１章　数と式の計算

§１　整式の計算（p.2～p.17）

問１

（１）与式 $= 4x^2 - 2x^2 + 3x - x + 3 - 5$

$= \boldsymbol{2x^2 + 2x - 2}$

（２）与式 $= -5x^2 + 6x^2 + 2x + 5x + 1 - 4$

$= \boldsymbol{x^2 + 7x - 3}$

問２

（１）$A + B = (2x^2 + 3x + 1) + (3x^2 - 6x + 2)$

$= 2x^2 + 3x + 1 + 3x^2 - 6x + 2$

$= 2x^2 + 3x^2 + 3x - 6x + 1 + 2$

$= \boldsymbol{5x^2 - 3x + 3}$

$A - B = (2x^2 + 3x + 1) - (3x^2 - 6x + 2)$

$= 2x^2 + 3x + 1 - 3x^2 + 6x - 2$

$= 2x^2 - 3x^2 + 3x + 6x + 1 - 2$

$= \boldsymbol{-x^2 + 9x - 1}$

（２）$A + B = (x^3 - 2x^2 + 1) + (x^4 + 2x^2 - x - 3)$

$= x^3 - 2x^2 + 1 + x^4 + 2x^2 - x - 3$

$= x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x^2 - x + 1 - 3$

$= \boldsymbol{x^4 + x^3 - x - 2}$

$A - B = (x^3 - 2x^2 + 1) - (x^4 + 2x^2 - x - 3)$

$= x^3 - 2x^2 + 1 - x^4 - 2x^2 + x + 3$

$= -x^4 + x^3 - 2x^2 - 2x^2 + x + 1 + 3$

$= \boldsymbol{-x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 4}$

問３

（１）与式 $= 4ax^2 - ax^2 - bx + 3bx + c$

$= (4a - a)x^2 + (-b + 3b)x + c$

$= \boldsymbol{3ax^2 + 2bx + c}$

（２）与式 $= 3x^2 - x^2 + xy - 2x + 2xy - y^2 + 1$

$= (3 - 1)x^2 + (y - 2 + 2y)x + (-y^2 + 1)$

$= \boldsymbol{2x^2 + (3y - 2)x + (-y^2 + 1)}$

問４

（１）$A + B = (x^3 + ax^2 + 2a^3) + (2x^3 + a^2x^2 + 3x)$

$= x^3 + ax^2 + 2a^3 + 2x^3 + a^2x^2 + 3x$

$= x^3 + 2x^3 + ax^2 + a^2x^2 + 3x + 2a^3$

$= \boldsymbol{3x^3 + (a^2 + a)x^2 + 3x + 2a^3}$

$A - B = (x^3 + ax^2 + 2a^3) - (2x^3 + a^2x^2 + 3x)$

$= x^3 + ax^2 + 2a^3 - 2x^3 - a^2x^2 - 3x$

$= x^3 - 2x^3 + ax^2 - a^2x^2 - 3x + 2a^3$

$= \boldsymbol{-x^3 + (-a^2 + a)x^2 - 3x + 2a^3}$

（２）$A + B = (2x^2 + 2xy + 3x + y^2) + (-3x^2 + 4xy + 2y^2)$

$= 2x^2 + 2xy + 3x + y^2 - 3x^2 + 4xy + 2y^2$

$= y^2 + 2y^2 + 2xy + 4xy + 2x^2 - 3x^2 + 3x$

$= \boldsymbol{3y^2 + 6xy + (-x^2 + 3x)}$

$A - B = (2x^2 + 2xy + 3x + y^2) - (-3x^2 + 4xy + 2y^2)$

$= 2x^2 + 2xy + 3x + y^2 + 3x^2 - 4xy - 2y^2$

$= y^2 - 2y^2 + 2xy - 4xy + 2x^2 + 3x^2 + 3x$

$= \boldsymbol{-y^2 - 2xy + (5x^2 + 3x)}$

問５

（１）与式 $= -3 \cdot -3 = \boldsymbol{9}$

（２）与式 $= -(3 \cdot 3) = \boldsymbol{-9}$

（３）与式 $= \{2^2 \cdot (a^3)^2 \cdot b^2\}\{(-3)^3 \cdot a^3 \cdot (b^2)^3\}$

$= 4a^6b^2 \cdot (-27a^3b^6)$

$= \boldsymbol{-108a^9b^8}$

