Basic

1.

(1) 与式 $= 3x^2 + x^2 - 4x + x - 2 + 5$
$= \boldsymbol{4x^2 - 3x + 3}$

(2) 与式 $= 2x^2 + x^2 - 7x + 2x + 4x + 2 - 3$
$= \boldsymbol{3x^2 - x - 1}$

2.

(1) $A + B = (2x^2 + 5x - 3) + (3x^2 - 3x - 3)$
$= 2x^2 + 3x^2 + 5x - 3x - 3 - 3$
$= \boldsymbol{5x^2 + 2x - 6}$

$A - B = (2x^2 + 5x - 3) - (3x^2 - 3x - 3)$
$= 2x^2 - 3x^2 + 5x + 3x - 3 + 3$
$= \boldsymbol{-x^2 + 8x}$

(2) $A + B = (3x^3 - 2x + 1) + (2x^3 - x^2 + 5x)$
$= 3x^3 + 2x^3 - x^2 - 2x + 5x + 1$
$= \boldsymbol{5x^3 - x^2 + 3x + 1}$

$A - B = (3x^3 - 2x + 1) - (2x^3 - x^2 + 5x)$
$= 3x^3 - 2x^3 + x^2 - 2x - 5x + 1$
$= \boldsymbol{x^3 + x^2 - 7x + 1}$

3.

(1) 与式 $= 2x^2 + 3x^2 - 4xy + 3xy - 2x + 3y^2 - 5$
$= \boldsymbol{5x^2 + (-y - 2)x + (3y^2 - 5)}$

(2) 与式 $= x^3 + ax^2 - 3ax^2 - 2a^2x + a^2x + a^3$
$= \boldsymbol{x^3 - 2ax^2 - a^2x + a^3}$

4.

(1) $A + B = (2x^3 + 4ax^2 - 3a^3)$
$+ (3ax^2 - 2a^2x + 2a^3)$
$= 2x^3 + 4ax^2 + 3ax^2 - 2a^2x - 3a^3 + 2a^3$
$= \boldsymbol{2x^3 + 7ax^2 - 2a^2x - a^3}$

$A - B = (2x^3 + 4ax^2 - 3a^3)$
$- (3ax^2 - 2a^2x + 2a^3)$
$= 2x^3 + 4ax^2 - 3ax^2 + 2a^2x - 3a^3 - 2a^3$
$= \boldsymbol{2x^3 + ax^2 + 2a^2x - 5a^3}$

(2) $A + B = (x^3 + 2x^2y + 5xy - y^2) + (3x^2y - xy + 2)$
$= -y^2 + 2x^2y + 3x^2y + 5xy - xy + x^3 + 2$
$= \boldsymbol{-y^2 + (5x^2 + 4x)y + (x^3 + 2)}$

$A - B = (x^3 + 2x^2y + 5xy - y^2) - (3x^2y - xy + 2)$
$= -y^2 + 2x^2y - 3x^2y + 5xy + xy + x^3 - 2$
$= \boldsymbol{-y^2 + (-x^2 + 6x)y + (x^3 - 2)}$

5.

(1) 与式 $= (-3)^3x^3$
$= \boldsymbol{-27x^3}$

(2) 与式 $= (-1)^3a^{2\cdot 3}$
$= \boldsymbol{-a^6}$

(3) 与式 $= (-1)^2a^2b^{3\cdot 2} \cdot 2^3a^{2\cdot 3}b^3$
$= a^2b^6 \cdot 8a^6b^3$
$= 8a^{2+6}b^{6+3}$
$= \boldsymbol{8a^8b^9}$

(4) 与式 $= x^3 + 3x^2 - 5x + 4x^2 + 12x - 20$
$= x^3 + 3x^2 + 4x^2 - 5x + 12x - 20$
$= \boldsymbol{x^3 + 7x^2 + 7x - 20}$

6.

