新応用数学　改訂版，大日本図書（2023.11.1）

4章　複素関数

1　正則関数

1.1　複素数と極形式

■問 1 (1) (p.107)

$$\begin{aligned}(3+2\mathrm{i})^2 &= 3^2+2\cdot 3\cdot 2\mathrm{i}+(2\mathrm{i})^2\\ &= 5+12\mathrm{i},\end{aligned}$$

ここで，$z=(3+2\mathrm{i})^2$ とおくと，

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(z)&=5,\\ \mathrm{Im}(z)&=12,\\ |z|&=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{169}=13,\\ \bar{z}&=5-12\mathrm{i}.\end{aligned}$$

■問 1 (2) (p.107)

$$\begin{aligned}(2+\mathrm{i})(1-3\mathrm{i}) &= 2+2\cdot(-3\mathrm{i})+\mathrm{i}+\mathrm{i}\cdot(-3\mathrm{i})\\ &= 5-5\mathrm{i},\end{aligned}$$

ここで，$z=(2+\mathrm{i})(1-3\mathrm{i})$ とおくと，

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(z)&=5,\\ \mathrm{Im}(z)&=-5,\\ |z|&=\sqrt{5^2+(-5)^2}=5\sqrt{2},\\ \bar{z}&=5+5\mathrm{i}.\end{aligned}$$

■問 1 (3) (p.107)

$$\begin{aligned}\frac{1}{3+\mathrm{i}} &= \frac{3-\mathrm{i}}{(3+\mathrm{i})(3-\mathrm{i})}\\ &= \frac{3-\mathrm{i}}{3^2-\mathrm{i}^2}\\ &= \frac{3-\mathrm{i}}{10},\\ &= \frac{3}{10}-\frac{1}{10}\mathrm{i},\end{aligned}$$

ここで，$z=\frac{1}{3+\mathrm{i}}$ とおくと，

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(z)&=\frac{3}{10},\\ \mathrm{Im}(z)&=-\frac{1}{10},\\ |z|&=\sqrt{\left(\frac{3}{10}\right)^2+\left(-\frac{1}{10}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{10},\\ \bar{z}&=\frac{3}{10}+\frac{1}{10}\mathrm{i}.\end{aligned}$$

■問 1 (4) (p.107)

$$\begin{aligned}\frac{4+3\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} &= \frac{(4+3\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}\\ &= \frac{4\cdot 2+4\cdot(-\mathrm{i})+3\mathrm{i}\cdot 2+3\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i})}{2^2-\mathrm{i}^2}\\ &= \frac{11+2\mathrm{i}}{5}\\ &= \frac{11}{5}+\frac{2}{5}\mathrm{i},\end{aligned}$$

ここで，$z=\frac{4+3\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$ とおくと，

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(z)&=\frac{11}{5},\\ \mathrm{Im}(z)&=\frac{2}{5},\\ |z|&=\sqrt{\left(\frac{11}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\sqrt{5},\\ \bar{z}&=\frac{11}{5}-\frac{2}{5}\mathrm{i}.\end{aligned}$$

■問 2 (1) (p.107)

証明　$x_j=\mathrm{Re}(z_j), y_j=\mathrm{Im}(z_j) (j=1,2)$ とおくと，$z_1+z_2=x_1+x_2+\mathrm{i}(y_1+y_2)$ であるから

$$\begin{aligned}\overline{z_1+z_2} &= x_1+x_2-\mathrm{i}(y_1+y_2)\\ &= x_1-\mathrm{i}y_1+x_2-\mathrm{i}y_2\\ &= \overline{x_1+\mathrm{i}y_1}+\overline{x_2+\mathrm{i}y_2}\\ &= \overline{z_1}+\overline{z_2},\end{aligned}$$

を得る．∎

■問 2 (2) (p.107)

証明　$x_j=\mathrm{Re}(z_j), y_j=\mathrm{Im}(z_j) (j=1,2)$ とおくと，$z_1-z_2=x_1-x_2+\mathrm{i}(y_1-y_2)$ であるから

$$\begin{aligned}\overline{z_1-z_2} &= x_1-x_2-\mathrm{i}(y_1-y_2)\\ &= x_1-\mathrm{i}y_1-(x_2-\mathrm{i}y_2)\\ &= \overline{x_1+\mathrm{i}y_1}-\overline{(x_2+\mathrm{i}y_2)}\\ &= \overline{z_1}-\overline{z_2},\end{aligned}$$

を得る．∎

■問 2 (3) (p.107)