（４）与式 $= (x^2 - 5x + 2) \cdot x + (x^2 - 5x + 2) \cdot 2$

$= x^3 - 5x^2 + 2x + 2x^2 - 10x + 4$

$= \boldsymbol{x^3 - 3x^2 - 8x + 4}$

問６

（１）与式 $= x^2 + (2 + 5)x + 2 \cdot 5$

$= \boldsymbol{x^2 + 7x + 10}$

（２）与式 $= x^2 + (3y + 5y)x + 3y \cdot 5y$

$= \boldsymbol{x^2 + 8xy + 15y^2}$

（３）与式 $= (3x)^2 - 1^2$

$= \boldsymbol{9x^2 - 1}$

（４）与式 $= 2 \cdot 3x^2 + \{2 \cdot (-4y) + 3y \cdot 3\}x + 3y \cdot (-4y)$

$= 6x^2 + (-8y + 9y)x - 12y^2$

$= \boldsymbol{6x^2 + xy - 12y^2}$

（５）与式 $= (3a)^3 + 3 \cdot (3a)^2 \cdot b + 3 \cdot 3a \cdot b^2 + b^3$

$= \boldsymbol{27a^3 + 27a^2b + 9ab^2 + b^3}$

（６）与式 $= (2a)^3 - 3 \cdot (2a)^2 \cdot 3b + 3 \cdot 2a \cdot (3b)^2 - (3b)^3$

$= \boldsymbol{8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3}$

問７

（１）与式 $= a^2 + (3b)^2 + (2c)^2 + 2a \cdot 3b + 2 \cdot 3b \cdot 2c + 2 \cdot 2ca$

$= \boldsymbol{a^2 + 9b^2 + 4c^2 + 6ab + 12bc + 4ca}$

（2）与式 $= x^3 + (3y)^3$

$= \boldsymbol{x^3 + 27y^2}$

$\boxed{問8}$

（1）$x + 3y = X$とおくと

与式 $= (X+2)(X+1)$

$= X^2 + 3X + 2$

$= (x+3y)^2 + 3(x+3y) + 2$

$= \boldsymbol{x^2 + 6xy + 9y^2 + 3x + 9y + 2}$

（2）与式 $= \{a + (b+c)\}\{a - (b+c)\}$

$b + c = X$とおくと

与式 $= (a+X)(a-X)$

$= a^2 - X^2$

$= a^2 - (b+c)^2$

$= a^2 - (b^2 + 2bc + c^2)$

$= \boldsymbol{a^2 - b^2 - 2bc - c^2}$

$\boxed{問9}$

（1）与式 $= a(a^2 - 4ab + 4b^2)$

$= \boldsymbol{a(a-2b)^2}$

（2）与式 $= 3(x^2 - 9y^2)$

$= 3\{x^2 - (3y)^2\}$

$= \boldsymbol{3(x+3y)(x-3y)}$

（3）与式 $= (a^2 + 6ab + 9b^2) - 4c^2$

$= (a+3b)^2 - (2c)^2$

$= \{(a+3b) + 2c\}\{(a+3b) - 2c\}$

$= \boldsymbol{(a+3b+2c)(a+3b-2c)}$

（4）与式 $= (2a)^3 + 1^3$

$= (2a+1)\{(2a)^2 - 2a \cdot 1 + 1^2\}$

$= \boldsymbol{(2a+1)(4a^2 - 2a + 1)}$

（5）与式 $= (y-3)x + 2(y-3)$

$y - 3 = Y$とおくと

与式 $= Yx + 2Y$

$= (x+2)Y$

$= \boldsymbol{(x+2)(y-3)}$

（6）与式 $= 2a + 3ab + 3b + 2$

$= a(2+3b) + 3b + 2$

$= a(3b+2) + (3b+2)$

$3b + 2 = X$とおくと

与式 $= aX + X$

$= (a+1)X$

$= \boldsymbol{(a+1)(3b+2)}$

$\boxed{問10}$

（1）与式 $= x^2 + (2+8)x + 2 \cdot 8$

$= \boldsymbol{(x+2)(x+8)}$

（2）与式 $= x^2 + (6-1)x + (-1) \cdot 6$

$= \boldsymbol{(x+6)(x-1)}$

$\boxed{問11}$

（1）

$$\begin{array}{cccc} 3 & 2 & \rightarrow & 2 \\ 1 & 4 & \rightarrow & 12 \\ \hline 3 & 8 & & 14 \end{array}$$