(1) 与式 $= x^2 + 2 \cdot x \cdot 2y + (2y)^2$
$= \boldsymbol{x^2 + 4xy + 4y^2}$

(2) 与式 $= (3a)^2 + 2 \cdot 3a \cdot (-b) + (-b)^2$
$= \boldsymbol{9a^2 - 6ab + b^2}$

(3) 与式 $= (3x)^2 - (7y)^2$
$= \boldsymbol{9x^2 - 49y^2}$

(4) 与式 $= x^2 + (3-2)ax + \{3 \cdot (-2)\}a^2$
$= \boldsymbol{x^2 + ax - 6a^2}$

(5) 与式 $= (2 \cdot 1)x^2 + (2 \cdot 4 + 3 \cdot 1)x + 3 \cdot 4$
$= \boldsymbol{2x^2 + 11x + 12}$

(6) 与式 $= (3 \cdot 2)x^2 + \{3 \cdot 3y + (-2) \cdot 2y\}x$
$+ (-2y) \cdot 3y$
$= \boldsymbol{6x^2 + 5xy - 6y^2}$

(7) 与式 $= (2a)^3 + 3 \cdot (2a)^2 \cdot b + 3 \cdot 2a \cdot b^2 + b^3$
$= \boldsymbol{8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3}$

(8) 与式 $= (3x)^3 - 3 \cdot (3x)^2 \cdot 2y$
$+ 3 \cdot 3x \cdot (2y)^2 - (2y)^3$
$= \boldsymbol{27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3}$

7.

(1) 与式 $= x^2 + y^2 + 1^2 + 2 \cdot xy + 2 \cdot y \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot x$
$= \boldsymbol{x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1}$

(2) 与式 $= x^2 + (-2y)^2 + 3^2 + 2 \cdot x(-2y)$
$+ 2 \cdot (-2y) \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot x$
$= \boldsymbol{x^2 - 4xy + 4y^2 + 6x - 12y + 9}$

(3) 与式 $= a^3 + 2^3$
$= \boldsymbol{a^3 + 8}$

(4) 与式 $= (3x)^3 - 1^3$
$= \boldsymbol{27x^3 - 1}$

8.

(1) $X = 2x + y$ とおいて

与式 $= (X+3)(X+5)$
$= X^2 + (3+5)X + 3 \cdot 5$
$= X^2 + 8X + 15$
$= (2x+y)^2 + 8(2x+y) + 15$
$= \boldsymbol{4x^2 + 4xy + y^2 + 16x + 8y + 15}$

(2) 与式 $= \{a^2 + a - 1\}\{a^2 - (a-1)\}$
$X = a - 1$ とおいて

$(a^2 + X)(a^2 - X)$
$= a^4 - X^2$
$= a^4 - (a-1)^2$
$= a^4 - (a^2 - 2a + 1)$
$= \boldsymbol{a^4 - a^2 + 2a - 1}$

9.

(1) 与式 $= a(4a^2 - 9b^2)$
$= \boldsymbol{a(2a+3b)(2a-3b)}$

(2) 与式 $= b(a-1) - c(a-1)$
$= \boldsymbol{(a-1)(b-c)}$

(3) 与式 $= (2a)^3 + 3^3$
$= \{2a+3\}\{(2a)^2 - 2a \cdot 3 + 3^2\}$
$= \boldsymbol{(2a+3)(4a^2 - 6a + 9)}$

(4) 与式 $= (x+y)^2 - z^2$
$= \{(x+y)+z\}\{(x+y)-z\}$
$= \boldsymbol{(x+y+z)(x+y-z)}$

10.

(1) 与式 $= x^2 + \{(-2) + (-3)\}x + (-2)(-3)$
$= \boldsymbol{(x-2)(x-3)}$

(2) 与式 $= x^2 + \{3 + (-10)\}x + 3 \cdot (-10)$
$= \boldsymbol{(x+3)(x-10)}$

11.

(1)
$$\begin{array}{cccc} 2 & \times & 5 & \longrightarrow 15 \\ 3 & & 1 & \longrightarrow 2 \\ \hline & & & 17 \end{array} \ (+$$

与式 $= \boldsymbol{(2x+5)(3x+1)}$

(2)
$$\begin{array}{cccc} 3 & \times & -2 & \longrightarrow -2 \\ 1 & & 2 & \longrightarrow 6 \\ \hline & & & 4 \end{array} \ (+$$

与式 $= \boldsymbol{(3x-2)(x+2)}$

12.

