Sobolev 空間から多項式空間への射影

吉川　敦

平成 19 年 8 月 17 日

目 次

1　はじめに

1.1　本稿の背景

Sobolev は，著書 [6] で Sobolev 空間 $W_p^m(\Omega)$ から次数が有界な多項式が成す部分空間へのある種の射影を構成し，それを利用して，埋蔵定理の証明や性質を論じている．また，数値解析の基本的な命題である Bramble-Hilbert の補題でも同様の射影が現れ（[1][1]），有限要素法における補間作用素を構成するために利用されている．これらの議論では，構成の都合上，ある球に関して星型である[2]という条件を満たす領域 Ω 上の Sobolev 空間 $W_p^m(\Omega)$ が対象であるが，p に対する制約は緩くてよい（$1 \leqq p < +\infty$）．これらの構成は，詳細は後述するが，Sobolev 空間の各元に対し，その標準的な多項式部分，いわば Taylor 級数展開に相当するものを，領域内の閉球に台を持つ C^∞ 級の関数から導いた核関数による積分として得ようというアイデアに基づいている．他方，$p = 2$ の場合，Sobolev 空間 $W_2^m(\Omega)$ は Hilbert 空間になり，次数が有界な多項式からなる閉部分空間への正射影が容易に得られる．したがって，この場合には，Sobolev-Bramble-Hilbert の射影作用素を正射影との関連で理解することができるはずである．

筆者は Sobolev の本 [6] を 40 年以上前数学科 4 年生のとき吉田耕作先生のセミナーで一年掛けて読んだ．Sobolev の射影の話は第 1 章で出てくる．必要があって最近読み直したが，学生時代には気づきようもなかった疑問がいくつか生じた．また，Bramble-Hilbert の補題については有限要素法の入門書 [2] で学んだ．両者を比較して思い浮かぶ訝しさもある．Sobolev の射影は，背後にある多項式近似の理論が筆者に想起できるものではないためか[3]，複雑な手順を踏んで初めて出来上がっているように見える．これに対して，Bramble-Hilbert の射影は明白に微積分学における Taylor 展開を意識しており，いくらか安直なようでもある．しかし，この方法は Sobolev の本来の思想圏に属するようでもあり，したがって，Sobolev はこの手法も検討した上で，敢えて入り組んだ構成を選んだのかも知れないとも思う[4]．ちなみに，Bramble-Hilbert の補題は，Sobolev の剰余項評価より詳しいようにも見える．しかし，実は，本来の Sobolev の構成に従ってもほぼ同様の評価が得られることが確認できる[5]．

さらに，$p = 2$ の場合，Sobolev 空間は関数解析的には Hilbert 空間になるから，多項式空間への正射影は，Sobolev 空間の空間としての幾何構造か

[1] ただし，以下の議論は [2] を主に参照した．[1] では，領域 Ω は強錐性（strong cone property）が要求されているだけであり，しかも，定理 3.1 が示されているわけではない．§3.5 を見られたい．

[2] K は領域 Ω 内の閉球とする（$K \subset \Omega$）．任意の $x \in \Omega$ に対し，x と K の任意の点 $z \in K$ を結ぶ線分 $[x, z]$ が必ず Ω 内にあるとき，Ω は K に関して星型といわれる．

[3] 意外と素朴な動機説明が [7] の該当箇所（p.42）にある．

[4] 数学史という立場からならば，Sobolev 自身の研究ノートが残っていれば，それを見ることによりはっきりさせられることではある．

[5] 本稿の定理 3.1 および定理 4.2 を見よ．

ら誘導される最小原理に基づいて決定される．領域 Ω がよい境界を持てば，Stokes の定理によって，正射影の表現式をさらに整理できる．一旦整理してしまえば，この射影を， Sobolev 空間 $W_2^m(\Omega)$ の場合から，より一般の $W_p^m(\Omega)$ に拡張して論ずることができるはずである．領域がある閉球に関して星型であれば，正射影と Sobolev 等の射影作用素を比較することができるであろう．

1.2　本稿の趣旨

本稿の趣旨は，まず，Sobolev 空間 $W_p^m(\Omega)$ について，$p = 2$ の場合に，正射影と Sobolev らの射影の比較を実際にやってみようということである．一般の p の場合なら，どうなるだろうか．

§6 に，問題提起らしき形のものを示すが，ささやか過ぎるし，直近すぎるようでもある．しかし，課題そのものは古くからあり，応用上も重要である．しかも，Sobolev 空間の構造定理としては基本的なものでもある．放置残存というのは，筆者の視点からではあるが，他方，本来の問題提起ならば完成度の高い定式化や周到な背景説明の議論が望まれるのであるが，筆者の能力ではそれもなかなか難しかろうという意味も篭めてある．

ここで論じるのは，一定の規則で生成される扱いやすい部分領域群の極限として表すことができる（ほぼ）一般の領域上の関数空間である．例えば，まず，各部分領域の上の Sobolev 空間の擬似直和を利用して，もとの領域の上で定義された Sobolev 空間の近似を実現する．その上で，各部分領域の上の Sobolev 空間を，それぞれ多項式関数の部分空間の極限として表すとすると，結局，もとの Sobolev 空間の元を区分的に多項式であるような関数で近似することを論ずることになる．このこと自体は，有限要素法の基本的な教科書の冒頭でも説かれることのようではあるが，ここでは形状関数や節点変数を予め指定する前の，より根源的なことを考えてみたいのである．

1.3　公開資料のための釈明（平成 19 年 6 月）

この稿では筆者の意図がすべて開示されているわけではない．もともとは，Sobolev 空間の計算可能解析学的扱いという狙いがある．実際，本稿[6]は，来る 9 月に Novosibirsk の Sobolev 数学研究所で開催される

Joint workshop :
Domains VIII and Computability over continuous data type

のための講演原稿の（いわば）下書き準備として作っているメモであるとも言える．

[6]ただし，本稿は完全に数学解析的なものであって，計算可能解析学はおろか数値解析的雰囲気も全くない．

本来は，第 5 節・第 6 節を大幅に補強してから公開すべきであるが，6 月にはとにかく公開しようと考えていたので，そうすることにする．ただし，特に，第 5 節・第 6 節は現状ではほとんど何も書かれていないのに等しいので，しばらくは，本稿は随時改訂されることになろう．

1.4 公開資料「改訂」についての釈明（平成 19 年 8 月）

その後若干書き加えたものを公開する．ただし，肝心のところが進んでいるわけではなく，§6 は以前の稿のままである．基本的には，やや長くなっただけであるが，ようやく問題とすべきことがわかってきたような気がしている．要するに，Sobolev 空間が定義されている領域を単純な小領域に細分し，各小領域では多項式関数で近似しようということであるが，この際，隣接する小領域の共通境界における両立条件の管理が鍵になる．（有限要素法の）Lagrange 要素の場合は両立条件に導関数を含まれないので自明に近いのであるが，それでも，もとの Sobolev 空間の任意の元の近似を実現したいと考えると，階数の整合性などを含め，釈然としないものが依然として多く残っている．共通境界における両立条件が（相応の階数までの）法導関数の一致を含む場合は有限要素法との対応もはっきりしない．これらは，いずれ §6 において詳述したい．

以上のように，相変わらずのいい加減さではあるが，この次，多分数ヵ月後には，大分まともな形で公開できるものと考えている．

2 Sobolev 空間と多項式関数の成す部分空間

以下で論ずるのは Hilbert 空間になる場合である．

2.1 Sobolev 空間

まず，n 次元ユークリッド空間内の有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上の m 次の Sobolev 空間 $W_2^m(\Omega)$ を導入しよう．ここで，m は自然数 $\in \mathbb{N}$ （つまり，$m = 0, 1, 2, \cdots$）である．$u(x)$，$w(x)$ を Ω 上の実数値の 2 乗可積分関数（の類），すなわち，

$$\int_\Omega |u(x)|^2\,dx < +\infty, \quad \int_\Omega |w(x)|^2\,dx < +\infty$$

を満たすものとする．α が多重指標[7]のとき，$w(x)$ が $u(x)$ の α 階の弱（い意味の，あるいは，一般化された）偏導関数である[8]とは，Ω 内に台を持つ任意の C^∞ 関数 $\varphi(x)$ に対し，

$$\int_\Omega u(x)\,\partial^\alpha\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega w(x)\,\varphi(x)\,dx$$

が成り立つことである．周知のように部分積分が発想の下敷きにある[9]．$u(x)$ の α 階の弱偏導関数を $w(x) = \partial^\alpha u(x)$ と表すことがある．

さて，Ω 上の m 次の Sobolev 空間 $W_2^m(\Omega)$ は，Ω 上の 2 乗可積分関数 $u(x)$ で，長さ m までの α 階の 2 乗可積分な弱偏導関数 $\partial^\alpha u(x)$, $|\alpha| \leqq m$, があるものの全体を表す．$W_2^m(\Omega)$ は，内積

$$\langle u, v\rangle_m = \sum_{|\alpha|\leqq m}\int_\Omega \partial^\alpha u(x)\,\partial^\alpha v(x)\,dx, \quad u, v \in W_2^m(\Omega), \tag{2.1}$$

によって,（実数体 $\mathbb{R}$ 上の）Hilbert 空間になる．ここで，$|\alpha| = 0$ は $\alpha = 0 = (0, \cdots, 0)$ のときに限ること，および，$\partial^0 = 1$ と解することを注意しておく．

Sobolev 空間 $W_2^m(\Omega)$ のノルムは

$$\|u\|_m = \sqrt{\sum_{|\alpha|\leqq m}\int_\Omega |\partial^\alpha u(x)|^2\,dx}, \quad u \in W_2^m(\Omega) \tag{2.2}$$

で与えられる．

注意 2.1 $1 \leqq p < +\infty$ ならば，Sobolev 空間 $W_p^m(\Omega)$ は，Ω 上の p 乗可積分な関数 $u(x)$ で，p 乗可積分な弱偏導関数 $\partial^\alpha u(x)$, $|\alpha| \leqq m$ を持つものの成す空間をいう．ノルム

$$\|u\|_{p,m} = \left(\sum_{|\alpha|\leqq m}\int_\Omega |\partial^\alpha u(x)|^p\,dx\right)^{1/p}, \quad u \in W_p^m(\Omega)$$

によって，Banach 空間になる．ただし，本稿では $p = 2$ の場合しか考えない．

---

[7] すなわち，α は自然数の n 組 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ を指す．α の長さ $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ とする．α の階乗は $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$ を意味する．不定元の n 組 $X = (X_1, \cdots, X_n)$ に対し，$X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ を表す．$\partial = (\partial_1, \cdots, \partial_n)$ に対して $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$ となり，これは α 階の偏微分作用素となる．座標（関数） $x = (x_1, \cdots, x_n)$ に対し，$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ は単項式（関数）である．

[8] 弱偏導関数の定義だけなら，$u(x)$，$v(x)$ は局所可積分を仮定するだけでよい．ここでは，Sobolev 空間 $W_2^m(\Omega)$ の元を定義することを念頭に，2 乗可積分を要求している．

[9] 一般化された導関数という思想は関数概念の一般化とも関連し，淵源をどう尋ねるべきか不明な点があると思われる．Sobolev の思想についても，同時代に既に Lewy，Friedrichs らの発想もあり，さらに，積分論の当初から微分の概念もあった．もちろん，Heaviside の演算子法もあり，さらに，遡れば，Fourier の議論もこの思想圏に属すると考えるのが自然なのではないだろうか．Sobolev 以降では，Schwartz や Colombeau，別に，佐藤幹夫の思想があり，また，超準解析というのもある．数学史として扱われるべきか数理哲学としてなのかは判然としないが，そろそろ整理された全体的な議論が展開されてもよい頃合であろう．

なお，$u \in W_2^m(\Omega)$ に対しては，同次セミノルム

$$|u|_k = \sqrt{\int_\Omega \sum_{|\alpha|=} |\partial^\alpha u(y)|^2\, dy}, \quad k = 0, \cdots, m \tag{2.3}$$

を定義することができる．もちろん，$\|u\|_m = \sqrt{\sum_{k=0}^m |u|_k^2}$ である．

2.2 多項式関数からなる閉部分空間

座標関数 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ の単項式は，α を多重指標として，$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ で与えられるが，$\mathbb{R}^n$ 上の関数 $x \mapsto x^\alpha$ を定める．多項式は単項式の（実係数の）1次結合であり，k 次の多項式 $\sum_{|\alpha| \leqq k} c_\alpha x^\alpha$ は多項式関数を定める．

次数が ℓ を超えない多項式関数の全体を $\mathbb{P}^\ell$ と置こう：

$$\mathbb{P}^\ell = \left\{ \sum_{|\alpha| \leqq k} c_\alpha x^\alpha \,;\, c_\alpha \in \mathbb{R},\ k \leqq \ell \right\}.$$

単項式関数 x^α, $|\alpha| \leqq \ell$ は1次独立であり，$\mathbb{P}^\ell$ はこれらの線形苞である．特に，k 次の同次多項式関数[10] 全体を $\mathbb{P}_0^k$ とすると，直和 $\mathbb{P}^\ell = \bigoplus_{k=0}^\ell \mathbb{P}_0^k$ が成り立つ．線形空間 $\mathbb{P}_0^k$ の次元は

$$N(n,k) = \#\{\, \alpha \in \mathbb{N}^n \,;\, |\alpha| = k \,\} \tag{2.4}$$

であり，したがって，$\mathbb{P}^\ell$ は有限次元（$\sum_{k=0}^\ell N(n,k)$ 次元）である．

注意 2.2 　意味から任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し， $N(1,k) = 1$，$N(k,0) = 1$ （ただし，$N(0,0) = 0$）であり，また，$N(n,k) = \sum_{j=0}^k N(n-1,j)$, $n > 1$, である．したがって，

$$N(n,1) = n, \quad N(n,2) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad N(n,3) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3!},$$

