練習問題 1-A

1.

（１）与式 $= (2a^2 + 3ab - 4b^2)$

$\quad + (a^2 - 3ab + b^2)$

$\quad\quad + (2a^2 + 3ab - b^2)$

$= \boldsymbol{5a^2 + 3ab - 4b^2}$

（２）与式 $= 3A - 5B - 2C$

$= 3(2a^2 + 3ab - 4b^2)$

$\quad -5(a^2 - 3ab + b^2)$

$\quad\quad -2(2a^2 + 3ab - b^2)$

$= 6a^2 + 9ab - 12b^2$

$\quad -5a^2 + 15ab - 5b^2$

$\quad\quad -4a^2 - 6ab + 2b^2$

$= \boldsymbol{-3a^2 + 18ab - 15b^2}$

（３）与式$= (A - C)B$

$= \{(2a^2 + 3ab - 4b^2) - (2a^2 + 3ab - b^2)\}$

$\quad \times (a^2 - 3ab + b^2)$

$= (-3b^2)(a^2 - 3ab + b^2)$

$= \boldsymbol{-3a^2b^2 + 9ab^3 - 3b^4}$

2.

（１）与式 $= \{(a + 2b)(a - 2b)\}^2$

$= \{a^2 - (2b)^2\}^2$

$= (a^2 - 4b^2)^2$

$= (a^2)^2 - 2 \cdot a^2 \cdot 4b^2 + (4b^2)^2$

$= \boldsymbol{a^4 - 8a^2b^2 + 16b^2}$

（２）与式 $= 15x^2 + \{3 \cdot 4 + (-2) \cdot 5\}x - 8$

$= \boldsymbol{15x^2 + 2x - 8}$

（３）与式 $= (4x)^3 - 3 \cdot (4x)^2 \cdot y + 3 \cdot 4x \cdot y^2 - y^3$

$= \boldsymbol{64x^3 - 48x^2y + 12xy^2 - y^3}$

（４）$2a + 3b = X$とおく．

与式 $= (X - 4)(X + 1)$

$= X^2 - 3X - 4$

$= (2a + 3b)^2 - 3(2a + 3b) - 4$

$= \boldsymbol{4a^2 + 12ab + 9b^2 - 6a - 9b - 4}$

（５）与式 $= x^3 + (2y)^3 = \boldsymbol{x^3 + 8y^3}$

（６）与式 $= 2x^3 - 3x^2y$

$\quad +4x^2y - 6xy^2$

$\quad\quad +8xy^2 - 12y^3$

$= \boldsymbol{2x^3 + x^2y + 2xy^2 - 12y^3}$

3.

（１）与式 $= 2x(x^3 - 8y^3)$

$= 2x\{x^3 - (2y)^3\}$

$= 2x(x - 2y)\{x^2 + 2xy + (2y)^2\}$

$= \boldsymbol{2x(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)}$

（２）与式 $= (a + b)x + (-a - b)y$

$= (a + b)x + (a + b) \cdot (-y)$

$= \boldsymbol{(a + b)(x - y)}$

（３）

$$\begin{array}{ccccc} 3 & & -5 & \to & -5 \\ 1 & & 1 & \to & 3 \\ \hline 3 & & -5 & & -2 \end{array}$$

よって

与式 $= \boldsymbol{(3a - 5)(a + 1)}$

（４）$x^2 = X$とおく．

与式 $= (x^2)^2 - 10x^2 + 9$

$= X^2 - 10X + 9$

$= (X - 1)(X - 9)$

$= (x^2 - 1)(x^2 - 9)$

$= \boldsymbol{(x + 1)(x - 1)(x + 3)(x - 3)}$

（５）xについて整理する．

与式 $= x^2 + (-3y + 4)x + (2y^2 - 7y + 3)$

yについての項を因数分解する．

$$\begin{array}{ccccc} 2 & & -1 & \to & -1 \\ 1 & & -3 & \to & -6 \\ \hline 2 & & 3 & & -7 \end{array}$$

よって

与式 $= x^2 + (-3y + 4)x + (2y - 1)(y - 3)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & -(2y - 1) & \to & -2y + 1 \\ 1 & & -(y - 3) & \to & -y + 3 \\ \hline 1 & & (2y - 1)(y - 3) & & -3y + 4 \end{array}$$

したがって

与式 $= \{x - (2y - 1)\}\{x - (y - 3)\}$

$= \boldsymbol{(x - 2y + 1)(x - y + 3)}$

（６）与式 $= x^2 + (4y + 8)x + 3y^2 + 6y - 9$

$= x^2 + (4y + 8)x + 3(y^2 + 2y - 3)$

$= x^2 + (4y + 8)x + 3(y - 1)(y + 3)$

1		$y-1$	→	$y-1$
1		$3(y+3)$	→	$3y+9$
1		$3(y-1)(y+3)$		$4y+8$

よって

与式 $= \boldsymbol{(x+y-1)(x+3y+9)}$

4.