(1) 与式 $= (x^2)^2 - 4^2$
$= (x^2+4)(x^2-4)$
$= \boldsymbol{(x^2+4)(x+2)(x-2)}$

(2)$X = x - y$ とおいて

与式 $= X^2 + 2X - 15$
$= (X+5)(X-3)$
$= \boldsymbol{(x-y+5)(x-y-3)}$

$$\begin{array}{lcccl} 1 & \times & 5 & \longrightarrow & 5 \\ 1 & & -3 & \longrightarrow & -3 \quad (+ \\ \hline & & & & 2 \end{array}$$

(3) 与式 $= x^2 + (2y-3)x + y^2 - 3y + 2$
$= x^2 + (2y-3)x + (y-1)(y-2)$
$= \boldsymbol{(x+y-1)(x+y-2)}$

$$\begin{array}{lcccl} 1 & \times & y-1 & \longrightarrow & y-1 \\ 1 & & y-2 & \longrightarrow & y-2 \quad (+ \\ \hline & & & & 2y-3 \end{array}$$

(4) 与式 $= x^2 + (5y-3)x + 3y^2 - 5y - 2$
$= x^2 + (5y-3)x + (y-2)(3y+1)$
$= \boldsymbol{(2x+3y+1)(x+y-2)}$

$$\begin{array}{lcccl} 1 & \times & -2 & \longrightarrow & -6 \\ 3 & & 1 & \longrightarrow & 1 \quad (+ \\ \hline & & & & -5 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccl} 2 & \times & 3y+1 & \longrightarrow & 3y+1 \\ 1 & & y-2 & \longrightarrow & 2y-4 \quad (+ \\ \hline & & & & 5y-3 \end{array}$$

13.

(1)

$$\begin{array}{r|l} & x \quad +5 \\ \hline x-2 & x^2 + 3x - 1 \\ & x^2 - 2x \\ \hline & \qquad 5x - 1 \\ & \qquad 5x - 10 \\ \hline & \qquad\qquad 9 \end{array}$$

商 $\boldsymbol{x+5}$ 余り $\boldsymbol{9}$

$\boldsymbol{A = B(x+5)+9}$

(2)

$$\begin{array}{r|l} & 4x^2 - 13x + 16 \\ \hline x+1 & 4x^3 - 9x^2 + 3x \\ & 4x^3 + 4x^2 \\ \hline & \quad -13x^2 + 3x \\ & \quad -13x^2 - 13x \\ \hline & \qquad\qquad +16x \\ & \qquad\qquad +16x + 16 \\ \hline & \qquad\qquad\qquad -16 \end{array}$$

商 $\boldsymbol{4x^2-13x+16}$ 余り $\boldsymbol{-16}$

$\boldsymbol{A = B(4x^2-13x+16)-16}$

(3)

$$\begin{array}{r|l} & 2x + 1 \\ \hline x^2+x+2 & 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 \\ & 2x^3 + 2x^2 + 4x \\ \hline & \qquad x^2 - 8x + 5 \\ & \qquad x^2 + x + 2 \\ \hline & \qquad\quad -9x + 3 \end{array}$$

商 $\boldsymbol{2x+1}$ 余り $\boldsymbol{-9x+3}$

$\boldsymbol{A = B(2x+1)-9x+3}$

14.

$(2x+3)(3x^2-1)+5 = 6x^3 - 2x + 9x^2 - 3 + 5$
$= \boldsymbol{6x^3+9x^2-2x+2}$

15.

(1)

$$\begin{array}{cccc} a & b^2 & c & \\ & b & c^2 & d \\ a & b & c^3 & \\ & \downarrow & \downarrow & \\ & b & c & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} a & b^2 & c & \\ & b & c^2 & d \\ a & b & c^3 & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a & b^2 & c^3 & d \end{array}$$

最大公約数 $\boldsymbol{bc}$　　最小公倍数 $\boldsymbol{ab^2c^3d}$

(2)

$$\begin{array}{ccc} (x+2) & (x-1) & \\ (x+2) & & (x-2) \\ \downarrow & & \\ (x+2) & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (x+2) & (x-1) & \\ (x+2) & & (x-2) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (x+2) & (x-1) & (x-2) \end{array}$$

最大公約数 $\boldsymbol{x+2}$　　最小公倍数 $\boldsymbol{(x+2)(x-1)(x-2)}$

(3)

$$\begin{array}{lll} (x+1) & (x-1) & \\ (x+1) & & (x^2-x+1) \\ (x+1)^2 & & \\ \downarrow & & \\ (x+1) & & \end{array}$$

最大公約数 $\boldsymbol{x+1}$

$$\begin{array}{lll} (x+1) & (x-1) & \\ (x+1) & & (x^2-x+1) \\ (x+1)^2 & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (x+1)^2 & (x-1) & (x^2-x+1) \end{array}$$

最小公倍数 $\boldsymbol{(x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)}$

16.