となり，一般に，

$$N(n,k) = \sum_{k'=0}^{k} \sum_{k''=0}^{k'} \cdots \sum_{k^{(n-1)}=0}^{k^{(n-2)}} N(1, k^{(n-1)}) = \frac{n\ \cdots\ (n+k-1)}{k!}$$

である．他方，特に，$\dim(\mathbb{P}^\ell) = N(n+1,\ell)$ である．

[10] k-次の多項式とは $p(x) = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha x^\alpha$ を指す．なお，同次性の基点を $a = (a_1, \cdots, a_n)$ と考え，$(x-a)^\alpha$（$|\alpha| = k$）の1次結合，つまり，$p(x-a)$ に相当するものを考えることもある．このときは，基点 a に関する k 次の同次多項式ということにし，その全体を $\mathbb{P}_a^k$ と表すこともある．

多項式関数は $\mathbb{R}^n$ 上の関数であるが，特に，Ω 上の関数でもある．したがって，$\mathbb{P}^\ell$ は，Sobolev 空間 $W_2^m(\Omega)$（および，$W_p^m(\Omega)$）の閉部分空間として考えることができる．

補題 2.1　Sobolev 空間 $W_2^m(\Omega)$ から閉部分空間 $\mathbb{P}^\ell$ への正射影を Π_ℓ^m とおく．$e_0(x), \cdots, e_N(x)$ を $\mathbb{P}^\ell$ の（$\langle\,,\,\rangle_m$ における）正規直交基底[11]とすると，

$$\Pi_\ell^m\, u = \sum_{j=0}^{N} \langle u,\, e_j\rangle_m\, e_j, \quad u \in W_2^m(\Omega) \tag{2.5}$$

である．

実際，$p_0 = \Pi_\ell^m u,\, u \in W_2^m(\Omega)$，であるための条件は，

$$\langle u - p_0, p\rangle_m = 0, \quad p \in \mathbb{P}^\ell$$

である．

注意 2.3　$e_j \in \mathbb{P}^k$ ならば，$\partial^\alpha e_j = 0, |\alpha| > k$ である．したがって，$\langle u, e_j\rangle_m = \langle u, e_j\rangle_k,\, m \geqq k$ となる．Gram-Schmidt 法を用いれば，容易にわかるように，$\mathbb{P}^\ell$ の正規直交基底は

$$e_0 \in \mathbb{P}^0,\ e_1, \cdots, e_n \in \mathbb{P}^1,\ e_{n+1}, \cdots, e_{n+N(n,2)} \in \mathbb{P}^2,\ \cdots \tag{2.6}$$

を満たすように作ることができる．なお，(2.22) 参照.

ところで，$u \in W_2^m(\Omega),\, e_j \in \mathbb{P}^\ell$ に対し，

$$\langle u,\, e_j\rangle_m = \sum_{|\alpha| \leqq m} \int_\Omega \partial^\alpha u(y)\, \partial^\alpha\, e_j(y)\, dy$$

である．また，$u(x), v(x)$ がなめらかならば

$$\partial^\alpha u(x)\, v(x) - (-1)^{|\alpha|}\, u(x)\, \partial^\alpha v(x) = \sum_{k=1}^{n} \partial(U_{\alpha,k}[u,v](x))$$

となる．ただし，$\alpha = (\alpha_1, \alpha') = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha'') = \cdots = (\hat{\alpha}, \alpha_n)$ として，

$$U_{\alpha,1}[u,v](x) = \sum_{j=0}^{\alpha_1 - 1} (-1)^j \partial_1^{\alpha_1 - 1 - j} \partial^{\alpha'} u(x)\, \partial_1^j v(x),$$

$$U_{\alpha,2}[u,v](x) = (-1)^{\alpha_1} \sum_{j=0}^{\alpha_2 - 1} (-1)^j \partial_2^{\alpha_2 - 1 - j} \partial^{\alpha''} u(x)\, \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^j v(x)$$

$$\cdots$$

[11] $N = \dim(\mathbb{P}^\ell) = N(n+1, \ell)$ である．

$$U_{\alpha,n}[u,v](x) = (-1)^{|\hat{\alpha}|} \sum_{j=0}^{\alpha_n-1} (-1)^j \partial_n^{\alpha_n-1-j} u(x)\, \partial^{\hat{\alpha}} \partial_n^j v(x)$$

である．したがって，境界 $\partial\Omega$ が（区分的に）なめらかであれば，Stokes の定理により，

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \partial^\alpha u(y)\, v(y)\, dy - (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(y)\, \partial^\alpha v(y)\, dy \\ &\quad = \int_{\partial\Omega} \sum_{k=1}^n U_{\alpha,k}[u,v](\eta)\, \nu_k(\eta)\, d\Sigma_\eta \end{aligned}$$

となる．ここで，$d\Sigma$ は $\partial\Omega$ の境界要素（Hausdorff 測度），$\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_n)$ は単位外向き法線ベクトルである．

以上の議論を補題 2.1 に適用して，次を得る．

系 2.1　領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ は区分的になめらかであるとする．このとき，補題 2.1 の正射影 Π_ℓ^m は，

$$\mathcal{P}_\ell^m(x,y) = \sum_{j=0}^N e_j(x) \left(\sum_{|\alpha| \leqq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^{2\alpha} e_j(y) \right) \tag{2.7}$$

および

$$\mathcal{B}_{\ell,k}^m(u\,;x,\eta) = \sum_{j=0}^N e_j(x) \left\{ \sum_{|\alpha| \leqq m} U_{\alpha,k}[u, \partial^\alpha e_j](\eta) \right\} \tag{2.8}$$

として，

$$\begin{aligned} \Pi_\ell^m u(x) &= \int_\Omega \mathcal{P}_\ell^m(x,y)\, u(y)\, dy + \sum_{k=1}^n \int_{\partial\Omega} \mathcal{B}_{\ell,k}^m(u\,;x,\eta)\, \nu_k(\eta)\, d\Sigma_\eta \\ &= \sum_{j=0}^N c_j^m(u)\, e_j(x), \quad u \in W_2^m(\Omega) \end{aligned} \tag{2.9}$$

で与えられる．ただし，

$$\begin{aligned} c_j^m(u) = &\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leqq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^{2\alpha} e_j(y)\, u(y)\, dy \\ &+ \sum_{k=1}^n \int_{\partial\Omega} \sum_{|\alpha| \leqq m} U_{\alpha,k}(u, \partial^\alpha e_j)[\eta]\, \nu_k(\eta)\, d\Sigma_\eta \end{aligned} \tag{2.10}$$

である．

注意 2.4　$e_j(x)$, $j = 0, \cdots, N$, は多項式関数であり，したがって，(2.10) における境界 $\partial\Omega$ 上の積分は一般に消えない．

2.3 多項式関数の空間の正規直交基底について

(2.7) (2.8) の表現について具体的な事例で検討した．まず，多項式関数の空間の正規直交基底について，二三の確認をしておこう．

例 2.1 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ とする．1, x_1, x_2 の 1 次結合全体は $W_2^m(\Omega)$ ($m \in \mathbb{N}$, $m \geqq 1$) の閉部分空間 $\mathbb{P}^1$ を成す．Gramm-Schmidt 法による正規直交化法はよく知られている．ここでは，Poincaré-Wigner 法を適用しよう．まず，$e_0(x) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \in \mathbb{P}^0$ は，$\langle e_0, e_0\rangle_m = \langle e_0, e_0\rangle_0 = 1$ を満たす．e_0 に x_1, $x_2 \in \mathbb{P}^1$ を加えて，正規直交系を構成するために，さらに，以下の内積を計算する：

$$
\begin{aligned}
\langle e_0,\, x_1\rangle_m = \langle e_0,\, x_1\rangle_0 &= \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \int_\Omega x_1\, dx, \\
\langle e_0,\, x_2\rangle_m = \langle e_0,\, x_2\rangle_0 &= \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \int_\Omega x_2\, dx, \\
\langle x_1, x_1\rangle_m = \langle x_1, x_1\rangle_1 &= \int_\Omega x_1^2\, dx + |\Omega|, \\
\langle x_2, x_2\rangle_m = \langle x_2, x_2\rangle_1 &= \int_\Omega x_2^2\, dx + |\Omega|, \\
\langle x_1, x_2\rangle_m = \langle x_1, x_2\rangle_0 = \langle x_2, x_1\rangle_0 = \langle x_2, x_1\rangle_m &= \int_\Omega x_1 x_2\, dx.
\end{aligned}
$$

これらから，行列

$$
\mathscr{G} = \begin{pmatrix} E & {}^tB \\ B & C \end{pmatrix}, \tag{2.11}
$$

を作ると，$\mathscr{G}$ は対称な正定値行列になる．ただし，

$$
E = (1), \quad B = \begin{pmatrix} \langle e_0, x_1\rangle_0 \\ \langle e_0, x_2\rangle_0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1\rangle_1 & \langle x_1, x_2\rangle_0 \\ \langle x_2, x_1\rangle_0 & \langle x_2, x_2\rangle_1 \end{pmatrix}
$$

とする[12]．(2.11) の奇妙な表現は以下の補題 2.2 や系 2.2 を念頭においている．このとき，$u_1(x) = \xi_0\, e_0(x) + \xi_1\, x_1 + \xi_2\, x_2$，$u_2(x) = \eta_0\, e_0(x) + \eta_1\, x_1 + \eta_2\, x_2$ に対し，

$$
\langle u_1,\, u_2\rangle_m = (\xi_0, \xi_1, \xi_2)\,\mathscr{G} \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \tag{2.12}
$$

となる．$\mathscr{G}$ の正定値性は，(2.12) から直ちに従う．特に，$\mathscr{G}$ の平方根 $\mathscr{G}^{1/2}$ が，正定値対称行列として定義される．そこで，

$$
\begin{pmatrix} \xi_0' \\ \xi_1' \\ \xi_2' \end{pmatrix} = \mathscr{G}^{1/2} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \eta_0' \\ \eta_1' \\ \eta_2' \end{pmatrix} = \mathscr{G}^{1/2} \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \tag{2.13}
$$

---

[12] 実は，

$$
C = \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1\rangle_0 & \langle x_1, x_2\rangle_0 \\ \langle x_2, x_1\rangle_0 & \langle x_2, x_2\rangle_0 \end{pmatrix} + |\Omega|\, E
$$

である．

とおくと，(2.12) の右辺は，さらに，$\xi_0'\,\eta_0' + \xi_1'\,\eta_1' + \xi_2'\,\eta_2'$ と書き換えられる．ところで，

$$\begin{pmatrix} f_0(x) \\ f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \mathscr{G}^{-1/2} \begin{pmatrix} e_0(x) \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

とおくと，$u_1(x) = \xi_0\,e_0(x)+\xi_1\,x_1+\xi_2\,x_2 = \xi_0'\,f_0(x)+\xi_1'\,f_1(x)+\xi_2'\,f_2(x)$ となり，同様に，$u_2(x) = \eta_0'\,f_0(x)+\eta_1'\,f_1(x)+\eta_2'\,f_2(x)$ である．しかも，構成から，$f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ は $W_2^m(\Omega)$ の正規直交系をなす．これが Poincaré-Wigner の正規直交化である．

Poincaré-Wigner 法は，正規直交化の構成の全体像が一目瞭然である点で，Gram-Schmidt 法より優れている．しかし，$\mathscr{G}^{1/2}$ やその逆行列の実際の計算となると，例 2.1 の場合でも簡単ではなく，最初の 1 次独立系の構造が得られた正規直交系にどう反映しているかは見えにくい．

補題 2.2　E は $k\times k$ の単位行列，B は $\ell\times k$ の実行列，C は $\ell\times\ell$ の実対称行列であって，$(k+\ell)\times(k+\ell)$ 行列

$$\mathscr{G} = \begin{pmatrix} E & {}^tB \\ B & C \end{pmatrix},$$

は正定値であるとする．このとき，$\ell\times\ell$ 対称行列 C および $C - B\,{}^tB$ は正定値になる．Q は $\ell\times\ell$-直交行列で $C - B\,{}^tB$ を対角化するもの，すなわち，

$${}^tQ\,(C - B\,{}^tB)\,Q = D \quad (= \text{対角成分が正の対角行列})$$

とすれば，行列

$$\mathscr{Q} = \begin{pmatrix} E & -{}^tB\,Q \\ O & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & -{}^tB \\ O & E' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & O \\ O & Q \end{pmatrix}$$

によって[13]，行列 $\mathscr{G}$ は対角化される．すなわち，

$${}^t\mathscr{Q}\mathscr{G}\,\mathscr{Q} = \begin{pmatrix} E & O \\ -{}^tQ\,B & {}^tQ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & {}^tB \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -{}^tB\,Q \\ O & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & D \end{pmatrix}$$

が成り立つ．

[証明]　まず，$\mathbb{R}^k$ などの内積を $\langle\ ,\ \rangle$ としよう．k などへの依存を明示しなくても誤解の余地はないはずである．$\mathscr{G}$ は正定値なので，ある定数 $c>0$ があって，ξ を任意の k-ベクトル，η を任意の ℓ-ベクトルとして，$(k+\ell)$-ベクトル (ξ,η) に対し，

$$\begin{aligned}\langle(\xi,\eta),\mathscr{G}\,(\xi,\eta)\rangle &= \langle\xi,\xi\rangle + \langle\xi,{}^tB\eta\rangle + \langle\eta,B\xi\rangle + \langle\eta,C\eta\rangle \\ &\geqq c\,(\langle\xi,\xi\rangle + \langle\eta,\eta\rangle)\end{aligned}$$

[13] E' は $\ell\times\ell$-単位行列．

が成り立つ．$\xi = 0$ とすれば，C の正定値性が従う．一方，$\xi = -{}^t B\,\eta$ にとると，

$$\langle \eta, (C - B\,{}^t B)\,\eta \rangle \geqq c\left(\langle {}^t B\,\eta, {}^t B\,\eta \rangle + \langle \eta, \eta \rangle\right) \geqq c\,\langle \eta, \eta \rangle$$

