無縁解である．

よって，$\boldsymbol{x=1}$

問 15

（１）両辺を 2 乗すると

$x=(x-2)^2$

$x=x^2-4x+4$

$x^2-5x+4=0$

$(x-1)(x-4)=0$

$x=1，4$

i）$x=1$のとき

左辺$=1$，右辺$=-1$　不適

ii）$x = 4$のとき

左辺$= 2$，右辺$= 2$

よって，$\boldsymbol{x = 4}$

（２）両辺を２乗すると

$13 - x^2 = (x-1)^2$

$13 - x^2 = x^2 - 2x + 1$

$2x^2 - 2x - 12 = 0$

$x^2 - x - 6 = 0$

$(x+2)(x-3) = 0$

$x = -2，3$

i）$x = -2$のとき

左辺$= 3$，右辺$= -3$　不適

ii）$x = 3$のとき

左辺$= 2$，右辺$= 2$

よって，$\boldsymbol{x = 3}$

問 16

（１）両辺の係数を比較して

$\boldsymbol{a = -3，b = 1}$

（２）両辺の係数，定数項を比較して

$\boldsymbol{a = 1，b = 2}$

問 17

（１）右辺をxについて整理すると

右辺$= ax^2 + 2ax + a + bx^2 + bx + 2b$

$= (a+b)x^2 + (2a+b)x + (a+2b)$

この等式が，xについての恒等式になるための条件は

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 4 \\ a + 2b = c \end{cases}$$

これを解いて，$(a，b，c) = \boldsymbol{(3，-2，-1)}$

（２）右辺をxについて整理すると

右辺$= ax^2 + 4a + bx^2 + cx - bx - c$

$= (a+b)x^2 + (-b+c)x + (4a-c)$

この等式が，xについての恒等式になるための条件は

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -b + c = 5 \\ 4a - c = 0 \end{cases}$$

これを解いて，$(a，b，c) = \boldsymbol{(1，-1，4)}$

（３）右辺を展開して，xについて整理すると

右辺$= x^3 + cx^2 + x^2 + cx + bx + bc$

$= x^3 + (c+1)x^2 + (b+c)x + bc$

この等式が，xについての恒等式になるための条件は

$$\begin{cases} c + 1 = a \\ b + c = 5 \\ bc = 6 \end{cases}$$

これを解いて，$(a，b，c) = \boldsymbol{(4，2，3)，(3，3，2)}$

問 18

（１）右辺 $= \dfrac{a(x+1)}{(x-2)(x+1)} + \dfrac{b(x-2)}{(x+1)(x-2)}$

$= \dfrac{ax + a + bx - 2b}{(x-2)(x+1)}$

$= \dfrac{(a+b)x + (a-2b)}{(x-2)(x+1)}$

よって

$$\frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{(a+b)x + (a-2b)}{(x-2)(x+1)}$$

この等式が，xについての恒等式になるための条件は

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - 2b = 1 \end{cases}$$

これを解いて，$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{3}}$，$\boldsymbol{b = -\dfrac{1}{3}}$

（２）右辺 $= \dfrac{a(x^2+1)}{(x-2)(x^2+1)} + \dfrac{(bx+c)(x-2)}{(x^2+1)(x-2)}$

$= \dfrac{ax^2 + a + bx^2 - 2bx + cx - 2c}{(x-2)(x^2+1)}$

$= \dfrac{(a+b)x^2 + (-2b+c)x + (a-2c)}{(x-2)(x^2+1)}$

よって

$$\frac{5x-5}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{(a+b)x^2 + (-2b+c)x + (a-2c)}{(x-2)(x^2+1)}$$

この等式が，xについての恒等式になるための条件は

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -2b + c = 5 \\ a - 2c = -5 \end{cases}$$

これを解いて，$(a，b，c) = \boldsymbol{(1,-1，3)}$

問 19

（１）右辺$= (x^4 + x^3 + x^2) + (-x^3 - x^2 - x)$

$+(x^2 + x + 1)$

$= x^4 + x^2 + 1 =$左辺

（２）左辺$= a^2c^2 - a^2d^2 - b^2c^2 + b^2d^2$

右辺$= a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2$

$-(a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2)$

$= a^2c^2 + b^2d^2 - a^2d^2 - b^2c^2$

よって，左辺=右辺

$\boxed{問 20}$

$x+y+z=0$より，$z=-(x+y)$なので

左辺$=x^2-y\{-(x+y)\}$

$=x^2+xy+y^2$

右辺$=y^2-\{-(x+y)\}x$

$=y^2+x^2+xy$

よって，左辺=右辺