(1) 与式 $= 2(x^3 - x^2 - 5x + 2)$
$- (2x^3 + 6x^2 + 3x - 1)$
$= 2x^3 - 2x^2 - 10x + 4$
$- 2x^3 - 6x^2 - 3x + 1$
$\boldsymbol{= -8x^2 - 13x + 5}$

(2) 与式 $= 2^3 - 2^2 - 5 \cdot 2 + 2$
$= 8 - 4 - 10 + 2$
$\boldsymbol{= -4}$

(3) 与式 $= 2(-a)^3 + 6(-a)^2 + 3(-a) - 1$
$\boldsymbol{= -2a^3 + 6a^2 - 3a - 1}$

17.

(1) 剰余の定理より

$A(2) = 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 3$
$\boldsymbol{= 1}$

(2) 剰余の定理より

$A(-3) = (-3)^3 + (-3)^2 - 3(-3) + 6$
$\boldsymbol{= -3}$

18.

剰余の定理より与式の x に $-\dfrac{1}{2}$ を代入

$2(-\frac{1}{2})^3 - (-\frac{1}{2})^2 + 3(-\frac{1}{2}) + 5$
$= -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 5$
$\boldsymbol{= 3}$

19.

$P(-1) = (-1)^3 + 4(-1)^2 + (-1) - 6$
$= -1 + 4 - 1 - 6$
$= -5$

$P(-2) = (-2)^3 + 4(-2)^2 + (-2) - 6$
$= -8 + 16 - 2 - 6$
$= 0$

$P(-3) = (-3)^3 + 4(-3)^2 + (-3) - 6$
$= -27 + 36 - 3 - 6$
$= 0$

$\boldsymbol{x-2, x-3}$ で割り切れる

20.

剰余の定理より, 与式の x に 1 を代入して

$2 \cdot 1^3 + k \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 10$
$= 2 + k + 3 - 10$
$= k - 5$

0 になるとき割り切れるので

$k - 5 = 0$
$\boldsymbol{k = 5}$

21.

(1) 剰余の定理より,x に 1 を代入

$1^3 - 7 \cdot 1 + 6 = 0$

よって $x-1$ で割り切れる

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + x - 6 \\ \hline x-1 & x^3 \qquad - 7x + 6 \\ & x^3 - x^2 \\ \hline & \quad x^2 - 7x + 5 \\ & \quad x^2 - x + 2 \\ \hline & \qquad -6x + 6 \\ & \qquad -6x + 6 \\ \hline & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

よって

$$\begin{aligned}\text{与式} &= (x-1)(x^2+x-6)\\ &= \boldsymbol{(x-1)(x-2)(x+3)}\end{aligned}$$

(2) 剰余の定理より,x に -1 を代入

$(-1)^3+4(-1)^2+5\cdot(-1)+2=0$

よって $x+1$ で割り切れる

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+\ 3x+\ 2 \\ \hline
x+1 & x^3+4x^2+5x+2 \\
 & x^3-\ x^2 \\ \hline
 & \quad 3x^2+5x \\
 & \quad 3x^2+3x \\ \hline
 & \qquad\quad 2x+2 \\
 & \qquad\quad 2x+2 \\ \hline
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

よって

$$\begin{aligned}\text{与式} &= (x+1)(x^2+3x+2)\\ &= \boldsymbol{(x+1)^2(x+2)}\end{aligned}$$

(3) 剰余の定理より,x に 2 を代入

$2\cdot2^3+3\cdot2^2-11\cdot2-6=0$

よって $x-2$ で割り切れる

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x^2+\ 7x+\ 3 \\ \hline
x-2 & 2x^3+3x^2-11x-6 \\
 & 2x^3-4x^2 \\ \hline
 & \quad 7x^2-11x \\
 & \quad 7x^2-14x \\ \hline
 & \qquad\quad 3x-6 \\
 & \qquad\quad 3x-6 \\ \hline
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