が得られるから，$C - B\,{}^t B$ の正定値性が従う．この関係は，行列の演算では，

$$\begin{pmatrix} E & O \\ -B & E' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & {}^t B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -{}^t B \\ O & E' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & C - B\,{}^t B \end{pmatrix}$$

となる．直交行列 Q の選び方を考慮すれば，補題 2.2 の検証が完了する．

なお，

$$\begin{pmatrix} E & O \\ -B & E' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -{}^t B \\ O & E' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & -{}^t B \\ -B & E' + B\,{}^t B \end{pmatrix}$$

であり，$\mathscr{Q}$ は $(k+\ell)$-直交行列というわけではない．しかし，

$$\begin{pmatrix} E & O \\ -B & E' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & O \\ B & E' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ B & E' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & O \\ -B & E' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & E' \end{pmatrix}$$

（および転置）が成り立つ．これより，次の系が直ちに得られる．

系 2.2　$D^{1/2}$ を正値対角行列 D の平方根，すなわち，対角成分が D の対角成分の平方根からなるものとし，さらに，

$$\mathscr{T} = \begin{pmatrix} E & {}^t B \\ O & D^{1/2}\,{}^t Q \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

とおく．こうすると，

$$\mathscr{G} = {}^t\mathscr{T}\,\mathscr{T} = {}^t\mathscr{T} \begin{pmatrix} E & O \\ O & E' \end{pmatrix} \mathscr{T} \tag{2.16}$$

が成り立つ．

実際，

$$\mathscr{T} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & D^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & O \\ O & {}^t Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & {}^t B \\ O & E' \end{pmatrix}$$

となることに注意をすればよい．

注意 2.5　(2.15) の $\mathscr{T}$ の逆行列は

$$\mathscr{T}^{-1} = \begin{pmatrix} E & -{}^t B\,Q\,D^{-1/2} \\ O & Q\,D^{-1/2} \end{pmatrix}$$

である．

例 2.2　例 2.1 を再考しよう．E, B, C を例 2.1 の行列とする（$k=1$, $\ell=2$）．このとき，

$$
\begin{aligned}
&C - B\,{}^tB \\
&= \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1\rangle_0 + |\Omega| - \langle e_0, x_1\rangle_0^2 & \langle x_1, x_2\rangle_0 - \langle e_0, x_1\rangle_0 \langle e_0, x_2\rangle_0 \\ \langle x_1, x_2\rangle_0 - \langle e_0, x_1\rangle_0 \langle e_0, x_2\rangle_0 & \langle x_2, x_2\rangle_0 + |\Omega| - \langle e_0, x_2\rangle_0^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

である．やや見やすい形に整理するには，

$$
\overline{x}_1 = x_1 - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega y_1\,dy, \quad \overline{x}_2 = x_2 - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega y_2\,dy \tag{2.17}
$$

とおけば

$$
\langle x_i,\, x_j\rangle_0 - \langle e_0,\, x_i\rangle_0\,\langle e_0,\, x_j\rangle_0 = \int_\Omega \overline{x}_i \overline{x}_j\,dx
$$

となることを利用するとよいであろう．すると，

$$
C - B\,{}^tB = \int_\Omega \begin{pmatrix} 1+\overline{x}_1^2 & \overline{x}_1\,\overline{x}_2 \\ \overline{x}_1\,\overline{x}_2 & 1+\overline{x}_2^2 \end{pmatrix} dx
$$

に書き直すことができる．したがって，固有値 $d_\pm$ は

$$
d_\pm = |\Omega| + \frac{1}{2}\int_\Omega (\overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2)dx \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\int_\Omega (\overline{x}_1^2 - \overline{x}_2^2)dx\right)^2 + 4\left(\int_\Omega \overline{x}_1\overline{x}_2\,dx\right)^2}
$$

$$
|\Omega| \leqq d_- \leqq d_+ \leqq |\Omega| + \int_\Omega (\overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2)dx
$$

である．対応する固有ベクトルは

$$
\begin{pmatrix} \int_\Omega \overline{x}_1\overline{x}_2\,dx \\ d_- - |\Omega| - \int_\Omega \overline{x}_1^2\,dx \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{pmatrix} d_+ - |\Omega| - \int_\Omega \overline{x}_2^2 dx \\ \int_\Omega \overline{x}_1\overline{x}_2\,dx \end{pmatrix}
$$

の定数倍である．特に，$d_+ - |\Omega| - \int_\Omega \overline{x}_2^2\,dx = -(d_- - |\Omega| - \int_\Omega \overline{x}_1^2\,dx)$ だから，

$$
\mathcal{X} = \int_\Omega \overline{x}_1\overline{x}_2\,dx, \quad \mathcal{Y} = d_- - |\Omega| - \int_\Omega \overline{x}_1^2\,dx \tag{2.18}
$$

とおき，

$$
Z = \begin{pmatrix} \int_\Omega \overline{x}_1\overline{x}_2\,dx & d_+ - |\Omega| - \int_\Omega \overline{x}_2^2\,dx \\ d_- - |\Omega| - \int_\Omega \overline{x}_1^2\,dx & \int_\Omega \overline{x}_1\overline{x}_2\,dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{X} & -\mathcal{Y} \\ \mathcal{Y} & \mathcal{X} \end{pmatrix}
$$

とおけば，

$$
\det Z = \left(\int_\Omega \overline{x}_1\overline{x}_2\,dx\right)^2 + \left(d_+ - |\Omega| - \int_\Omega \overline{x}_2^2\,dx\right)^2 = \mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2 \geqq 0
$$

$$
Z\,{}^tZ = {}^tZ\,Z = \begin{pmatrix} (\det Z)^2 & 0 \\ 0 & (\det Z)^2 \end{pmatrix}
$$

$$(C - B\,{}^t\!B)\,Z = Z\,D, \quad D = \begin{pmatrix} d_- & 0 \\ 0 & d_+ \end{pmatrix}$$

となる．$\det Z = 0$ となるとき，すなわち

$$\int_\Omega \overline{x}_1 \overline{x}_2\, dx = 0 \quad \text{かつ} \quad \int_\Omega (\overline{x}_1^2 - \overline{x}_2^2)\, dx \leqq 0 \tag{2.19}$$

のときには，すでに対角化済みである：$C - B\,{}^t\!B = D$．(2.19) は領域 Ω に対する要請である．

そこで,（E' を 2 次の単位行列として）

$$Q = \begin{cases} E' & \det Z = 0 \\ \frac{1}{\det Z}\,Z & \det Z \neq 0 \end{cases}$$

とおけば，補題 2.2 の条件を満たす．対応して，行列 $\mathscr{T}$ も作ることができる．$\det Z \neq 0$ ならば,

$$\mathscr{T} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \int_\Omega x_1\, dx & \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \int_\Omega x_2\, dx \\ 0 & \frac{\sqrt{d_-}}{\det Z}\,\mathcal{X} & \frac{\sqrt{d_-}}{\det Z}\,\mathcal{Y} \\ 0 & -\frac{\sqrt{d_+}}{\det Z}\,\mathcal{Y} & \frac{\sqrt{d_+}}{\det Z}\,\mathcal{X} \end{pmatrix}$$

であり，したがって,

$$\mathscr{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \tau_1 & \tau_2 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{d_-}}\,\mathcal{X} & -\frac{1}{\sqrt{d_+}}\,\mathcal{Y} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{d_-}}\,\mathcal{Y} & \frac{1}{\sqrt{d_+}}\,\mathcal{X} \end{pmatrix}$$

である．ただし,

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{\sqrt{d_-\,|\Omega|}} \left[-\int_\Omega (\mathcal{X}\,x_1 + \mathcal{Y}\,x_2)\, dx \right] \\ \tau_2 &= \frac{1}{\sqrt{d_+\,|\Omega|}} \left[-\int_\Omega (-\mathcal{Y}\,x_1 + \mathcal{X}\,x_2) dx \right] \end{aligned} \tag{2.20}$$

とする．(2.13) の類比を

$$\begin{pmatrix} \xi_0'' \\ \xi_1'' \\ \xi_2'' \end{pmatrix} = \mathscr{T} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \eta_0'' \\ \eta_1'' \\ \eta_2'' \end{pmatrix} = \mathscr{T} \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

とすれば，(2.14) の類比は

$$\begin{pmatrix} g_0(x) \\ g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix} = {}^t\mathscr{T}^{-1} \begin{pmatrix} e_0(x) \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

すなわち，

$$
\begin{aligned}
g_0(x) &= e_0(x) \\
g_1(x) &= \tau_1\, e_0(x) + \frac{\mathcal{X}}{\sqrt{d_-}}\, x_1 + \frac{\mathcal{Y}}{\sqrt{d_-}}\, x_2 \\
g_2(x) &= \tau_2\, e_0(x) - \frac{\mathcal{Y}}{\sqrt{d_+}}\, x_1 + \frac{\mathcal{X}}{\sqrt{d_+}}\, x_2
\end{aligned}
$$

である．ここで，重要なことは，${}^t\mathscr{T}^{-1}$ の形から $g_0(x) = e_0(x)$ となることである．例 2.1 の $u_1(x)$ などは

$$
u_1(x) = \xi_0''\, g_0(x) + \xi_1''\, g_1(x) + \xi_2''\, g_2(x)
$$

などと書き表され，$g_0(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ は（$W_2^m(\Omega)$ での）正規直交系になる．

系 2.2 および注意 2.5 によって，一般に，次のことがわかる．

命題 2.1 d-次多項式関数のなす線形空間 $\mathbb{P}^d$ を Sobolev 空間 $W_2^m(\Omega)$ の閉部分空間として把握したとき，$\mathbb{P}^d$ の正規直交基底は，$m \geqq d$ ならば，すべて共通である．また，このとき，$\mathbb{P}^d$ の正規直交基底のうち，$d-1$ 次までの基底関数は $\mathbb{P}^{d-1}$ の正規直交基底となるよう選ぶことができる．

系 2.3 直交射影 $\Pi_d^m : W_2^m(\Omega) \to \mathbb{P}^d$ は $m \geq d$ なる m に依存しない．すなわち，$\ell > m$ であれば，$W_2^\ell(\Omega) \subset W_2^m(\Omega)$ であるが，このとき，

$$
\Pi_d^m|_{W_2^\ell(\Omega)} = \Pi_d^\ell, \quad \ell > m \geqq d \tag{2.22}
$$

となる．

命題 2.1 は，系 2.2 により，ほぼ明らかであろうが，途中の過程を含めて，若干，詳しく説明しよう．

さて，ℓ-次の（n 変数の）同次多項式関数の全体 $\mathbb{P}_0^\ell$ は $N(n,\ell) = \frac{n!}{(n-\ell)!\ell!}$-次元の線形空間であった（注意 2.2）．例えば，単項式関数 x^α, $|\alpha| = \ell$ は $\mathbb{P}_0^\ell$ の基底になる．これらに，例えば，辞書式の順序を入れれば，$\mathbb{P}_0^\ell$ の基底を $b_1^\ell(x), \cdots, b_{N(n,\ell)}^\ell(x)$ と表すことができる[14]．d-次の多項式関数の空間 $\mathbb{P}^d$ は $\mathbb{P}_0^\ell$，$\ell = 0, \cdots, d$，の直和だから，関数

$$
b_1^0(x),\, b_1^1(x),\, \cdots,\, b_n^1(x),\, \cdots,\, b_1^d(x),\, \cdots,\, b_{N(n,d)}^d(x) \tag{2.23}
$$

は $\mathbb{P}^d$ の基底になる． また，$W_2^m(\Omega)$ の元としては，$\|b_j^\ell\|_m = \|b_j^\ell\|_\ell$, $m \geqq \ell$ である．

[14]なお，例 2.1，例 2.2 では，すでに，$e_0(x) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}$ と正規化されているものとして出発しているが，より対称性の高い考察のために，とりあえず，そのことを忘れよう．

$j=\min(k,\ell)$ として，$N(n,k)\times N(n,\ell)$ 行列

$$G_{k,\ell}(\Omega)=\begin{pmatrix} \langle b_1^k,\, b_1^\ell\rangle_j & \cdots & \cdots & \langle b_1^k,\, b_{N(n,\ell)}^\ell\rangle_j \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \\ \langle b_{N(n,k)}^k,\, b_1^\ell\rangle_j & \cdots & \cdots & \langle b_{N(n,k)}^k,\, b_{N(n,\ell)}^\ell\rangle_j \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

を考える．$G_{\ell,k}(\Omega)={}^tG_{k,\ell}(\Omega)$ である．領域 Ω が決まっているときは，$G_{k,\ell}(\Omega)$ を単に $G_{k,\ell}$ とかく．

次に，$N(n+1,d)\times N(n+1,d)$ の行列

$$\mathscr{G}_d(\Omega)=\begin{pmatrix} G_{0,0} & G_{0,1} & \cdots & & \cdots & G_{0,d} \\ G_{1,0} & G_{1,1} & \cdots & & \cdots & G_{1,d} \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ G_{d,0} & G_{d,1} & \cdots & \cdots & & G_{d,d} \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

を考えれば，これは，$\mathbb{P}^d$ の基底どうしの内積から作った正定値の対称行列である．この場合も Ω への参照を省略することがある．

さて，$G_{00}=(|\Omega|)$ である．したがって，E_0'' を $N(n,1)+\cdots+N(n,d)$ 次の単位行列[15]として，

$$\mathscr{S}_0=\begin{pmatrix} |\Omega|^{-1/2} & 0 \\ 0 & E_0'' \end{pmatrix}={}^t\mathscr{S}_0$$

とおくと，

$${}^t\mathscr{S}_0\mathscr{G}_d\mathscr{S}_0=\begin{pmatrix} 1 & G_{0,1}\,|\Omega|^{-1/2} & \cdots & & \cdots & G_{0,d}\,|\Omega|^{-1/2} \\ |\Omega|^{-1/2}\,G_{1,0} & G_{1,1} & \cdots & & \cdots & G_{1,d} \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ |\Omega|^{-1/2}\,G_{d,0} & G_{d,1} & \cdots & \cdots & & G_{d,d} \end{pmatrix}$$