（1）

$$\begin{array}{r l}
 & x^2-2x+4 \\
2x^2+3x-1 \,\big) & 2x^4-\ \ x^3+\ \ x^2+14x-4 \\
 & \underline{2x^4+3x^3-\ \ x^2} \\
 & -4x^3+2x^2+14x-4 \\
 & \underline{-4x^3-6x^2+2x} \\
 & 8x^2+12x-4 \\
 & \underline{8x^2+12x-4} \\
 & 0
\end{array}$$

商 $\boldsymbol{x^2-2x+4}$，余り $\boldsymbol{0}$

等式 $\boldsymbol{A=B(x^2-2x+4)}$

（2）

$$\begin{array}{r l}
 & 4x^2+2x+3 \\
2x-1 \,\big) & 8x^3+\qquad\ \ 4x+1 \\
 & \underline{8x^3-4x^2} \\
 & 4x^2+4x+1 \\
 & \underline{4x^2-2x} \\
 & 6x+1 \\
 & \underline{6x-3} \\
 & 4
\end{array}$$

商 $\boldsymbol{4x^2+2x+3}$，余り $\boldsymbol{4}$

等式 $\boldsymbol{A=B(4x^2+2x+3)+4}$

5.

（1）

	2	2		a	b^3	
	2			a^2	b	c
	2		3	a^3	b^2	c^2
最大公約数=	2			a	b	
最小公倍数=	2	2	3	a^3	b^3	c^2

よって

最大公約数　$\boldsymbol{2ab}$

最小公倍数　$\boldsymbol{12a^3b^3c^2}$

（2）

	x	$(x-1)$
		$(x-1)^2$
最大公約数=		$(x-1)$
最小公倍数=	x	$(x-1)^2$

よって

最大公約数　$\boldsymbol{x-1}$

最小公倍数　$\boldsymbol{x(x-1)^2}$

（3）$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

$x^4+2x^2-3=(x^2-1)(x^2+3)$

$=(x+1)(x-1)(x^2+3)$

		$(x-1)$	$(x+2)$	
	$(x+1)$	$(x-1)$		(x^2+3)
最大公約数=		$(x-1)$		
最小公倍数=	$(x+1)$	$(x-1)$	$(x+2)$	(x^2+3)

よって

最大公約数　$\boldsymbol{x-1}$

最小公倍数　$\boldsymbol{(x+1)(x-1)(x+2)(x^2+3)}$

（4）$x^2+2x=x(x+2)$

$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

$x^2+4x+4=(x+2)^2$

	x		$(x+2)$
		$(x-1)$	$(x+2)$
			$(x+2)^2$
最大公約数=			$(x+2)$
最小公倍数=	x	$(x-1)$	$(x+2)^2$

よって

最大公約数　$\boldsymbol{x+2}$

最小公倍数　$\boldsymbol{x(x-1)(x+2)^2}$

6.

ある整式をAとすると，題意より

$A=(x^2+1)(x^2-2x+3)+(x+1)$

$=x^4-2x^3+3x^2+x^2-2x+3+x+1$

$=x^4-2x^3+4x^2-x+4$

Aをx^2-x+2で割ると

$$\begin{array}{r l}
 & x^2-x+1 \\
x^2-x+2 \,\big) & x^4-2x^3+4x^2-\ \ x+4 \\
 & \underline{x^4-\ \ x^3+2x^2} \\
 & -x^3+2x^2-\ \ x+4 \\
 & \underline{-x^3+\ \ x^2-2x} \\
 & x^2+\ \ x+4 \\
 & \underline{x^2-\ \ x+2} \\
 & 2x+2
\end{array}$$

よって

商 $\boldsymbol{x^2-x+1}$，余り $\boldsymbol{2x+2}$

7.

ある整式を，$P(x)$とおく．

（1）題意より

$P(x)=\boldsymbol{(x+2)(x-1)Q(x)+3x+1}$

（2）$P(x)$を$x-1$で割ったときの余りは$P(1)$であるから

$P(1)=3\cdot1+1=\boldsymbol{4}$

練習問題 1-B

1.