よって

$$\begin{aligned}\text{与式} &= (x-2)(2x^2+7x+3)\\ &= \boldsymbol{(x-2)(x+3)(2x+1)}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc}
1 & \times & 3 & \longrightarrow & 6 \\
2 & & 1 & \longrightarrow & 1 \\ \hline
 & & & & 7
\end{array}\ (+$$

(4) 剰余の定理より,x に 1 を代入

$1^4+5\cdot1^3+5\cdot1^2-5\cdot1-6=0$

よって $x-1$ で割り切れる

$$\begin{array}{r|l}
 & x^3+6x^2+\ 11x+\ 6 \\ \hline
x-1 & x^4+5x^3+\ 5x^2-\ 5x-6 \\
 & x^4-\ x^3 \\ \hline
 & \quad 6x^3+\ 5x^2 \\
 & \quad 6x^3-\ 6x^2 \\ \hline
 & \qquad\quad 11x^2-\ 5x \\
 & \qquad\quad 11x^2-11x \\ \hline
 & \qquad\qquad\quad 6x-6 \\
 & \qquad\qquad\quad 6x-6 \\ \hline
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$x^3+6x^2+11x+6$ はまだ因数分解ができる

剰余の定理より,x に -1 を代入

$-1^3+6(-1)^2+11(-1)+6=0$

よって $x+1$ で割り切れる

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+\ 5x+\ 6 \\ \hline
x+1 & x^3+6x^2+11x+6 \\
 & x^3+\ x^2 \\ \hline
 & \quad 5x^2+11x \\
 & \quad 5x^2+\ 5x \\ \hline
 & \qquad\quad 6x+6 \\
 & \qquad\quad 6x+6 \\ \hline
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

よって

$$\begin{aligned}\text{与式} &= (x-1)(x+1)(x^2+5x+6)\\ &= \boldsymbol{(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)}\end{aligned}$$

Check

22.

$$\begin{aligned}(\ 1\ )\ \text{与式} &= 2(2x^2+4x-1)+(x^2-3x+2)\\ &= 4x^2+x^2+8x-3x-2+2\\ &= \boldsymbol{5x^2+5x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\ 2\ )\ \text{与式} &= (2x^2+4x-1)-2(x^2-3x+2)\\ &= 2x^2-2x^2+4x+6x-1-4\\ &= \boldsymbol{10x-5}\end{aligned}$$

23.

$$\begin{aligned}(\ 1\ )\ \text{与式} &= (-2)^3\cdot a^3b^{2\cdot3}\\ &= \boldsymbol{-8a^3b^6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\ 2\ )\ \text{与式} &= (1\cdot3)x^2+(1\cdot(-1)+2\cdot3)xy+2\cdot(-1)y^2\\ &= \boldsymbol{3x^2+5xy-2y^2}\end{aligned}$$

(3) 与式 $= (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2$
$= \boldsymbol{4x^2 + 12xy + 9y^2}$

(4) 与式 $= (5a)^2 - (3b)^2$
$= \boldsymbol{25a^2 - 9b^2}$

(5) 与式 $= x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 3y + 3 \cdot x \cdot (3y)^2 + (3y)^3$
$= \boldsymbol{x^3 + 9x^2y + 27xy^2 + 27y^3}$

(6) 与式 $= (3x)^2 + (2y)^2 + (-1)^2$
$= +2 \cdot 3x \cdot 2y + 2 \cdot 2y \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) \cdot 3x$
$= \boldsymbol{9x^2 + 12xy + 4y^2 - 6x - 4y + 1}$

(7) 与式 $= x^3 - 4^3$
$= \boldsymbol{x^3 - 64}$

(8) $X = 2a + b$ とおいて

与式 $= (X-2)(X+3)$
$= X^2 + X - 6$
$= (2a+b)^2 + (2a+b) - 6$
$= \boldsymbol{4a^2 + 4ab + b^2 + 2a + b - 6}$

24.