が得られる．この行列のうち，特に，左上の

$$\begin{pmatrix} 1 & G_{0,1}\,|\Omega|^{-1/2} \\ |\Omega|^{-1/2}\,G_{1,0} & G_{1,1} \end{pmatrix}$$

が例 2.1 などで扱ったものに相当する．したがって，$N(n,1)=n$ 次直交行列 Q_1 を正定値対称行列[16] $G_{1,1}-|\Omega|^{-1/2}\,G_{1,0}\,G_{0,1}\,|\Omega|^{-1/2}$ の対角化行列，すな

[15]後述のように，ここでは，$N(n,0)+\cdots+N(n,d)$ 次の単位行列を E，$0\leqq k<d$ に対し，E_k'，E_k'' をそれぞれ $N(n,0)+\cdots+N(n,k)$ 次，$N(n,k+1)+\cdots+N(n,d)$ 次の単位行列とする．すなわち，$E=\begin{pmatrix} E_k' & O \\ O & E_k'' \end{pmatrix}$ である．

[16]ここでは，$|\Omega|^{-1/2}\,G_{1,0}\,G_{0,1}\,|\Omega|^{-1/2}=\Omega|^{-1}\,G_{1,0}\,G_{0,1}$ である．

わち，
$$ {}^t Q_1 \left(G_{1,1} - |\Omega|^{-1/2}\, G_{1,0}\, G_{0,1}\, |\Omega|^{-1/2} \right) Q_1 = D_1 $$
とし，E_1'' を $N(n,2)+\cdots+N(n,d)$ 次の単位行列として，
$$ \mathscr{S}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -G_{0,1}\, Q_1\, D_1^{-1/2} & O \\ O & Q_1\, D_1^{-1/2} & O \\ O & O & E_1'' \end{pmatrix} $$
とおくと，
$$ {}^t\mathscr{S}_1\, {}^t\mathscr{S}_0\, \mathscr{G}_d\, \mathscr{S}_0\, \mathscr{S}_1 = \begin{pmatrix} E_1' & {}^tB_{2,1} & \cdots & {}^tB_{d,1} \\ B_{2,1} & G_{2,2} & \cdots & G_{2,\ell} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{d,1} & G_{d,2} & \cdots & G_{d,d} \end{pmatrix} $$
となる．ここで，E_1' は $N(n,0)+N(n,1)=1+n$ 次の単位行列，$B_{k,1}$ は $N(n,k)\times(1+n)$-行列
$$ B_{k,1} = \left(|\Omega|^{-1/2} G_{k,0},\, -|\Omega|^{-1/2}\, G_{k,0}\, G_{0,1}\, Q_1\, D_1^{-1/2} + G_{k,1}\, Q_1\, D_1^{-1/2} \right) $$
である．

以下，上と同様に，正定値対称行列 $G_{2,2} - B_{2,1}\, {}^tB_{2,1}$ を $N(n,2)$-次直交行列 Q_2 によって
$$ {}^tQ_2\, (G_{2,2} - B_{2,1}\, {}^tB_{2,1})\, Q_2 = D_2 $$
と対角化する．さらに，E_2' を $N(n,0)+N(n,1)+N(n,2)$ 次の単位行列，E_2'' を $N(n,3)+\cdots+N(n,d)$ 次の単位行列とし，
$$ \mathscr{S}_2 = \begin{pmatrix} E_1' & -{}^tB_{2,1}\, Q_2\, D_2^{-1/2} & 0 \\ 0 & Q_2\, D_2^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & E_2'' \end{pmatrix} $$
とおけば，
$$ {}^t\mathscr{S}_2\, {}^t\mathscr{S}_1\, {}^t\mathscr{S}_0\, \mathscr{G}_d\, \mathscr{S}_0\, \mathscr{S}_1\, \mathscr{S}_2 = \begin{pmatrix} E_2' & {}^tB_{3,2} & \cdots & {}^tB_{d,2} \\ B_{3,2} & G_{3,3} & \cdots & G_{3,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{d,2} & G_{d,3} & \cdots & G_{d,d} \end{pmatrix} $$
となる．ここで，$B_{k,2}$ は $N(n,k)\times(N(n,0)+N(n,1)+N(n,2))$-行列
$$ B_{k,2} = \left(B_{k,1},\, -B_{k,1}\, {}^tB_{2,1}\, Q_2\, D_2^{-1/2} + G_{k,2}\, Q_2\, D_2^{-1/2} \right) $$

である．引き続き，同様の操作を繰り返し，$\mathscr{S}_{d-1}$ を

$$ {}^t\mathscr{S}_{d-1}\cdots{}^t\mathscr{S}_0\,\mathscr{G}_d\,\mathscr{S}_0\,\cdots\,\mathscr{S}_{d-1} = \begin{pmatrix} E'_{d-1} & {}^tB_{d,d-1} \\ B_{d,d-1} & G_{d,d} \end{pmatrix} $$

となるように構成する．ここで，E'_{d-1} は $N(n,0)+\cdots+N(n,d-1)$-次の単位行列であり，$B_{d,d-1}$ は $N(n,d)\times(N(n,0)+\cdots+N(n,d-1))$ 次行列で，$G_{d,d}-B_{d,d-1}\,{}^tB_{d,d-1}$ は正定値な $N(n,d)$-次対称行列である．これまでと同様に，$N(n,d)$-次直交行列 Q_d により

$$ {}^tQ_d\,(G_{d,d}-B_{d,d-1}\,{}^tB_{d,d-1})\,Q = D_d $$

と対角化する．D_d の対角成分はすべて正である．最後に，

$$ \mathscr{S}_d = \begin{pmatrix} E'_{d-1} & -{}^tB_{d,d-1}\,Q_d\,D_d^{-1/2} \\ O & Q_d\,D_d^{-1/2} \end{pmatrix} $$

とおくと，

$$ {}^t\mathscr{S}_d\,{}^t\mathscr{S}_{d-1}\,\cdots\,{}^t\mathscr{S}_0\,\mathscr{G}_d\,\mathscr{S}_0\,\cdots\,\mathscr{S}_{d-1}\,\mathscr{S}_d = E \tag{2.26} $$

となる．E は $N(n,0)+\cdots+N(n,d)$ 次の単位行列である．

なお，

$$ \mathscr{S}_0\,\mathscr{S}_1 = \begin{pmatrix} |\Omega|^{-1/2} & -|\Omega|^{-1/2}\,G_{0,1}\,Q_1\,D_1^{-1/2} & 0 \\ 0 & Q_1\,D_1^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & E''_1 \end{pmatrix} $$

であり，さらに，

$$ \mathscr{T}_1 = \begin{pmatrix} |\Omega|^{-1/2} & -|\Omega|^{-1/2}\,G_{0,1}\,Q_1\,D_1^{-1/2} \\ O & Q_1\,D_1^{-1/2} \end{pmatrix} \tag{2.27} $$

として，

$$ \begin{aligned} \mathscr{S}_0\,\mathscr{S}_1\,\mathscr{S}_2 &= \begin{pmatrix} \mathscr{T}_1 & -\mathscr{T}_1\,{}^tB_{2,1}\,Q_2\,D_2^{-1/2} & O \\ O & Q_2\,D_2^{-1/2} & O \\ O & O & E''_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathscr{T}_2 & O \\ O & E''_2 \end{pmatrix}, \\ \mathscr{T}_2 &= \begin{pmatrix} \mathscr{T}_1 & -\mathscr{T}_1\,{}^tB_{2,1}\,Q_2\,D_2^{-1/2} \\ O & Q_2\,D_2^{-1/2} \end{pmatrix} \end{aligned} $$

が得られる．以下，繰り返して，$N(n,0)+\cdots+N(n,\ell)$ 次の上三角行列 $\mathscr{T}_\ell$, $\ell \leqq d$，すなわち

$$\mathscr{T}_\ell = \begin{pmatrix} |\Omega|^{-1/2} & & & * & & \\ & Q_1\,D_1^{-1/2} & & & * & \\ & & Q_2\,D_2^{-1/2} & & * & \\ & O & & & \ddots & * \\ & & & & & Q_\ell\,D_\ell^{-1/2} \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

が得られる．$*$ の部分は，詳細について省略したが逐次計算できる項であり，

$$\mathscr{S}_0\,\mathscr{S}_1\,\cdots\,\mathscr{S}_\ell = \begin{pmatrix} \mathscr{T}_\ell & O \\ O & E''_\ell \end{pmatrix}$$

となる．特に，$\mathscr{S}_0\,\mathscr{S}_1\,\cdots\,\mathscr{S}_d = \mathscr{T}_d$ である．

(2.26) は，${}^t\mathscr{T}_d\,\mathscr{G}_d\,\mathscr{T}_d = E$ と書けるから，

$$\mathscr{G}_d = {}^t\,\mathscr{T}_d^{-1}\,E\,\mathscr{T}_d^{-1} \tag{2.29}$$

と書き直される．また，

$$\mathscr{S}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & G_{0,1} & 0 \\ 0 & D_1^{1/2}\,{}^tQ_1 & 0 \\ & 0 & E''_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathscr{S}_2^{-1} = \begin{pmatrix} E'_1 & {}^tB_{2,1} & O \\ O & D_2^{1/2}\,{}^tQ_2 & O \\ O & O & E''_2 \end{pmatrix}$$

$$\cdots$$

$$\mathscr{S}_d^{-1} = \begin{pmatrix} E'_{d-1} & {}^tB_{d,d-1} \\ O & D_d^{1/2}\,{}^tQ_d \end{pmatrix}$$

$$\mathscr{T}_d^{-1} = \mathscr{S}_d^{-1}\,\cdots\,\mathscr{S}_2^{-1}\,\mathscr{S}_1^{-1}\,\mathscr{S}_0^{-1}$$

である．

さて，(2.29) により，

$$\begin{aligned} &(e_1^0(x), e_1^1(x), \cdots, e_{N(n,1)}^1(x), \cdots, e_1^d(x), \cdots, e_{N(n,d)}^d(x)) \\ &= (b_1^0(x), b_1^1(x), \cdots, b_{N(n,1)}^1(x), \cdots, b_1^d(x), \cdots, b_{N(n,d)}^d(x))\,\mathscr{T}_d^{-1} \end{aligned} \tag{2.30}$$

とおくと，構成から，$0 \leqq \ell < d$ に対し，

$$\begin{aligned} &(e_1^0(x), e_1^1(x), \cdots, e_{N(n,1)}^1(x), \cdots, e_1^\ell(x), \cdots, e_{N(n,\ell)}^\ell(x)) \\ &= (b_1^0(x), b_1^1(x), \cdots, b_{N(n,1)}^1(x), \cdots, b_1^\ell(x), \cdots, b_{N(n,\ell)}^\ell(x))\,\mathscr{T}_\ell^{-1} \end{aligned}$$

も満たされている．以上から，$e_0^1(x)\ \cdots,\ e_{N(n,d)}^d(x)$ は $W_2^m(\Omega)$，$m \geqq d$ における $\mathbb{P}^d$ の正規直交基底であり，しかも，$0 \leqq \ell < d$ に対し，部分系 $e_1^0(x),\ \cdots,\ e_{N(n,\ell)}^\ell(x)$ は $\mathbb{P}^\ell$ の正規直交基底になる．

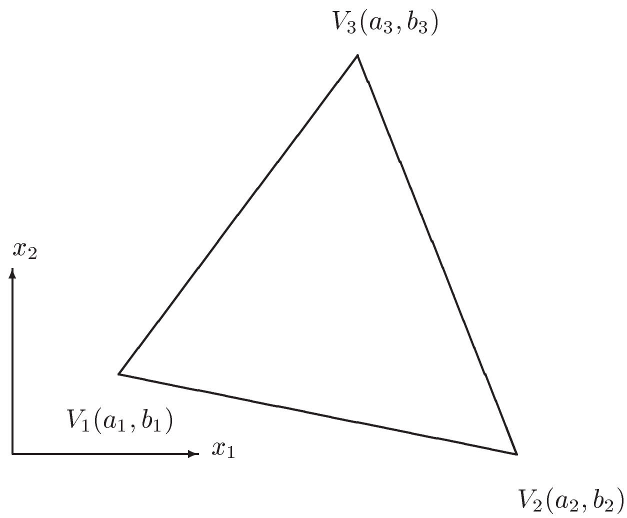

図 1: 図の場合，辺 V_3V_1 は $(x_2 - b_1)(a_3 - a_1) = (b_3 - b_1)(x_1 - a_1)$（ただし，$a_1 < x_1 < a_3$ または $b_1 < x_2 < b_3$），辺 V_1V_2 は $(a_2 - a_1)(x_2 - b_1) = (b_2 - b_1)(x_1 - a_1)$（ただし，$a_1 < x_1 < a_2$ または $b_1 < x_2 < b_2$），辺 V_2V_3 は $(a_3 - a_2)(x_2 - b_2) = (b_3 - b_2)(x_1 - a_2)$（ただし，$a_3 < x_1 < a_2$ または $b_2 < x_2 < b_3$）で与えられる．

注意 2.6　例 2.2 における $\mathscr{T}$ は，すでに，$e_0(x) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}$ としてあるので，$\mathscr{S}_1$ に相当する．

なお，例 2.2 は，まだ，抽象的で見にくいところがある．Ω が三角形領域の場合を掲げておこう．

例 2.3　$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ は，頂点 $V_1(a_1, b_1)$, $V_2(a_2, b_2)$, $V_3(a_3, b_3)$ の三角形領域とする（図 1 の場合は，a_1, $a_3 < a_2$ および b_1, $b_2 < b_3$ である）．面積 $|\Omega|$ は

$$|\Omega| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{a_1b_2 - a_1b_3 + a_2b_3 - a_2b_1 + a_3b_1 - a_3b_2}{2}$$