与式 $= \boldsymbol{(3x+2)(x+4)}$

（2）

$$\begin{array}{cccc} 3 & -2 & \rightarrow & -4 \\ 2 & 1 & \rightarrow & 3 \\ \hline 6 & -2 & & -1 \end{array}$$

与式 $= \boldsymbol{(3x-2)(2x+1)}$

$\boxed{問12}$

（1）与式 $= (x^2)^2 - 5x^2 + 4$

$x^2 = X$とおくと

与式 $= X^2 - 5X + 4$

$= (X-1)(X-4)$

$= (x^2-1)(x^2-4)$

$= \boldsymbol{(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)}$

（2）$a + b = X$とおくと

与式 $= X^2 + 2X - 3$

$= (X+3)(X-1)$

$= \boldsymbol{(a+b+3)(a+b-1)}$

（3）xについて整理すると

与式 $= x^2 + (-2y-1)x + (y^2 + y - 6)$

$= x^2 + (-2y-1)x + (y-2)(y+3)$

$$\begin{array}{cccc} 1 & -(y-2) & \rightarrow & -y+2 \\ 1 & -(y+3) & \rightarrow & -y-3 \\ \hline 1 & (y-2)(y+3) & & -2y-1 \end{array}$$

よって

与式 $= \{x - (y-2)\}\{x - (y+3)\}$

$= \boldsymbol{(x-y+2)(x-y-3)}$

（4）xについて整理すると

与式 $= 3x^2 + (7y-1)x + (2y^2 + 3y - 2)$

定数項を因数分解すると，

$$\begin{array}{ccccc}
2 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & -1 & \rightarrow & -1 \\
1 & & 2 & \rightarrow & 4 \\
\hline
2 & & -2 & & 3
\end{array}$$

よって

与式 $= 3x^2 + (7y-1)x + (2y-1)(y+2)$

$$\begin{array}{ccccc}
3 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & y+2 & \rightarrow & y+2 \\
1 & & 2y-1 & \rightarrow & 6y-3 \\
\hline
1 & & (2y-1)(y+2) & & 7y-1
\end{array}$$

したがって

与式 $= \{3x + (y+2)\}\{x + (2y-1)\}$

$\quad = \boldsymbol{(3x + y + 2)(x + 2y - 1)}$

問 13

（1）

$$\begin{array}{r}
2x\ \ +1 \\
x+2\,\overline{)\,2x^2+5x+4} \\
\underline{2x^2+4x} \\
x+4 \\
\underline{x+2} \\
2
\end{array}$$

商 $\boldsymbol{2x+1}$，余り $\boldsymbol{2}$

等式 $\boldsymbol{A = B(2x+1) + 2}$

（2）

$$\begin{array}{r}
3x\ \ +5 \\
2x-3\,\overline{)\,6x^2+\ \ x-8} \\
\underline{6x^2-9x} \\
10x-\ \ 8 \\
\underline{10x-15} \\
7
\end{array}$$

商 $\boldsymbol{3x+5}$，余り $\boldsymbol{7}$

等式 $\boldsymbol{A = B(3x+5) + 7}$

（3）

$$\begin{array}{r}
x^2-3x+1 \\
x+3\,\overline{)\,x^3-8x+2} \\
\underline{x^3+3x^2} \\
-3x^2-8x+2 \\
\underline{-3x^2-9x} \\
x+2 \\
\underline{x+3} \\
-1
\end{array}$$