証明　$x_j=\mathrm{Re}(z_j), y_j=\mathrm{Im}(z_j) (j=1,2)$ とおくと，$z_1z_2=x_1x_2-y_1y_2+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)$ であるから

$$\overline{z_1z_2}=x_1x_2-y_1y_2-\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1),$$

となる．一方，

$$\begin{aligned}\overline{z_1}\ \overline{z_2} &= (x_1 - \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)\\ &= x_1x_2 - y_1y_2 + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1),\end{aligned}$$

の結果から

$$\overline{z_1z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2},$$

を得る．▮

■問 2 (4) (p.107)

証明　任意の実数 c と任意の複素数 z に対して $\overline{cz} = c\overline{z}$ であることと，$z_2\overline{z_2} = |z_2|^2$ が実数であることに注意すると，$z_2 \neq 0$ に対して

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} &= \overline{\left(\frac{1}{z_2\overline{z_2}}\cdot\overline{z_2}\right)}\\ &= \frac{1}{z_2\overline{z_2}}\cdot\overline{\overline{z_2}}\\ &= \frac{1}{z_2\overline{z_2}}\cdot z_2,\end{aligned}$$

となる．最右辺を z_2 で約分することで

$$\overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \frac{1}{\overline{z_2}},$$

が得られる．この結果と前問の結果を利用して，

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \overline{z_1\cdot\left(\frac{1}{z_2}\right)}\\ &= \overline{z_1}\cdot\overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)}\\ &= \overline{z_1}\cdot\frac{1}{\overline{z_2}}\\ &= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\end{aligned}$$

を得る．▮

■問 2 (5) (p.107)

証明　z が実数 $\iff$ $\mathrm{Im}(z) = 0$ に注意すると，

(必要性)

$$\begin{aligned}z\text{ が実数} &\Longrightarrow 0 = \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z})\\ &\Longrightarrow \overline{z} = z.\end{aligned}$$

(十分性)

$$\begin{aligned}\overline{z} = z &\Longrightarrow \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z}) = 0\\ &\Longrightarrow z\text{ は実数}.\end{aligned}$$

以上より z が実数 $\iff$ $\overline{z} = z$ である．▮

■問 2 (6) (p.107)

証明　z が純虚数 $\iff$ $\mathrm{Re}(z) = 0$ かつ $\mathrm{Im}(z) \neq 0$ に注意すると，

(必要性)

$$\begin{aligned}z\text{ が純虚数} &\Longrightarrow 0 = \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z + \overline{z})\\ &\Longrightarrow \overline{z} = -z.\end{aligned}$$

十分性については成立しない ($z = 0$ は $\overline{z} = -z$ を満たすが，$\mathrm{Im}(z) \neq 0$ に反する)．よって「$\overline{z} = -z \longleftrightarrow z$ が純虚数」は偽である．▮

■問 3 (1) (p.108)　$\left|\sqrt{3} + \mathrm{i}\right| = 2$ より，

$$\begin{aligned}\sqrt{3} + \mathrm{i} &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\\ &= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)\\ &= 2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}.\end{aligned}$$

■問 3 (2) (p.108)　$|-1 + \mathrm{i}| = \sqrt{2}$ より，

$$\begin{aligned}-1 + \mathrm{i} &= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)\\ &= \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}.\end{aligned}$$

■問 3 (3) (p.108)　$|5\mathrm{i}| = 5$ より，

$$\begin{aligned}5\mathrm{i} &= 5(0 + \mathrm{i})\\ &= 5(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2})\\ &= 5\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}.\end{aligned}$$

■問 3 (4) (p.108)　$|-4| = 4$ より，

$$\begin{aligned}-4 &= 4(-1 + \mathrm{i}0)\\ &= 4(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)\\ &= 4\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}.\end{aligned}$$

■問 4 (1) (p.108)

証明　左辺を計算し，

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right| = |\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1,$$

を得る．▮

■**問** 4 (2) (p.108)

証明　左辺を計算し，

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} &= \overline{\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta} \\
&= \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta \\
&= \cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta) \\
&= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta},
\end{aligned}
$$

を得る．∎

■**問** 4 (3) (p.108)

証明　右辺を計算し，

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \\
&\quad = \frac{(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) + [\cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta)]}{2} \\
&\quad = \cos\theta,
\end{aligned}
$$

を得る．∎

■**問** 4 (4) (p.108)

証明　右辺を計算し，

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}} \\
&\quad = \frac{(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) - [\cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta)]}{2\mathrm{i}} \\
&\quad = \sin\theta,
\end{aligned}
$$

を得る．∎