である．また，

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega x_1\,dx = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, \quad \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega x_2\,dx = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}$$

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega x_1^2\,dx = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1}{6}$$

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega x_2^2\,dx = \frac{b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_1b_2+b_2b_3+b_3b_1}{6}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega x_1x_2\,dx\\=&\frac{2a_1b_1+2a_2b_2+2a_3b_3+a_1b_2+a_2b_1+a_1b_3+a_3b_1+a_3b_2+a_2b_3}{12}\end{aligned}$$

が得られる．したがって，例 2.2 の $\overline{x}_1, \overline{x}_2$ は

$$\overline{x}_1 = x_1 - \frac{a_1+a_2+a_3}{3}, \quad \overline{x}_2 = x_2 - \frac{b_1+b_2+b_3}{3}$$

となる．特に,

$$\mathfrak{a}_1 = a_1 - a_2, \quad \mathfrak{a}_2 = a_2 - a_3, \quad \mathfrak{a}_3 = a_3 - a_1,$$

$$\mathfrak{b}_1 = b_1 - b_2, \quad \mathfrak{b}_2 = b_2 - b_3, \quad \mathfrak{b}_3 = b_3 - b_1$$

として

$$\int_\Omega \overline{x}_1^2\,dx = \frac{|\Omega|}{36}\left\{\mathfrak{a}_1^2+\mathfrak{a}_2^2+\mathfrak{a}_3^2\right\}, \quad \int_\Omega \overline{x}_2^2\,dx = \frac{|\Omega|}{36}\left\{\mathfrak{b}_1^2+\mathfrak{b}_2^2+\mathfrak{b}_3^2\right\}$$

$$\int_\Omega \overline{x}_1\overline{x}_2\,dx = \frac{|\Omega|}{36}\left\{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1+\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2+\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3\right\}$$

が従う．これより，例 2.2 の行列 $C - B\,{}^tB$ は,

$$\begin{aligned}&C - B\,{}^tB\\=&|\Omega|\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\frac{1}{36}\begin{pmatrix}\mathfrak{a}_1^2+\mathfrak{a}_2^2+\mathfrak{a}_3^2 & \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1+\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2+\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3\\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1+\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2+\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3 & \mathfrak{b}_1^2+\mathfrak{b}_2^2+\mathfrak{b}_3^2\end{pmatrix}\right\}\end{aligned}$$

となり，その固有値 $d_\pm$ は,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|\Omega|}d_\pm\\=&1+\frac{1}{36}(\mathfrak{a}_1^2+\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2+\mathfrak{a}_2^2+\mathfrak{b}_1^2+\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2+\mathfrak{b}_2^2)\\&\pm\frac{1}{36}\sqrt{(\mathfrak{a}_1^2+\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2+\mathfrak{a}_2^2+\mathfrak{b}_1^2+\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2+\mathfrak{b}_2^2)^2-3(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2-\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1)^2}\end{aligned}$$

となる．ただし，$\mathfrak{a}_3 = -\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2$，$\mathfrak{b}_3 = -\mathfrak{b}_1 - \mathfrak{b}_2$ を利用した.

したがって，例 2.2 における $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ は

$$\mathcal{X} = \frac{|\Omega|}{36}\left\{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1+\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2+\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3\right\}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Y} = &-\frac{|\Omega|}{36}(\mathfrak{a}_1^2+\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2+\mathfrak{a}_2^2)+\frac{|\Omega|}{36}(\mathfrak{b}_1^2+\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2+\mathfrak{b}_2^2)\\&-\frac{|\Omega|}{36}\sqrt{(\mathfrak{a}_1^2+\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2+\mathfrak{a}_2^2+\mathfrak{b}_1^2+\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2+\mathfrak{b}_2^2)^2-3(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2-\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1)^2}\end{aligned}$$

となる．

注意 2.7　上記の積分計算は Maple[17]を用いて行った．計算のためのプロシデュアを掲げる（ただし，後述のように手抜きがあるが，記号計算を行っている限りは余り深刻ではない.）：

$$
\begin{aligned}
&\mathit{sekibun} := \mathbf{proc}(f,\, x,\, a,\, b)\\
&\mathbf{local}\, g,\, h,\, F;\\
&\quad g := \mathrm{unapply}(\mathrm{int}(f(x_1,\, x_2), x_1 =\\
&\qquad a_1 + (a_3 - a_1) * (x_2 - b_1)/(b_3 - b_1)..\\
&\qquad a_2 + (a_3 - a_2) * (x_2 - b_2)/(b_3 - b_2)),\, x_2);\\
&\quad F_1 := \mathrm{int}(g(x_2),\, x_2 = b_2..b_3)\,;\\
&\quad h := \mathrm{unapply}(\mathrm{int}(f(x_1,\, x_2), x_1 =\\
&\qquad a_1 + (a_3 - a_1) * (x_2 - b_1)/(b_3 - b_1)..\\
&\qquad a_1 + (a_2 - a_1) * (x_2 - b_1)/(b_2 - b_1)),\, x_2);\\
&\quad F_2 := \mathrm{int}(h(x_2),\, x_2 = b_1..b_2)\,;\\
&\quad \mathrm{factor}(\mathrm{simplify}(F_1 + F_2))\\
&\mathbf{end\ proc}
\end{aligned}
$$

ここで，f は変数 $x=(x_1,x_2)$ の関数，$a=(a_1,a_2,a_3)$，$b=(b_1,b_2,b_3)$ はは三角形 Ω の頂点の座標 (a_1,b_1), (a_2,b_2), (a_3,b_3) に対応する．すなわち，このプロシデュアは

$$\int_\Omega f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2$$

を（実際は累次積分の形で，記号的に，必要な場合は数値的に）出力するものである．なお，ここでは，$b_1<b_2<b_3, a_1<a_2<a_3$ を前提にして，積分計算を行っている．本来は，場合分けをすべきところであるが，記号計算の段階では深刻なことは起きないので，手を抜いているという次第である．

例えば，$\int_\Omega x_1\,dx$ を計算するときは，まず，2 変数関数 f_1 を

```
>  f1:=unapply(t,[t,s]);
```

$$\mathit{f1} := (t,\, s) \to t$$

により定義する．$f_1(t,s)$ が $(x_1,x_2)\mapsto x_1$ に相当する関数である．次に，

```
>  sekibun(f1,[t,s],a,b);
```

$$\frac{1}{6}\,(a_3+a_1+a_2)\,(-a_3\,b_2-a_1\,b_3+a_1\,b_2+a_3\,b_1+a_2\,b_3-a_2\,b_1)$$

と計算すればよい．他の積分計算も同様である．

2.4　多項式関数の空間と偏微分

多項式関数の空間 $\mathbb{P}^{m-1}$ は $W_2^m(\Omega)$ の閉部分空間である．偏微分作用素 $\partial_k : W_2^m(\Omega)\to W_2^{m-1}(\Omega)$ は，$\partial_k : \mathbb{P}^{m-1}\to\mathbb{P}^{m-2}$ を誘導する．一方，正射

[17] Maple は Waterloo Maple Inc. の登録商標である．

影 Π^m_{m-1} などと結びつけた交換子

$$\Pi^{m-1}_{m-2}\,\partial_k\,u - \partial_k\,\Pi^m_{m-1}\,u \tag{2.31}$$

は $\mathbb{P}^{m-2}$ 内にどのような写像を定めるであろうか．

これらは，もちろん無関係ではない．実際，(2.5) によると，$N = \dim\mathbb{P}^{m-1}$, $N' = \dim\mathbb{P}^{m-2}$ として，$u \in W_2^m(\Omega)$ に対し

$$\Pi^{m-1}_{m-2}(\partial_k u)(x) = \sum_{i=0}^{N'-1} \langle \partial_k u, e_i\rangle_{m-1}\, e_i(x) \tag{2.32}$$

$$\partial_k\,\Pi^m_{m-1}(u)(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \langle u, e_j\rangle_m\, \partial_k\, e_j(x) \tag{2.33}$$

である．ここで，$e_0, \cdots, e_N$ は (2.6) を満たす $\mathbb{P}^{m-1}$ の $W_2^m(\Omega)$ における正規直交基底である．特に，

$$\partial_k\, e_j = \sum_{\ell=0}^{N-1} a_{k;j,\ell}\, e_\ell \tag{2.34}$$

と表せる．(2.6) により，$e_j \in \mathbb{P}^d$ ならば，$e_\ell \in \mathbb{P}^{d-1}$ に対応するもの以外 $a_{k;j,\ell} = 0$ である．基底 e_j や 係数行列 $D_k = (a_{k;j,\ell})$ の表示法にも工夫が必要であり，これらについては改めて後に論ずる．

(2.32) の係数については，(2.34) を利用すると，

$$\begin{aligned}\langle \partial_k u, e_i\rangle_{m-1} = &\sum_{|\alpha|\leqq m-1} \int_{\partial\Omega} \partial^\alpha u(\eta)\partial^\alpha e_i(\eta)\,\nu_k(\eta)\,d\Sigma_\eta \\ &- \sum_{\ell=0}^{N-1} a_{k;i,\ell}\,\langle u,\, e_\ell\rangle_{m-1}\end{aligned}$$

である．ここで，右辺第 2 項の総和の上端 $N-1$ は $N'' = \dim\mathbb{P}^{m-3}$ として，$N''-1$ で置き換えてよい．したがって，

$$\begin{aligned}&\Pi^{m-1}_{m-2}\;(\partial_k\, u)\;(x) \\ &\quad = \sum_{i=0}^{N'-1}\left\{\sum_{|\alpha|\leqq m-1}\int_{\partial\Omega}\partial^\alpha u(\eta)\partial^\alpha e_i(\eta)\,\nu_k(\eta)\,d\Sigma_\eta\right\} e_i(x) \\ &\qquad - \sum_{i=0}^{N'-1}\left\{\sum_{\ell=0}^{N''-1} a_{k;i,\ell}\,\langle u,\, e_\ell\rangle_{m-1}\right\} e_i(x)\end{aligned} \tag{2.35}$$

となる．一方，(2.33) では，$\partial_k\, e_j \in \mathbb{P}^{m-2}$ であることを考慮して，

$$\partial_k \Pi^m_{m-1}(u)\,(x) = \sum_{\ell=0}^{N'-1}\left\{\sum_{j=0}^{N-1} a_{k;j,\ell}\,\langle u,\, e_j\rangle_m\right\} e_\ell(x) \tag{2.36}$$

となる．

さらに議論を進めるためには，係数 $a_{k;j,\ell}$ の内容に踏み込まなければならない．

ここでは，一般的な検討を行う代わりに，やや自明なようにも見えるが，$n=2$，$m=2$ の場合を例として考察しておこう．

例 2.4　$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ は区分的になめらかな境界を持つ有界領域とし，Sobolev 空間 $W_2^2(\Omega)$ とその閉部分空間 $\mathbb{P}^1$ および $\mathbb{P}^0$ を考える．$\mathbb{P}^1$ の正規直交系を $e_1^0(x)$, $e_1^1(x)$, $e_2^1(x)$ と書く．(2.30) を転置して，

$$\begin{pmatrix} e_1^0(x) \\ e_1^1(x) \\ e_2^1(x) \end{pmatrix} = {}^t\mathscr{T}_1^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

である．なお，ここで，(2.21) によると[18]，

$${}^t\mathscr{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} & 0 & 0 \\ \frac{\tau_1}{\sqrt{|\Omega|}} & \frac{\mathcal{X}}{\sqrt{d_-}} & \frac{\mathcal{Y}}{\sqrt{d_-}} \\ \frac{\tau_2}{\sqrt{|\Omega|}} & -\frac{\mathcal{Y}}{\sqrt{d_+}} & \frac{\mathcal{X}}{\sqrt{d_+}} \end{pmatrix}$$

である．したがって，

$$\partial_1 \begin{pmatrix} e_1^0(x) \\ e_1^1(x) \\ e_2^1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{|\Omega|}}{\sqrt{d_-}}\mathcal{X} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{|\Omega|}}{\sqrt{d_+}}\mathcal{Y} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1^0(x) \\ e_1^1(x) \\ e_2^1(x) \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

となる．ただし，$\mathcal{X}$，$\mathcal{Y}$ は (2.18) で与えたものである．同様に，

$$\partial_2 \begin{pmatrix} e_1^0(x) \\ e_1^1(x) \\ e_2^1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{|\Omega|}}{\sqrt{d_-}}\mathcal{Y} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{|\Omega|}}{\sqrt{d_+}}\mathcal{X} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1^0(x) \\ e_1^1(x) \\ e_2^1(x) \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

となる．

さて，$u \in W_2^2(\Omega)$ ならば，$u \in W_2^1(\Omega)$ である．これらに対し，

$$\Pi_1^2 u\,(x) = \langle u, e_1^0 \rangle_0\, e_1^0(x) + \sum_{j=1}^{2} \langle u, e_j^1 \rangle_1\, e_j^1(x) \in \mathbb{P}^1$$

$$\Pi_0^1\, \partial_1 u\,(x) = \langle \partial_1 u, e_1^0 \rangle_0\, e_1^0(x) \in \mathbb{P}^0$$

[18] $g_0(x) = e_0(x) = e_1^0(x)$，$g_1(x) = e_1^1(x)$, $g_2(x) = e_2^1(x)$ である．

となる．特に，

$$\partial_1 \Pi_1^2 u\,(x) = \sqrt{|\Omega|}\,\left\{ \langle u, e_1^1\rangle_1 \frac{\mathcal{X}}{\sqrt{d_-}} - \langle u, e_2^1\rangle_1 \frac{\mathcal{Y}}{\sqrt{d_+}} \right\} e_1^0(x)$$

$$\partial_2 \Pi_1^2 u\,(x) = \sqrt{|\Omega|}\,\left\{ \langle u, e_1^1\rangle_1 \frac{\mathcal{Y}}{\sqrt{d_-}} + \langle u, e_2^1\rangle_1 \frac{\mathcal{X}}{\sqrt{d_+}} \right\} e_1^0(x)$$