(1) 与式 $= x^2 + \{(-3) + (-6)\}x + (-3)(-6)$
$= \boldsymbol{(x-3)(x-6)}$

(2) 与式 $= 3b(a^2 - 4b^2)$
$= 3b\{a^2 - (2b)^2\}$
$= \boldsymbol{3b(a+2b)(a-2b)}$

(3) 与式 $= x^3 - 2^3$
$= (x-2)(x^2 + x \cdot 2 + 2^2)$
$= \boldsymbol{(x-2)(x^2+2x+4)}$

(4) 与式 $= (3a)^3 + 1^3$
$= (3a+1)((3a)^2 - 3a \cdot 1 + 1^2)$
$= \boldsymbol{(3a+1)(9a^2 - 3a + 1)}$

(5)
$$\begin{array}{cccccc} 2a & \times & 9 & \longrightarrow & 9a & \\ a & & -2 & \longrightarrow & -4a & (+ \\ \hline & & & & 5a & \end{array}$$

与式 $= \boldsymbol{(2a+9)(a-2)}$

(6)
$$\begin{array}{cccccc} 4x & \times & y & \longrightarrow & 3xy & \\ 3x & & -2y & \longrightarrow & -8xy & (+ \\ \hline & & & & -5xy & \end{array}$$

与式 $= \boldsymbol{(4x+y)(3x-2y)}$

(7) 与式 $= ab + 3a + b^2 + b - 6$
$= a(b+3) + (b-2)(b+3)$
$= \{a + (b-2)\}\{b+3\}$
$= \boldsymbol{(a+b-2)(b+3)}$

(7) 与式 $= 2x^2 + xy - y^2 - 3x + 1$
$= (2x-y)(x+y) - 3x + 1$
$= \boldsymbol{(2x-y-1)(x+y-1)}$

$$\begin{array}{cccccc} 2x-y & \times & -1 & \longrightarrow & -x-y & \\ x+y & & -1 & \longrightarrow & 2x+y & (+ \\ \hline & & & & -3x & \end{array}$$

25.

(1)

$$\begin{array}{r|l} & \quad x + \quad 3 \\ \cline{2-2} x^2+2x+3 & \;x^3 + 5x^2 + \quad 4x + 6 \\ & \;x^3 + 2x^2 + \quad 3x \\ \cline{2-2} & \qquad\;\; 3x^2 + \quad\; x + 6 \\ & \qquad\;\; 3x^2 + \quad 6x + 9 \\ \cline{2-2} & \qquad\qquad\quad -5x - 3 \end{array}$$

商 $\boldsymbol{x+3}$ 余り $\boldsymbol{-5x-3}$

$\boldsymbol{A = B(x+3) - 5x - 3}$

(2)

$(x^2+3)(2x+1) + 6x - 1 = 2x^3 + x^2 + 6x$
$+ 6x + 3 - 1$
$= \boldsymbol{2x^3 + x^2 + 12x + 2}$

26.

(1)

$$\begin{array}{cccc} a^2 & b & c & \\ a & b^2 & c & d^3 \\ a & b & c & d^2 \\ & \downarrow & \downarrow & \\ & b & c & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccc} a^2 & b & c & \\ a & b^2 & c & d^3 \\ a & b & c & d^2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a^2 & b^2 & c & d^3 \end{array}$$

最大公約数 $\boldsymbol{bc}$ 最小公倍数 $\boldsymbol{a^2b^2cd^3}$

(2)

$$\begin{array}{lll} (x-3) & (x+7) & \\ (x-3) & & (2x+1) \\ (x-3)^2 & & \\ \downarrow & & \\ x-3 & & \end{array}$$

最大公約数 $\boldsymbol{x-3}$

$$\begin{array}{lll} (x-3) & (x+7) & \\ (x-3) & & (2x+1) \\ (x-3)^2 & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (x-3)^2 & (x+7) & (2x+1) \end{array}$$

最小公倍数 $\boldsymbol{(x-3)^2(x+7)(2x+1)}$

27.

(1)

与式の x に -1 を代入する

$(-1)^3+5\cdot(-1)^2+a\cdot(-1)+3=4$

$-1+5-a+3=4$

$\boldsymbol{a=3}$

(2)

与式の x に 1 を代入する

$1^3+a\cdot 1^2-4\cdot 1+3$

$=1+a-4+3$

$=a$

与式の x に 2 を代入する

$2^3+a\cdot 2^2-4\cdot 2+3$

$=8+4a-8+3$

$=4a+3$

余りが等しくなるので

$a=4a+3$

$3a=-3$

$\mathbf{a=-1}$

28.