商 $\boldsymbol{x^2-3x+1}$，余り $\boldsymbol{-1}$

等式 $\boldsymbol{A = B(x^2-3x+1) - 1}$

問 14

ある整式をAとおくと，題意より

$A = (x+2)(x^2+x+4) + 3$

$\quad = x^3 + x^2 + 4x + 2x^2 + 2x + 8 + 3$

$\quad = x^3 + 3x^2 + 6x + 11$

問 15

	a	b^2	
		b	c
最大公約数=		b	
最小公倍数=	a	b^2	c

よって

最大公約数 $\boldsymbol{b}$

最小公倍数 $\boldsymbol{ab^2c}$

（2）

	2	2			a	b^2	c^3	
	2			3	a^2	b^3	c	d
	2	2	2		a		c	d^2
最大公約数=	2				a		c	
最小公倍数=	2	2	2	3	a^2	b^3	c^3	d^2

よって

最大公約数 $\boldsymbol{2ac}$

最小公倍数 $\boldsymbol{24a^2b^3c^3d^2}$

（3）

	2		x^2	$(x+1)^3$		$(x-3)$
	2	3	x	$(x+1)^2$	$(x+2)^2$	
			x	$(x+1)$		
最大公約数=			x	$(x+1)$		
最小公倍数=	2	3	x^2	$(x+1)^3$	$(x+2)^2$	$(x-3)$

よって

最大公約数 $\boldsymbol{x(x+1)}$

最小公倍数 $\boldsymbol{6x^2(x+1)^3(x+2)^2(x-3)}$

問 16

（1）与式 $= (2x^3 + 3x^2 - 5x + 4)$

$\qquad\qquad + (-x^3 + x^2 - 2x + 1)$

$\quad = 2x^3 + 3x^2 - 5x + 4 - x^3 + x^2 - 2x + 1$

$\quad = \boldsymbol{x^3 + 4x^2 - 7x + 5}$

（2）与式 $= 2(2x^3 + 3x^2 - 5x + 4)$

$\qquad\qquad -3(-x^3 + x^2 - 2x + 1)$

$\quad = 4x^3 + 6x^2 - 10x + 8 + 3x^3 - 3x^2 + 6x - 3$

$\quad = \boldsymbol{7x^3 + 3x^2 - 4x + 5}$

（3）与式 $= 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 4$

$\quad = \boldsymbol{4}$

（4）与式 $= 0 + 0 + 0 + 1 = \boldsymbol{1}$

（5）与式 $= \boldsymbol{2a^3 + 3a^2 - 5a + 4}$

（6）与式 $=-(-a)^3+(-a)^2-2(-a)+1$

$=\boldsymbol{a^3+a^2+2a+1}$

$\boxed{\text{問 17}}$

（1）$A(x)$を$x-1$で割ったときの余りは

$A(1)=1^3-3\cdot1^2-1+4$

$=1-3-1+4=\mathbf{1}$

（2）$A(x)$を$x+1$で割ったときの余りは

$A(-1)=(-1)^4+2\cdot(-1)^3-2\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)-1$

$=1-2-2-2-1=\mathbf{-6}$

$\boxed{\text{問 18}}$

$P(x)=4x^3+2x^2-3x+2$とおくと

$P(x)$を$2x-1$で割ったときの余りは，

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot\frac{1}{2}+2$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+2=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

$P(x)$を$2x+3$で割ったときの余りは，

$$P\left(-\frac{3}{2}\right)=4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^3+2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2-3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+2$$