が導かれる．ところが，

$$\langle u,\, e_j^1\rangle_1 = \langle u,\, e_j^1\rangle_0 + \langle \partial_1 u, \partial_1 e_j^1\rangle_0 + \langle \partial_2 u, \partial_2 e_j^1\rangle_0$$

であるが，

$$\begin{aligned}\langle u, e_1^1\rangle_0 &= \frac{\mathcal{X}}{\sqrt{d_-}}\langle u, \overline{x}_1\rangle_0 + \frac{\mathcal{Y}}{\sqrt{d_-}}\langle u, \overline{x}_2\rangle_0\\ \langle u, e_2^1\rangle_0 &= -\frac{\mathcal{Y}}{\sqrt{d_+}}\langle u, \overline{x}_1\rangle_0 + \frac{\mathcal{X}}{\sqrt{d_+}}\langle u, \overline{x}_2\rangle_0\end{aligned}$$

に注意すると，

$$\begin{aligned}\langle u, e_1^1\rangle_1 = &\frac{\mathcal{X}}{\sqrt{d_-}}\{\langle u, \overline{x}_1\rangle_0 + \sqrt{|\Omega|}\,\langle \partial_1 u, e_1^0\rangle_0\}\\ &+ \frac{\mathcal{Y}}{\sqrt{d_-}}\{\langle u, \overline{x}_2\rangle_0 + \sqrt{|\Omega|}\,\langle \partial_2 u, e_1^0\rangle_0\}\\ \langle u, e_2^1\rangle_1 = &-\frac{\mathcal{Y}}{\sqrt{d_+}}\{\langle u, \overline{x}_1\rangle_0 + \sqrt{|\Omega|}\,\langle \partial_1 u, e_1^0\rangle_0\}\\ &+ \frac{\mathcal{X}}{\sqrt{d_+}}\{\langle u, \overline{x}_2\rangle_0 + \sqrt{|\Omega|}\,\langle \partial_2 u, e_1^0\rangle_0\}\end{aligned}$$

になるから，

$$\begin{aligned}&\partial_1 \Pi_1^2\, u\,(x)\\ &= \sqrt{|\Omega|}\left[\left(\frac{\mathcal{X}^2}{d_-} + \frac{\mathcal{Y}^2}{d_+}\right)\left\{\langle u, \overline{x}_1\rangle_0 + \sqrt{|\Omega|}\langle \partial_1 u, e_1^0\rangle_0\right\}\right.\\ &\quad\left. + \left(\frac{\mathcal{X}\mathcal{Y}}{d_-} - \frac{\mathcal{X}\mathcal{Y}}{d_+}\right)\left\{\langle u, \overline{x}_2\rangle_0 + \sqrt{|\Omega|}\langle \partial_2 u, e_1^0\rangle_0\right\}\right] e_1^0(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\partial_2 \Pi_1^2\, u\,(x)\\ &= \sqrt{|\Omega|}\left[\left(\frac{\mathcal{X}\mathcal{Y}}{d_-} - \frac{\mathcal{X}\mathcal{Y}}{d_+}\right)\left\{\langle u, \overline{x}_1\rangle_0 + \sqrt{|\Omega|}\langle \partial_1 u, e_1^0\rangle_0\right\}\right.\\ &\quad\left. + \left(\frac{\mathcal{X}^2}{d_+} + \frac{\mathcal{Y}^2}{d_-}\right)\left\{\langle u, \overline{x}_2\rangle_0 + \sqrt{|\Omega|}\langle \partial_2 u, e_1^0\rangle_0\right\}\right] e_1^0(x)\end{aligned}$$

となる．したがって，例えば，

$$\mathscr{X}_1 = \frac{\mathcal{X}^2}{d_-} + \frac{\mathcal{Y}^2}{d_+}, \quad \mathscr{X}_2 = \frac{\mathcal{X}^2}{d_+} + \frac{\mathcal{Y}^2}{d_-}, \quad \mathscr{Y} = \left(\frac{1}{d_-} - \frac{1}{d_+}\right)\mathcal{X}\,\mathcal{Y}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}\partial_1\Pi_1^2\,u\,(x)-\Pi_0^1\partial_1u\,(x)&=\mathscr{X}_1\langle u,\overline{x}_1\rangle_0+\mathscr{Y}\langle u,\overline{x}_2\rangle_0\\&\quad+\int_{\partial\Omega}u(\eta)\,(\mathscr{X}_1\nu_1(\eta)+\mathscr{Y}\nu_2(\eta)-1)\,d\Sigma_\eta\\\partial_2\Pi_1^2\,u\,(x)-\Pi_0^1\partial_2u\,(x)&=\mathscr{Y}\langle u,\overline{x}_1\rangle_0+\mathscr{X}_2\langle u,\overline{x}_2\rangle_0\\&\quad+\int_{\partial\Omega}u(\eta)\,(\mathscr{Y}\nu_1(\eta)+\mathscr{X}_2\nu_2(\eta)-1)\,d\Sigma_\eta\end{aligned}$$

となる．

例 2.4 は，後述の Sobolev や Bramble-Hilbert の射影との比較上の興味はあるが，結果は余り面白いとは言えない．もう一例計算しておこう．

例 2.5　例 2.4 の状況下で, 直接の計算により,

$$x_1\partial_1\begin{pmatrix}e_1^0\\e_1^1\\e_2^1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0\\\frac{\mathcal{X}}{\sqrt{d_-}\sqrt{|\Omega|}}\int_\Omega x_1dx&\frac{\mathcal{X}^2}{\mathcal{X}^2+\mathcal{Y}^2}&-\frac{\sqrt{d_+}}{\sqrt{d_-}}\frac{\mathcal{X}\mathcal{Y}}{\mathcal{X}^2+\mathcal{Y}^2}\\-\frac{\mathcal{Y}}{\sqrt{d_+}\sqrt{|\Omega|}}\int_\Omega x_1\,dx&-\frac{\sqrt{d_-}}{\sqrt{d_+}}\frac{\mathcal{X}\mathcal{Y}}{\mathcal{X}^2+\mathcal{Y}^2}&\frac{\mathcal{Y}^2}{\mathcal{X}^2+\mathcal{Y}^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1^0\\e_1^1\\e_2^1\end{pmatrix}$$

$$x_2\partial_1\begin{pmatrix}e_1^0\\e_1^1\\e_2^1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0\\\frac{\mathcal{X}}{\sqrt{d_-}\sqrt{|\Omega|}}\int_\Omega x_2dx&\frac{\mathcal{X}\mathcal{Y}}{\mathcal{X}^2+\mathcal{Y}^2}&\frac{\sqrt{d_+}}{\sqrt{d_-}}\frac{\mathcal{X}^2}{\mathcal{X}^2+\mathcal{Y}^2}\\-\frac{\mathcal{Y}}{\sqrt{d_+}\sqrt{|\Omega|}}\int_\Omega x_2\,dx&-\frac{\sqrt{d_-}}{\sqrt{d_+}}\frac{\mathcal{Y}^2}{\mathcal{X}^2+\mathcal{Y}^2}&-\frac{\mathcal{X}\mathcal{Y}}{\mathcal{X}^2+\mathcal{Y}^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1^0\\e_1^1\\e_2^1\end{pmatrix}$$

$$x_1\partial_2\begin{pmatrix}e_1^0\\e_1^1\\e_2^1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0\\\frac{\mathcal{Y}}{\sqrt{d_-}\sqrt{|\Omega|}}\int_\Omega x_1dx&\frac{\mathcal{X}\mathcal{Y}}{\mathcal{X}^2+\mathcal{Y}^2}&-\frac{\sqrt{d_+}}{\sqrt{d_-}}\frac{\mathcal{Y}^2}{\mathcal{X}^2+\mathcal{Y}^2}\\\frac{\mathcal{X}}{\sqrt{d_+}\sqrt{|\Omega|}}\int_\Omega x_1\,dx&\frac{\sqrt{d_-}}{\sqrt{d_+}}\frac{\mathcal{X}^2}{\mathcal{X}^2+\mathcal{Y}^2}&-\frac{\mathcal{X}\mathcal{Y}}{\mathcal{X}^2+\mathcal{Y}^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1^0\\e_1^1\\e_2^1\end{pmatrix}$$

および

$$
\begin{aligned}
& x_2\partial_2 \begin{pmatrix} e_1^0 \\ e_1^1 \\ e_2^1 \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mathcal{Y}}{\sqrt{d_-}\sqrt{|\Omega|}}\int_\Omega x_2 dx & \frac{\mathcal{Y}^2}{\mathcal{X}^2+\mathcal{Y}^2} & \frac{\sqrt{d_+}}{\sqrt{d_-}}\frac{\mathcal{X}\mathcal{Y}}{\mathcal{X}^2+\mathcal{Y}^2} \\ \frac{\mathcal{X}}{\sqrt{d_+}\sqrt{|\Omega|}}\int_\Omega x_2\, dx & \frac{\sqrt{d_-}}{\sqrt{d_+}}\frac{\mathcal{X}\mathcal{Y}}{\mathcal{X}^2+\mathcal{Y}^2} & \frac{\mathcal{X}^2}{\mathcal{X}^2+\mathcal{Y}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1^0 \\ e_1^1 \\ e_2^1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

が得られる．したがって，

$$
(x_1\partial_1 + x_2\partial_2) \begin{pmatrix} e_1^0 \\ e_1^1 \\ e_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\tau_1 & 1 & 0 \\ -\tau_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1^0 \\ e_1^1 \\ e_2^1 \end{pmatrix} \tag{2.39}
$$

および

$$
(x_2\partial_1 - x_1\partial_2) \begin{pmatrix} e_1^0 \\ e_1^1 \\ e_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{d_-}}{\sqrt{d_+}}\tau_2 & 0 & \frac{\sqrt{d_-}}{\sqrt{d_+}} \\ \frac{\sqrt{d_+}}{\sqrt{d_-}}\tau_1 & -\frac{\sqrt{d_+}}{\sqrt{d_-}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1^0 \\ e_1^1 \\ e_2^1 \end{pmatrix} \tag{2.40}
$$

が成り立つ．ただし，τ_1, τ_2 は (2.20) のものとする．

2.5 多項式関数の空間と境界値

$u \in W_2^m(\Omega)$ の $\mathbb{P}^{m-1}$ への直交射影

$$
\Pi_{m-1}^m\, u(x) = \sum_{\ell=0}^{m-1} \sum_{j=1}^{N(n,\ell)} \langle e_j^\ell, u\rangle_\ell\, e_j^\ell(x)
$$

は，x のなめらかな関数であり，したがって，Ω の境界 $\partial\Omega$ がよい性質，例えば，$\mathcal{C}^{m-1}$ 級のなめらかさを持っていれば，$\partial\Omega$ 上への境界値が導関数をこめて存在する．特に，$e_j^\ell(x)$ は多項式であるから，超平面が $\partial\Omega$ に部分集合として含まれているときは，$\Pi_{m-1}^m\, u(x)$ のこの超平面上への境界値も多項式関数になる．例えば，領域 Ω が多面体領域であれば，その境界 $\partial\Omega$ は（区分的に）多面体の面，稜，頂点などからなる（次元 n が関わる）．$\Gamma \subset \partial\Omega$ が面とすれば，Γ は $n-1$ 次元の超平面である．

Γ は $x_j = x_j(t) = \sum_{k=1}^{n-1} c_{jk}\, t_k$，$j = 1, \cdots, n$ と表されるとする．ただし，$t = (t_1, \cdots, t_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$．$p(x) \in \mathbb{P}^{m-1}$ が Γ 上でとる境界値は $\hat{p}(t) = p(x(t))$ であり，$\hat{p}(t)$ は $n-1$ 次元の変数 t の $m-1$ 次以下の多項式

である．そこで，$\mathbb{P}^{m-1}$ の Γ 上での境界値の全体を $\widehat{\mathbb{P}}^{m-1}=\widehat{\mathbb{P}}^{m-1}(\Gamma)$ とかけば，$\widehat{\mathbb{P}}^{m-1}$ は

$$N(n,m-1)=\frac{n\cdot\cdots\cdot(n+m-2)}{(m-1)!}\quad \text{次元}$$

の線形空間となる（注意 2.2 参照）．境界値写像

$$\mathrm{Bd}_\Gamma\ :\mathbb{P}^{m-1}\ni p(x)\mapsto \hat{p}(t)\in\widehat{\mathbb{P}}^{m-1}$$

は，線形写像である．一方，$\mathbb{P}^{m-1}$ は

$$N(n+1,m-1)=\frac{(n+1)\cdot\cdots\cdot(n+m-1)}{(m-1)!}\quad \text{次元}$$

であったから，境界値写像の核は

$$N(n+1,m-1)-N(n,m-1)=N(n+1,m-2)\quad \text{次元}$$

である．例えば，$n=2$ のときは $N(2,m-1)=m$，$N(3,m-1)=\frac{1}{2}\,m\cdot(m+1)$ だから，境界写像の核の次元は $\frac{1}{2}\,(m-1)m$ である．

例 2.6　$\Omega\subset\mathbb{R}^2$ を三角形領域 $0\leqq x_1,\,x_2\leqq 1, 0\leqq x_1+x_2\leqq 1$ とする．Ω の境界は三角形の 3 辺

$$\Gamma_1=\{x_1=t,\,x_2=0;\,0\leqq t\leqq 1\},\quad \Gamma_2=\{x_1=0,\,x_2=1-t;\,0\leqq t\leqq 1\},$$
$$\Gamma_3=\{x_1=1-t,x_2=t;\,0\leqq t\leqq 1\}$$