（１）与式 $=\{a^3-(2b)^3\}(a^3+8b^3)$

$=(a^3-8b^3)(a^3+8b^3)$

$=(a^3)^2-(8b^3)^2$

$=\boldsymbol{a^6-64b^6}$

（２）与式 $=\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}$

$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)$

$x^2+5x=X$ とおく．

与式 $=(X+4)(X+6)$

$=X^2+10X+24$

$=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24$

$=x^4+10x^3+25x^2+10x^2+50x+24$

$=\boldsymbol{x^4+10x^3+35x^2+50x+24}$

（３）$a+b=X$，$a-b=Y$ とおく．

与式 $=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$

$=(X+c)(X-c)(Y+c)(Y-c)$

$=(X^2-c^2)(Y^2-c^2)$

$=X^2Y^2-(X^2+Y^2)c^2+c^4$

$=\{(a+b)(a-b)\}^2-\{(a+b)^2+(a-b)^2\}c^2+c^4$

$=(a^2-b^2)^2-(2a^2+2b^2)c^2+c^4$

$=a^4-2a^2b^2+b^4-2a^2c^2-2b^2c^2+c^4$

$=\boldsymbol{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2}$

（４）$x-y=X$ とおく．

与式 $=(X+z)^3$

$=X^3+3X^2z+3Xz^2+z^3$

$=(x-y)^3+3(x-y)^2z+3(x-y)z^2+z^3$

$=(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3)$

$+3z(x^2-2xy+y^2)+3xz^2-3yz^2+z^3$

$=\boldsymbol{x^3-y^3+z^3-3x^2y+3xy^2}$

$\boldsymbol{+3y^2z-3yz^2+3z^2x+3zx^2-6xyz}$

2.

（１）与式 $=x(4x^2-5xy-6y^2)$

$=\boldsymbol{x(4x+3y)(x-2y)}$

（２）与式 $=a^2+2ac+c^2-(b^2+2bd+d^2)$

$=(a+c)^2-(b+d)^2$

$=\{(a+c)+(b+d)\}\{(a+c)-(b+d)\}$

$=(a+c+b+d)(a+c-b-d)$

$=\boldsymbol{(a+b+c+d)(a-b+c-d)}$

（３）x について整理すると

与式 $=2x^2+(y+4)x-6y^2-13y-6$

$=2x^2+(y+4)x-(6y^2+13y+6)$

y についての項を因数分解する．

$$\begin{array}{ccccc} 3 & & 2 & \to & 4 \\ 2 & & 3 & \to & 9 \\ \hline 6 & & 6 & & 13 \end{array}$$

よって

与式 $=2x^2+(y+4)x-(3y+2)(2y+3)$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & & -(3y+2) & \to & -3y-2 \\ 1 & & 2y+3 & \to & 4y+6 \\ \hline 1 & & -(3y+2)(2y+3) & & y+4 \end{array}$$

したがって

与式 $=\{2x-(3y+2)\}\{x+(2y+3)\}$

$=\boldsymbol{(2x-3y-2)(x+2y+3)}$

（４）与式 $=(x^2y-xy^2)+(x^2z-y^2z)$

$=xy(x-y)+z(x^2-y^2)$

$=xy(x-y)+z(x+y)(x-y)$

$=(x-y)\{xy+z(x+y)\}$

$=\boldsymbol{(x-y)(xy+yz+zx)}$

（５）$x^3=X$ とおく．

与式 $=(x^3)^2+7x^3-8$

$=X^2+7X-8$

$=(X-1)(X+8)$

$=(x^3-1)(x^3+8)$

$=(x^3-1^3)(x^3+2^3)$

$=(x-1)(x^2+x+1)(x+2)(x^2-2x+4)$

$=\boldsymbol{(x-1)(x+2)(x^2+x+1)(x^2-2x+4)}$

3.

（１）与式を展開して，a について整理すると

与式 $=ac^2-bc^2+(b-c)a^2+cb^2-ab^2$

$=(b-c)a^2+(c^2-b^2)a+(-bc^2+b^2c)$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+(b^2c-bc^2)$

$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=\boldsymbol{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

（２）$x^2=X$ とおく．

与式 $=X^2+3X+4$

$=(X^2+4X+4)-X$

$=(X+2)^2-X$

$=(x^2+2)^2-x^2$

$=\{(x^2+2)+x\}\{(x^2+2)-x\}$

$=\boldsymbol{(x^2+x+2)(x^2-x+2)}$

（３）$P(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$とおくと

$P(1)=1^4-1^3-7\cdot 1^2+1+6$

$\qquad =1-1-7+1+6=0$

となるので，$P(x)$は$x-1$を因数にもつ．

$$
\begin{array}{r}
x^3-7x-6 \\
x-1\,\overline{)\,x^4-x^3-7x^2+x+6} \\
\underline{x^4-x^3} \\
-7x^2+x+6 \\
\underline{-7x^2+7x} \\
-6x+6 \\
\underline{-6x+6} \\
0
\end{array}
$$