$$=-\frac{27}{2}+\frac{9}{2}+\frac{9}{2}+2=\boldsymbol{-\frac{5}{2}}$$

$\boxed{\text{問 19}}$

$P(1)=1^3+2\cdot1-12$

$=1+2-12=-9\neq0$

$P(-1)=(-1)^3+2\cdot(-1)-12$

$=-1-2-12=-15\neq0$

$P(2)=2^3+2\cdot2-12$

$=8+4-12=0$

$P(-2)=(-2)^3+2\cdot(-2)-12$

$=-8-4-12=-24\neq0$

よって，$P(x)$は，$\boldsymbol{x-2}$で割り切れる．

$\boxed{\text{問 20}}$

$P(x)=x^3-3x^2+kx-4$とおくと，$P(x)$が$x-2$で割り切れるためには，$P(2)=0$となればよいので

$2^3-3\cdot2^2+2k-4=0$

$8-12+2k-4=0$

$2k=8$

$\boldsymbol{k=4}$

$\boxed{\text{問 21}}$

（1）$P(x)=x^3-3x^2+x+1$とおくと

$P(1)=1^3-3\cdot1^2+1+1=0$

よって，$P(x)$は$x-1$を因数にもつ．

$$\begin{array}{rl}
 & x^2-2x-1 \\
x-1 & \overline{)\,x^3-3x^2+x+1} \\
 & \underline{x^3-x^2} \\
 & -2x^2+x+1 \\
 & \underline{-2x^2+2x} \\
 & -x+1 \\
 & \underline{-x+1} \\
 & 0
\end{array}$$

したがって

$P(x)=\boldsymbol{(x-1)(x^2-2x-1)}$

（2）$P(x)=x^3+5x^2-8x-12$とおくと

$P(-1)=(-1)^3+5\cdot(-1)^2-8\cdot(-1)-12$

$=-1+5+8-12=0$

よって，$P(x)$は$x+1$を因数にもつ．

$$\begin{array}{rl}
 & x^2+4x-12 \\
x+1 & \overline{)\,x^3+5x^2-8x-12} \\
 & \underline{x^3+x^2} \\
 & 4x^2-8x-12 \\
 & \underline{4x^2+4x} \\
 & -12x-12 \\
 & \underline{-12x-12} \\
 & 0
\end{array}$$

したがって

$P(x)=(x+1)(x^2+4x-12)$

$=\boldsymbol{(x+1)(x-2)(x+6)}$

（3）$P(x)=2x^3+3x^2-3x-2$とおくと

$P(1)=2\cdot1^3+3\cdot1^2-3\cdot1-2$

$=2+3-3-2=0$

よって，$P(x)$は$x-1$を因数にもつ．

$$\begin{array}{rl}
 & 2x^2+5x+2 \\
x-1 & \overline{)\,2x^3+3x^2-3x-2} \\
 & \underline{2x^3-2x^2} \\
 & 5x^2-3x-2 \\
 & \underline{5x^2-5x} \\
 & 2x-2 \\
 & \underline{2x-2} \\
 & 0
\end{array}$$

したがって

$P(x)=(x-1)(2x^2+5x+2)$

$=\boldsymbol{(x-1)(x+2)(2x+1)}$

（4）$P(x)=x^4+3x^3-2x^2-12x-8$とおくと

$P(-1)=(-1)^4+3\cdot(-1)^3-2\cdot(-1)^2-12\cdot(-1)-8$

$=1-3-2+12-8=0$

よって，$P(x)$は$x+1$を因数にもつ．

$$
\begin{array}{rl}
 & \underline{x^3+2x^2-4x-8} \\
x+1 & \big)\, x^4+3x^3-2x^2-12x-8 \\
 & \underline{x^4+\ \ x^3} \\
 & 2x^3-2x^2-12x-8 \\
 & \underline{2x^3+2x^2} \\
 & -4x^2-12x-8 \\
 & \underline{-4x^2-\ \ 4x} \\
 & -8x-8 \\
 & \underline{-8x-8} \\
 & 0
\end{array}
$$

したがって

$$P(x)=(x+1)(x^3+2x^2-4x-8)$$

$Q(x)=x^3+2x^2-4x+8$とおくと

$$
\begin{aligned}
Q(2)&=2^3+2\cdot 2^2-4\cdot 2-8\\
&=8+8-8-8=0
\end{aligned}
$$

よって，$Q(x)$は$x-2$を因数にもつ.

$$
\begin{array}{rl}
 & \underline{x^2+4x+4} \\
x-2 & \big)\, x^3+2x^2-4x-8 \\
 & \underline{x^3-2x^2} \\
 & 4x^2-4x-8 \\
 & \underline{4x^2-8x} \\
 & 4x-8 \\
 & \underline{4x-8} \\
 & 0
\end{array}
$$

したがって

$$Q(x)=(x-2)(x^2+4x+4)$$

以上より

$$
\begin{aligned}
P(x)&=(x+1)(x-2)(x^2+4x+4)\\
&=\boldsymbol{(x+1)(x-2)(x+2)^2}
\end{aligned}
$$