から成る．Ω 上の 1 次多項式関数の空間 $\mathbb{P}^1$ から各辺上の 1 次多項式関数の空間 $\widehat{\mathbb{P}}^1(\Gamma_1)$，$\widehat{\mathbb{P}}^1(\Gamma_2)$，$\widehat{\mathbb{P}}^1(\Gamma_3)$ へ境界値写像が存在する．すなわち，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Bd}_{\Gamma_1}\ &:\mathbb{P}^1\ni p(x_1,x_2)\mapsto p(t_1,0)\in\widehat{\mathbb{P}}^1(\Gamma_1)\\
\mathrm{Bd}_{\Gamma_2}\ &:\mathbb{P}^1\ni p(x_1,x_2)\mapsto p(0,1-t_2)\in\widehat{\mathbb{P}}^1(\Gamma_2)\\
\mathrm{Bd}_{\Gamma_3}\ &:\mathbb{P}^1\ni p(x_1,x_2)\mapsto p(1-t_3,t_3)\in\widehat{\mathbb{P}}^1(\Gamma_3)
\end{aligned}$$

である．ここで，当然，両立条件

$$\Gamma_j\cap\Gamma_k,\quad j\neq k\quad \text{において}\quad \mathrm{Bd}_{\Gamma_j}(p)=\mathrm{Bd}_{\Gamma_k}(p)$$

が成り立たなければならない．そこで，与えられた

$$p_1(t_1)=X_1t_1+X_0\in\widehat{\mathbb{P}}^1(\Gamma_1),\quad p_2(t_2)=Y_1t_2+Y_0\in\widehat{\mathbb{P}}^1(\Gamma_2),$$
$$p_3(t_3)=Z_1t_3+Z_0\in\widehat{\mathbb{P}}^1(\Gamma_3),$$

に対し，両立条件 $p_1(0)=p_2(1)$，$p_2(0)=p_3(1)$，$p_3(0)=p_1(1)$，すなわち，

$$X_0-Y_1-Y_0=0,\ Y_0-Z_1-Z_0=0,\ Z_0-X_1-X_0=0 \tag{2.41}$$

のもとで，$p(x_1,x_2)=a_{1,0}x_1+a_{0,1}x_2+a_{0,0}\in\mathbb{P}^1$ が

$$\mathrm{Bd}_{\Gamma_j}(p)=p_j,\quad j=1,2,3$$

を満たすように構成されることは，

$$a_{0,0}-X_0=0,\ a_{1,0}-X_1=0,\ a_{0,1}+a_{0,0}-Y_0=0,$$
$$-a_{0,1}-Y_1=0,\ a_{1,0}+a_{0,0}-Z_0=0,\ a_{0,1}-a_{1,0}-Z_1=0$$

が解けることからわかる．実際，第 1，第 2，第 4 式から，$a_{1,0}=X_1$, $a_{0,1}=-Y_1$, $a_{0,0}=X_0$ とすれば，第 3，第 5 式は両立条件に他ならず，第 6 式は両立条件すべてを加え合わせたものになる．

注意 2.8　両立条件 (2.41) の意味するところは，X_0, Y_0, Z_0 を与えると，X_1, Y_1, Z_1 が決まるということである．しかも，このとき，$X_1+Y_1+Z_1=0$ でなければならない．なお，これは，三角形領域 Ω 上の 1 次式 $p\in\mathbb{P}^1$ が三角形の各頂点での値から決定されるということでもあり，有限要素法の Lagrange 法に相当する．

2 次の多項式関数の場合はどうか．

例 2.7　例 2.6 と同様に，Ω 上の 2 次の多項式関数の空間 $\mathbb{P}^2$ から境界上の多項式関数の空間 $\widehat{\mathbb{P}}^2(\Gamma_j)$ への境界写像 Bd_{Γ_j} を考える（$j=1,2,3$)．境界上の 2 次多項式関数

$$p_1(t_1)=X_2t_1^2+X_1t_1+X_0\in\widehat{\mathbb{P}}^2(\Gamma_1),\ p_2(t_2)=Y_2t_2^2+Y_1t_2+Y_0\in\widehat{\mathbb{P}}^2(\Gamma_2),$$
$$p_3(t_3)=Z_2t_3^2+Z_1t_3+Z_0\in\widehat{\mathbb{P}}^2(\Gamma_3),$$

を与える．境界値の両立条件 $p_1(0)=p_2(1)$, $p_1(1)=p_3(0)$, $p_2(0)=p_3(1)$ は

$$X_0=Y_2+Y_1+Y_0,\ Y_0=Z_2+Z_1+Z_0,\ Z_0=X_2+X_1+X_0 \tag{2.42}$$

である．このとき，

$$\mathrm{Bd}_{\Gamma_j}(p)=p_j,\quad j=1,2,3 \tag{2.43}$$

を満たす

$$p(x,y)=a_{2,0}x^2+a_{1,1}xy+a_{0,2}y^2+a_{1,0}x+a_{0,1}y+a_{0,0}\in\mathbb{P}^2$$

を求めよう．境界条件，すなわち，

$$p(t_1,0)=p_1(t_1),\quad p(0,1-t_2)=p_2(t_2),\quad p(1-t_3,t_3)=p_3(t_3)$$

から得られる 9 個の関係式

$$a_{2,0}=X_2,\ a_{1,0}=X_1,\ a_{0,0}=X_0,\ a_{0,2}=Y_2,\ -2a_{0,2}-a_{0,1}=Y_1,$$
$$a_{2,0}+a_{0,1}+a_{0,0}=Y_0,\ a_{2,0}-a_{1,1}+a_{0,2}=Z_2,\ -2a_{2,0}+a_{1,1}-a_{1,0}+a_{0,1}=Z_1,$$
$$a_{2,0}+a_{1,0}+a_{0,0}=Z_0$$

をまず解こう．最初の 5 式から明らかに,

$$a_{2,0} = X_2,\, a_{0,2} = Y_2,\, a_{1,0} = X_1, a_{0,1} = -Y_1 - 2Y_2$$

が導かれる．これらを残りの 4 式に代入し，両立条件 (2.42) を考慮に入れると,

$$a_{1,1} = X_2 + Y_2 - Z_2$$

が得られ，したがって，(2.43) を満たす $p \in \mathbb{P}^2$ が確定する．

注意 2.9　境界 Γ_1 上の 2 次式 $p_1(t_1)$ は係数 X_2, X_1, X_0 を指定することにより決まる．境界の両端および中点での値は,

$$p_1(0) = X_0,\, p_1(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{2}X_1 + X_0,\, p(1) = X_2 + X_1 + X_0$$

だから，これらの値を指定すれば，係数は決まる．$p_2(t_2)$, $p_3(t_3)$ も同様である．両立条件を考慮すると，上の例は，結局，三角形領域 Ω の各頂点，および各辺の中点での値を指定することにより，Ω 上の 2 次多項式が決定されることを意味する．これは，2 次の Lagrange 法である．

注意 2.10　3 次以上の m 次の多項式関数の場合は，両立条件を満たす境界上の m 次多項式（独立な係数は $3m$ 個）からは Ω 上の m 次多項式（係数は $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ 個）の決定ができない．すなわち，$\frac{1}{2}(m+1)(m+2) - 3m = \frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ 次元の自由度がある．3 次以上の Lagrange 法が三角形の頂点及び辺上の点での値のほか三角形内部の点での値の指定を要求するのは，このためである[19]．

次元を上げた場合はどうか．

例 2.8　$\Omega \subset \mathbb{R}^4$ を四面体領域

$$\Omega\,:\,0 \leqq x_1,\, x_2,\, x_3 \leqq 1, \quad 0 \leqq x_1 + x_2 + x_3 \leqq 1,$$

とする．Ω の境界 $\partial\Omega$ は，4 個の面，すなわち，三角形領域

$$\Gamma_0\,:\,x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad \Gamma_1\,:\,x_1 = 0,\, x_2 + x_3 \leqq 1,$$
$$\Gamma_2\,;\,x_2 = 0,\, x_3 + x_1 \leqq 1, \quad \Gamma_3\,:\,x_3 = 0,\, x_1 + x_2 = 0$$

からなる．径数表示をすれば，例えば,

$$\Gamma_0\,:\,x_1 = t_0,\, x_2 = s_0,\, x_3 = 1 - t_0 - s_0 \quad (0 \leqq t_0,\, s_0,\, t_0 + s_0 \leqq 1)$$

[19]実用的な簡便さは別として，$m = 3$ の場合ならば，Green の定理

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2}\right) dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_1}\, dx_2 - \frac{\partial p}{\partial x_2}\, dx_1$$

を利用して多項式の決定ができる．

$$\Gamma_1 : x_1 = 0,\, x_2 = t_1,\, x_3 = s_1 \quad (0 \leqq t_1,\, s_1,\, t_1 + s_1 \leqq 1)$$
$$\Gamma_2 : x_1 = t_2,\, x_2 = 0,\, x_3 = s_2 \quad (0 \leqq t_2,\, s_2,\, t_2 + s_2 \leqq 1)$$
$$\Gamma_3 : x_1 = t_3,\, x_2 = s_3,\, x_3 = 0 \quad (0 \leqq t_3,\, s_3,\, t_3 + s_3 \leqq 1)$$

となる．したがって，四面体の稜では，径数は

$$\Gamma_0 \cap \Gamma_1 : t_0 = 0,\, s_0 = t_1,\, s_1 = 1 - t_1 = 1 - s_0,$$
$$\Gamma_0 \cap \Gamma_2 : s_0 = 0,\, t_0 = t_2,\, s_2 = 1 - t_2 = 1 - t_0,$$
$$\Gamma_0 \cap \Gamma_3 : t_0 = t_3,\, s_0 = s_3 = 1 - t_3 = 1 - t_0,$$
$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 : t_1 = t_2 = 0,\, s_1 = s_2,$$
$$\Gamma_2 \cap \Gamma_3 : t_2 = t_3,\, s_2 = s_3 = 0,$$
$$\Gamma_3 \cap \Gamma_1 : s_1 = t_3 = 0,\, t_1 = s_3$$

となる．各 Γ_j 上に 1 次式 $p_j(t_j, s_j) = X_j t_j + Y_j s_j + Z_j$ （$j = 0, 1, 2, 3$）が与えられたとする．これらの 1 次式の両立条件は，稜 $\Gamma_i \cap \Gamma_j$ において $p_i(t_i, s_i) = p_j(t_j, s_j)$ が成り立つことである．したがって，

$$Y_0 = X_1 - Y_1,\, Z_0 = Y_1 + Z_1,\, X_0 = X_2 - Y_2,\, Z_0 = Y_2 + Z_2$$
$$X_0 - Y_0 = X_3 - Y_3,\, Y_0 + Z_0 = Y_3 + Z_3$$
$$Y_1 = Y_2,\, Z_1 = Z_2,\, X_2 = X_3,\, Z_2 = Z_3,\, X_1 = Y_3,\, Z_1 = Z_3$$

となる．すなわち，X_1, Y_1, Z_1, X_2 を任意にとると，

$$Y_2 = Y_1,\, Z_2 = Z_3 = Z_1,\, X_3 = X_2,$$
$$X_0 = X_2 - Y_1,\, Y_0 = X_1 - Y_1,\, Z_0 = Y_1 + Z_1$$

が得られる．さて，$p(x_1, x_2, x_3) = a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 + d \in \mathbb{P}^1$ が

$$\mathrm{Bd}_{\Gamma_j}(p) = p_j, \quad j = 0, 1, 2, 3$$

を満たすためには，

$$a - c = X_0,\, b - c = Y_0,\, c + d = Z_0,$$
$$b = X_1,\, c = Y_1,\, d = Z_1,\, a = X_2,\, c = Y_2,\, d = Z_2,\, a = X_3,\, b = Y_3,\, d = Z_3$$

が成り立たなければならない．これは両立条件により，確かに成立する．

他方，高階の Sobolev 空間では，境界値として法線微分も併せて考えるのが通例である．しかし，平面内の三角形領域の場合に，境界における境界値関数と法線方向導関数を多項式関数として任意に与えた上での領域内の多項式関数の決定について検討してみた限りでは事態は予想していたより複雑そうである．

3 Bramble-Hilbert 射影のアイデア

歴史的な順序から言えば，Sobolev の射影を考察すべきであるが，その前に，一見簡単そうな Bramble-Hilbert の射影を検討しよう．

3.1 Taylor 展開の平均化

有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は，Ω 内の球 K に関して星型，すなわち，任意の $x \in \Omega$ と任意の $z \in K$ とを結ぶ線分（$[x,z]$ と表そう）が Ω 内にある，すなわち，

$$x \in \Omega, \quad z \in K, \quad \Longrightarrow \quad [x,z] = \{(1-t)\,x + t\,z\,;\, 0 \leqq t \leqq 1\} \subset \Omega$$

が成り立つものとする[20]．なお，後の議論では，Ω 内の極大な球を K として考える．

さて，$u(x)$ がなめらかであれば，$y \in \Omega$ のまわりの Taylor 展開は

$$u(x) = \sum_{|\alpha| \leqq m-1} \frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!}\,\partial^\alpha u\,(y) + R_y(u;x)$$

で与えられる，右辺第 1 項は，m-位の Taylor 多項式

$$T_y^m(u;x) = \sum_{|\alpha| \leqq m-1} \frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!}\,\partial^\alpha u\,(y) \tag{3.1}$$

であり，第 2 項は，m-位の剰余項

$$R_y^m(u;x) = m \sum_{|\alpha| = m} \frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 t^{m-1}\,u^{(\alpha)}(ty + (1-t)x)\,dt \tag{3.2}$$

である．ここで，$u^{(\alpha)}(z) = \partial_x^\alpha u(x)|_{x=z}$ とする．Ω は K に関して星型だから，$y \in K$ ならば，$x \in \Omega$ に対し，$R_y(u;x)$ が定義できる．

注意 3.1 Taylor 多項式をさらに偏微分すると，容易に確かめられるように，$|\beta| < m-1$ に対し，

$$\partial^\beta T_y^m(u;x) = T_y^{m-|\beta|}(\partial^\beta u;x), \quad \partial^\beta R_y^m(u;x) = R_y^{m-|\beta|}(\partial^\beta u;x)$$