よって

$P(x)=(x-1)(x^3-7x-6)$

$Q(x)=x^3-7x-6$とおくと

$Q(-1)=(-1)^3-7\cdot(-1)-6$

$\qquad =-1+7-6=0$

となるので，$Q(x)$は$x+1$を因数にもつ．

$$
\begin{array}{r}
x^2-x-6 \\
x+1\,\overline{)\,x^3\qquad -7x-6} \\
\underline{x^3+x^2} \\
-x^2-7x-6 \\
\underline{-x^2-x} \\
-6x-6 \\
\underline{-6x-6} \\
0
\end{array}
$$

よって

$Q(x)=(x+1)(x^2-x-6)$

したがって

与式$=(x-1)(x+1)(x^2-x-6)$

$\qquad =\boldsymbol{(x-1)(x+1)(x+2)(x-3)}$

4.

最小公倍数を$P(x)$とおく．

$P(1)=0$であるから，$P(x)$は$x-1$を因数にもつ．

$$
\begin{array}{r}
x^2+3x+10 \\
x-1\,\overline{)\,x^3+2x^2-13x+10} \\
\underline{x^3-\ \ x^2} \\
3x^2-13x+10 \\
\underline{3x^2-3x} \\
10x+10 \\
\underline{10x+10} \\
0
\end{array}
$$

よって

$P(x)=(x-1)(x^2+3x-10)$

$\qquad =(x-1)(x-2)(x+5)$

また，$A=(x-1)(x+5)$であるから

$B=\boldsymbol{(x-1)(x-2)}$

5.

最小公倍数を$P(x)$とおく．

$P(x)$は最大公約数を因数にもつ．

$$
\begin{array}{r}
x^3+2x^2+2x+4 \\
2x-1\,\overline{)\,2x^4+3x^3+2x^2+6x-4} \\
\underline{2x^4-\ \ x^3} \\
4x^3+2x^2+6x-4 \\
\underline{4x^3-2x^2} \\
4x^2+6x-4 \\
\underline{4x^2-2x} \\
8x-4 \\
\underline{8x-4} \\
0
\end{array}
$$

よって

$P(x)=(2x-1)(x^3+2x^2+2x+4)$

$Q(x)=x^3+2x^2+2x+4$とおく．

$Q(-2)=0$であるから，$Q(x)$は$x+2$を因数にもつ．

$$
\begin{array}{r}
x^2+2 \\
x+2\,\overline{)\,x^3+2x^2+2x+4} \\
\underline{x^3+2x^2} \\
2x+4 \\
\underline{2x+4} \\
0
\end{array}
$$

よって

$Q(x)=(x+2)(x^2+2)$

したがって

$P(x)=(2x-1)(x+2)(x^2+2)$

最大公約数が$2x-1$で，２式の次数は２次と３次であるから，求める２つの整式は

$\boldsymbol{(2x-1)(x+2)}$，$\boldsymbol{(2x-1)(x^2+2)}$

6.

題意より

$x^4+1=P(x)(x^3-2x^2+4x-8)+17$

が成り立つので

$P(x)(x^3-2x^2+4x-8)=x^4+1-17$

$P(x)(x^3-2x^2+4x-8)=x^4-16$

よって

$P(x)=(x^4-16)\div(x^3-2x^2+4x-8)$

$$
\begin{array}{r}
x+2 \\
x^3-2x^2+4x-8\,\overline{)\,x^4\qquad\qquad\qquad -16} \\
\underline{x^4-2x^3+4x^2-8x} \\
2x^3-4x^2+8x-16 \\
\underline{2x^3-4x^2+8x-16} \\
0
\end{array}
$$

したがって，$P(x)=\boldsymbol{x+2}$

7.

$Q(x)$をx^2-x-2で割ったときの余りは，

１次以下の整式になる．

この余りを，$ax+b$，商を$R(x)$とおくと

$Q(x)=(x^2-x-2)R(x)+ax+b$

$\qquad =(x+1)(x-2)R(x)+ax+b$

が成り立つ．

ここで，$Q(x)$を$x+1$で割ったときの余りが-3，
$Q(x)$を$x-2$で割ったときの余りが3であるから

$Q(-1)=-3$，$Q(2)=3$

すなわち

$$\begin{cases} -a+b=-3 \\ 2a+b=3 \end{cases}$$

これを解いて，$a=2$，$b=-1$

したがって，求める余りは，$\boldsymbol{2x-1}$