(1) 剰余の定理より,x に 1 を代入

$1^3-6\cdot 1^2+11\cdot 1-6=0$

よって $x-1$ で割り切れる

$$\begin{array}{r|l} & x^2-5x+6 \\ \hline x-1 & x^3-6x^2+11x-6 \\ & x^3-x^2 \\ \hline & -5x^2+11x \\ & -5x^2+5x \\ \hline & 6x-6 \\ & 6x-6 \\ \hline & 0 \end{array}$$

よって

与式 $=(x-1)(x^2-5x+6)$

$=\boldsymbol{(x-1)(x-2)(x-3)}$

(2) 剰余の定理より,x に 2 を代入

$2^3+3\cdot 2^2-6\cdot 2-8=0$

よって $x-2$ で割り切れる

$$\begin{array}{r|l} & x^2+5x+4 \\ \hline x-2 & x^3+3x^2-6x-8 \\ & x^3-2x^2 \\ \hline & 5x^2-6x \\ & 5x^2-10x \\ \hline & 4x-8 \\ & 4x-8 \\ \hline & 0 \end{array}$$

よって

与式 $=(x-2)(x^2+5x+4)$

$=\boldsymbol{(x+1)(x-2)(x+4)}$

(3) 剰余の定理より,x に 2 を代入

$2^3-7\cdot 2^2+16\cdot 2-12$

よって $x-2$ で割り切れる

$$\begin{array}{r|l} & x^2-5x+6 \\ \hline x-2 & x^3-7x^2+16x-12 \\ & x^3-2x^2 \\ \hline & -5x^2+16x \\ & -5x^2+10x \\ \hline & 6x-12 \\ & 6x-12 \\ \hline & 0 \end{array}$$

よって

与式 $=(x-2)(x^2-5x+6)$

$=\boldsymbol{(x-2)^2(x-3)}$

(4) 剰余の定理より,x に 2 を代入

$1^4+3\cdot1^2-7\cdot1^2-15\cdot1+18=0$

よって $x-1$ で割り切れる

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3+4x^2-\ \ 3x-\ \ 18 \\ \hline
x-1 & x^4+3x^3-\ \ 7x^2-15x+18 \\
 & x^4-\ \ x^3 \\ \hline
 & \quad 4x^3-\ \ 7x^2 \\
 & \quad 4x^3-\ \ 4x^2 \\ \hline
 & \qquad -3x^2-15x \\
 & \qquad -3x^2+\ \ 3x \\ \hline
 & \qquad\quad -18x+18 \\
 & \qquad\quad -18x+18 \\ \hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$x^3+4x^2-3x-18$ はまだ因数分解ができる

剰余の定理より,x に 2 を代入

$2^3+4\cdot2^2-3\cdot2+18=0$

よって $x-2$ で割り切れる

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+\ \ 6x+\ \ \ 9 \\ \hline
x-2 & x^3+4x^2-\ \ 3x-18 \\
 & x^3-2x^2 \\ \hline
 & \quad 6x^2-\ \ 3x \\
 & \quad 6x^2-12x \\ \hline
 & \qquad 9x-18 \\
 & \qquad 9x-18 \\ \hline
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

与式 $=(x-1)(x-2)(x^2+6x+9)$

$=\boldsymbol{(x-1)(x-2)(x+3)^2}$

Check

29.

(1) 与式 $=\{2a+b\}\{(2a)^2-(2a\cdot b)+b^2\}\{8a^3-b^3\}$

$=(8a^3+b^3)(8a^3-b^3)$

$=\boldsymbol{64a^6-b^6}$

(2) 与式 $=(x-1)(x-4)(x-2)(x-3)$

$=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)$

X $=x^2-5x$ として

$=(X+4)(X+6)$

$=X^2+10x+24$

$=(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24$

$=x^4-10x^3+25x^2+10x^2-50x+24$

$=\boldsymbol{x^4-10x^3+35x^2-50x+24}$

30.

(1) 与式 $=x^2y+xy^2+xz+yz$

$=(x+y)xy+(x+y)z$

$=\boldsymbol{(x+y)(xy+z)}$

(2) 与式 $=(a+b)(a^2-ab+b^2)+(a+b)ab$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2+ab)$

$=\boldsymbol{(a+b)(a^2+b^2)}$

(3)$X=x^3$ として

与式 $=X^2-9X+8$

$=(X-1)(X-8)$

$=(x^3-1)(x^3-8)$

$=(x-1)(x^2+x+1)(x-2)(x^2+2x+4)$

$=\boldsymbol{(x-1)(x-2)(x^2+x+1)(x^2+2x+4)}$

(4) 与式 $=a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2$

$=a^2b-ca^2-ab^2+c^2a+b^2c-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)$

$=(a^2-(b+c)+bc)(b-c)$

$=(a-b)(a-c)(b-c)$

$=\boldsymbol{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

31.

(1) 剰余の定理より,x に -2 を代入

$(-2)^3-4\cdot(-2)^2-3\cdot(-2)+18=0$

よって $x+2$ で割り切れる

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-\ \ 6x+\ \ \ 9 \\ \hline
x+2 & x^3-4x^2-\ \ 3x+18 \\
 & x^3+2x^2 \\ \hline
 & \quad -6x^2-\ \ 3x+ \\
 & \quad -6x^2-12x \\ \hline
 & \qquad\quad 9x+18 \\
 & \qquad\quad 9x+18 \\ \hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

よって

与式 $=(x+2)(x^2-6x+9)$

$=\boldsymbol{(x-3)^2(x+2)}$

(2) 剰余の定理より,x に 1 を代入

$1^4-4\cdot1^3-5\cdot1^2-2\cdot1+10=0$

よって $x-1$ で割り切れる

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 - 3x^2 - 8x - 10 \\ \hline
x-1 & x^4 - 4x^3 - 5x^2 - 2x + 10 \\
 & x^4 - x^3 \\ \hline
 & -3x^3 - 5x^2 \\
 & -3x^3 + 3x^2 \\ \hline
 & -8x^2 - 2x \\
 & -8x^2 + 8x \\ \hline
 & -10x + 10 \\
 & -10x + 10 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

$x^3-3x^2-8x-10$ はまだ因数分解ができる

剰余の定理より,x に 5 を代入

$5^3-3\cdot5^2-8\cdot5-10=0$

よって $x-5$ で割り切れる

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 2x + 2 \\ \hline
x-5 & x^3 - 3x^2 - 8x - 10 \\
 & x^3 - 5x^2 \\ \hline
 & 2x^2 - 8x \\
 & 2x^2 - 10x \\ \hline
 & 2x - 10 \\
 & 2x - 10 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

よって

与式 $=\boldsymbol{(x-1)(x-5)(x^2+2x+2)}$

32.

(1) 与式 $=4a^4+4a^2+1-4a^2$
$=(2a^2+1)^2-(2a)^2$
$=(2a^2+1+2a)(2a^2+1-2a)$
$=\boldsymbol{(2a^2+2a+1)(2a^2-2a+1)}$

(2) 与式 $=9x^4+12x^2+4-x^2$
$=(3x^2+2)^2-x^2$
$=(3x^2+2+x)(3x^2+2-x)$
$=\boldsymbol{(3x^2+x+2)(3x^2-x+2)}$

(3) 与式 $=x^4-2x^2+1-4x^2$
$=(x^2-1)^2-(2x)^2$
$=(x^2-1+2x)(x^2-1-2x)$
$=\boldsymbol{(x^2+2x-1)(x^2-2x-1)}$

(4) 与式 $=x^4+6x^2+9-9x^2$
$=(x^2+3)^2-(3x)^2$
$=(x^2+3+3x)(x^2+3-3x)$
$=\boldsymbol{(x^2+3x+3)(x^2-3x+3)}$

33.

$$P(x)=(x^2-3x-4)Q(x)+ax+b$$

条件より $P(-1)=1, P(4)=16$ より

$\begin{cases}-a+b=1\\4a+b=16\end{cases}$ これを解いて $a=3, b=4$

したがって, 求める余りは $3x+4$

34.

$P(x)=Q(x)(x^2+1)+x^3+2x$
$=Q(x)(x^2+1)+x(x^2+1)+x$
$=(x^2+1)(Q(x)+x)+x$

よって, 余りは $\boldsymbol{x}$

35.

$P(x)=(x-2)Q(x)+4$
$Q(x)=(x+3)R(x)+3$

と表されるから

$P(x)=\{x-2\}\{(x+3)R(x)+3\}+4$
$=(x-2)(x+3)R(x)+3x-6+4$
$=(x-2)(x+3)R(x)+3x-2$

$x^2+x-6\{=(x-2)(x+3)\}$ で割ったあまり $\boldsymbol{3x+2}$

$x+3$ で割ったあまり $P(-3)=\boldsymbol{-11}$