が得られる．第 1 式は形式的な演算で直ちに従い，第 2 式は，第 1 式と組み合わせて意味を考えると明らかであるが，(3.2) から形式的な演算で直接導くこともできる．[2] には，この注意により，多項式空間への射影を構成する議論を Sobolev のもとの議論 [6] よりも，以下で展開するように，簡易化できたという主張が見られる（Remark 4.1.19. p.94）．序文で言及したのは，このことである（なお，脚注 5 参照）．

[20] この条件は，[4] では，Ω が凸という条件に改めて論じられている．ただし，議論の本質的な部分は，この場合に帰着させている．星型の領域は凸とは限らないが，必要な評価が領域の形状に依存するのに対し，凸の仮定の下では，領域への依存は次元だけになり，応用上有利な点があるとされる．

さて，u がなめらかでなくても，$u \in W_2^m(\Omega)$ ならば，Taylor 展開を平均化することができる．$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ を台が K と一致し，かつ，$\int_K \varphi(x)dx = 1$ を満たすものとする．このような φ を重み関数と言うことにしよう．

例 3.1　標準的な重み関数は原点を中心とする半径 $R > 0$ の球に台を持つ

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geqq R \\ c_n \exp\left(-\frac{R^2}{R^2-|x|^2}\right), & |x| < R \end{cases}$$

である[21]．ここで，c_n は

$$c_n R^n \omega_{n-1} \int_0^1 \mathrm{e}^{-1/(1-t)}\, t^{n-1}\, dt = 1$$

を満たす定数である（ω_{n-1} は，$(n-1)$-次元単位球面積）．

補題 3.1　$\varphi_0(x)$ を単位球に台を持つ重み関数とする．K が中心 c，半径 $R > 0$ の閉球とすると，$\varphi(x) = R^{-n}\,\varphi_0(\frac{x-c}{R})$ は K に台を持つ重み関数となる．逆に，$\varphi(x)$ が K に台を持つ重み関数ならば，$\varphi_0(x) = R^n\,\varphi(Rx + c)$ は単位球に台を持つ重み関数になる．

注意 3.2　この補題は明らかである．補題の意味は，単位球に台を持つ $\varphi_0(x)$ に標準的な役回りを持たせることによって，中心と半径を指定した閉球に台を持つ重み関数が得られていることの注意であるが，この結果，例えば，

$$\sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)| \leqq C_\alpha\, R^{-n-|\alpha|}, \quad C_\alpha = \max_{|x|\leqq 1} |\partial^\alpha \varphi_0(x)|, \tag{3.3}$$

という評価が得られる．定数 C_α は閉球 K の中心や半径には依存しない[22]．

平均化された Taylor 多項式を

$$\mathcal{Q}\,u(x) = \mathcal{Q}^m_{\varphi,K}\,u(x) = \sum_{|\alpha|\leqq m-1} \int_K \frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!}\, \partial^\alpha u(y)\, \varphi(y)\, dy \tag{3.4}$$

とおく．このとき，

$$\mathcal{R}u(x) = \mathcal{R}^m_{\varphi,K}u(x) = u(x) - \mathcal{Q}\,u(x) = \int_\Omega \varphi(y)\, R^m_y(u;x)\, dy \tag{3.5}$$

は誤差に相当する．なお，弱導関数の定義から，

$$\mathcal{Q}^m_{\varphi,K}\,u(x) = \int_K \sum_{|\alpha|\leqq m-1} (-1)^{|\alpha|}\, \partial^\alpha \left(\frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!}\, \varphi(y)\right) u(y)\, dy \tag{3.6}$$

となる．

[21] このような関数は van der Waerden によって最初に構成されたという話を聞いたことがある．Mathematische Annalen 掲載の論文という話だったので，該当すると思われる年代のものを調べてみたが，まだ確認はできていない．

[22] 一方，$1 \leqq p < +\infty$ に対し，$(\int_K |\partial^\alpha \varphi(x)|^p\, dx)^{1/p} \leqq C_{p,\alpha}\, R^{n/p-n-|\alpha|}$ となる．定数 $C_{p,\alpha}$ は，$C_{p,\alpha} = (\int_{|x|\leqq 1} |\partial^\alpha \varphi_0(x)|^p dx)^{1/p}$ であり，K には依存しない．

注意 3.3　$\mathcal{Q}^m_{\varphi,K}\,u$ の定義だけであれば，$u \in W_2^{m-1}(\Omega)$ で十分である．

補題 3.2　$u \in W_2^m(\Omega)$ に対し，$u = \mathcal{Q}u + \mathcal{R}u$ となる．ここで，$\mathcal{Q}\,u \in \mathbb{P}^{m-1}$ である．さらに，$u \in \mathbb{P}^{m-1}$ ならば $\mathcal{Q}\,u = u$ が成り立つ．したがって，特に，すべての $u \in W_2^m(\Omega)$ に対し，$\mathcal{Q}^2\,u = \mathcal{Q}\,\mathcal{Q}\,u = \mathcal{Q}\,u$ である．

[証明]　(3.4) において，

$$(x-y)^\alpha = \sum_{\beta \le \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}\, x^\beta\, y^{\alpha-\beta}$$

を代入すると

$$\mathcal{Q}\,u(x) = \sum_{|\alpha| \leqq m-1} \sum_{\beta \le \alpha} \frac{x^\beta}{\beta!(\alpha-\beta)!} \int_K \partial^\alpha u(y)\, \left\{y^{\alpha-\beta}\,\varphi(y)\right\}\, dy$$

となり，$\mathcal{Q}\,u \in \mathbb{P}^{m-1}$ が導かれる．また，$u \in \mathbb{P}^{m-1}$ ならば，(3.4) に

$$\sum_{|\alpha| \leqq m} \frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!}\,\partial^\alpha u(y) = u(x)$$

を適用し，$\int_K \varphi(y)\,dy = 1$ に注意すれば，$\mathcal{Q}\,u = u$ がわかる．[証明終]

注意 3.4　$u \in \mathbb{P}^{m-1}$ ならば，$\mathcal{R}u = 0$ である．実際，(3.5) の積分において $R^m_y(u;x) = 0$ である．特に，$u \in W_2^m(\Omega)$ に対し，$\mathcal{R}\mathcal{Q}u = \mathcal{Q}\mathcal{R}u = 0$ ならびに $\mathcal{R}^2 u = \mathcal{R}u$ が成り立つ，

われわれの関心は，誤差 $\mathcal{R}u$ の評価である．当然，u と閉部分空間 $\mathbb{P}^{m-1}$ との距離が関わることが予想される．$\mathcal{Q}\,u$ に対し，u の $\mathbb{P}^{m-1}$ 上への正射影の代替物としての役割を期待するわけである．

ところが，$\mathcal{Q}$ は自己共役ではなく，$W_2^m(\Omega)$ から閉部分空間 $\mathbb{P}^{m-1}$ への射影作用素と見るのは早計である．歪対称部分をみるために，$u, v \in W_2^m(\Omega)$ として，$\langle \mathcal{Q}\,u,\, v\rangle_m - \langle u,\, \mathcal{Q}\,v\rangle_m$ をもっとも簡単な場合，$m=1, m=2$ の場合に検討しよう．$m=1$ の場合は

$$\mathcal{Q}\,u(x) = \int_\Omega u(y)\,\varphi(y)\,dy$$

である．したがって，

$$\langle \mathcal{Q}u,\, v\rangle_1 - \langle u,\, \mathcal{Q}v\rangle_1 = \iint_{\Omega\times\Omega} u(y)\,v(x)\,(\varphi(y) - \varphi(x)\}\,dxdy$$

となる．ゆえに，右辺がすべての $u, v \in W_2^1(\Omega)$ に対して消えることはない．なお，$m=2$ の場合は，

$$\mathcal{Q}u(x) = \int_\Omega u(y)\,\varphi(y)\,dy + \sum_{j=1}^n \int_\Omega (x_j - y_j)\,\partial_j u(y)\,\varphi(y)\,dy$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathcal{Q}\, u,\, v\rangle_2 - \langle u,\, \mathcal{Q}\, v\rangle_2 \\
=& \iint_{\Omega\times\Omega} u(y)\, v(x)\, (\varphi(y) - \varphi(x)\}\, dxdy \\
&+ \iint_{\Omega\times\Omega} \sum_{k=1}^{n} \partial_k u(y)\, \partial_k v(x)\, \{\varphi(y) - \varphi(x)\}\, dxdy \\
&+ \iint_{\Omega\times\Omega} \sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)\{\partial_j u(u)\, v(x)\, \varphi(y) + u(y)\, \partial_j v(x)\, \varphi(x)\} dxdy
\end{aligned}
$$

となる.

3.2　重み関数についての注意

二つの重み関数 φ, φ_1 の差 $\psi = \varphi - \varphi_1$ は, K 内に台を持ち, 平均値は消える： $\int_K \psi(y)\, dy = 0$.

補題 3.3　$\psi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ は $\int \psi(x)\, dx = 0$ を満たすとする. このとき, 適当な $\psi_1(x), \cdots, \psi_n(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し,

$$
\sum_{j=1}^{n} \partial_j \psi_j(x) = \psi(x) \tag{3.7}
$$

が成り立つ.

証明は n に関する帰納法で行おう. $n = 1$ ならば,

$$
\psi_1(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(t)\, dt
$$

とおくと, $\psi_1(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ かつ $\psi_1'(x) = \psi(x)$ が成り立つ[23]. 次に, $n-1$ まで成り立つとする. そこで, $\hat{\psi}(x') = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x', x_n)\, dx_n$ とおく ($x' = (x_1, \cdots, x_{n-1})$). $\hat{\psi}(x') \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ であり, しかも, $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \hat{\psi}(x')\, dx' = 0$ である. したがって,

$$
\sum_{j=1}^{n-1} \partial_j \hat{\psi}_j(x') = \hat{\psi}(x'), \quad \hat{\psi}_1(x'), \cdots, \hat{\psi}_{n-1}(x') \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})
$$

が成り立つ. そこで, $\chi(x_n) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ を, $\int \chi(x_n)\, dx_n = 1$ が満たされるように取ると,

$$
\tilde{\psi}(x) = \psi(x) - \sum_{j=1}^{n-1} \partial_j \hat{\psi}_j(x')\chi(x_n) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)
$$

[23] しかも, 今の場合, このような $\psi_1(x)$ は一意的に定まり, ψ_1 の台は ψ の台の凸苞に含まれる.

かつ $\int \tilde{\psi}(x', x_n)\,dx_n = 0$ である．したがって，

$$\psi_n(x) = \int_{-\infty}^{x_n} \tilde{\psi}(x', t)\,dt,$$

および $\psi_j(x) = \hat{\psi}_j(x')\,\chi(x_n)$,（$j = 1, \cdots, n-1$）とおくと，(3.7) が成り立つ．

注意 3.5　(3.7) の ψ_j は $n = 1$ の場合を除いて一意的に定まるわけではない．

系 3.1　(3.7) において，$\psi(x)$ の台が n-方体 $L = \{\,x\,; |x_j| \leqq L_j,\, j = 1, \cdots, n\}$（$L_j > 0$）に含まれているとする．このとき，各 $\psi_j(x)$ を，台が L に含まれるように選ぶことができる．

系 3.1 は，補題 3.3 の証明を検討すれば直ちにわかるであろう．

しかし，系 3.1 における ψ の台と ψ_j の台の関係についての記述は作用素 Q の解析のためには十分ではない．$\psi(x)$ の台が円板 $D_R = \{\,x\,; |x| \leqq R\}$（$R > 0$）に含まれていると考えるべきときには極座標を利用するのが正しいであろう．若干注意を要する点があるので，まず，$n = 2$ および $n = 3$ の場合を個別に検討する．

補題 3.4　$n = 2$ とする．$\varphi(r, \theta)$ は $r \geqq 0$, $-\infty < \theta < +\infty$ の C^∞ 級の関数で，θ に関しては周期 2π であり[24]，かつ，$r \geqq R > 0$ では消えるものとする．

$$\int_0^{+\infty} rdr \int_0^{2\pi} d\theta\, \varphi(r, \theta) = 0$$

ならば，

$$\frac{1}{r}\,\partial_r\,\psi_0(r, \theta) + \partial_\theta\,\psi_1(r, \theta) = \varphi(r, \theta)$$

が成り立つ．ただし，$\psi_0(r, \theta)$, $\psi_1(r, \theta)$ は r, θ の C^∞ 級関数で，$r \geqq R$ では消えるものである．

実際，まず，$\tilde{\varphi}(\theta) = \int_0^{+\infty} \varphi(r, \theta)\, rdr$ とおくと，$\tilde{\varphi}(\theta)$ は周期 2π のなめらかな関数で，周期上の積分は消える．したがって，

$$\tilde{\psi}(\theta) = \int_0^{\theta} \tilde{\varphi}(t)\,dt$$

は周期 2π のなめらかな関数で，$\tilde{\psi}'(\theta) = \tilde{\varphi}(\theta)$ を満たす．$\chi(r)$ を，$r \geqq 0$ のなめらかな関数で，$r \geqq R$ で消え，さらに $\int_0^{+\infty} \chi(r)\, rdr = 1$ を満たすものとすれば，

$$\int_0^{+\infty} rdr\,\{\varphi(r, \theta) - \chi(r)\,\tilde{\varphi}(\theta)\} = \int_0^{R} rdr\,\{\varphi(r, \theta) - \chi(r)\,\tilde{\varphi}(\theta)\} = 0$$

[24] 本来は，$r > 0$, $0 \leqq \theta < 2\pi$ の関数で，$r \geqq 0$ および $-\infty < \theta < +\infty$ に周期 2π で拡張され，この拡張が C^∞ 級であるものという意味である．

となる．したがって，

$$\psi_0(r,\theta) = \int_0^r \rho d\rho\,\{\varphi(\rho,\theta) - \chi(\rho)\,\tilde{\varphi}(\theta)\}, \quad \psi_1(r,\theta) = \chi(r)\,\tilde{\psi}(\theta)$$

とおけば，これらが求めるものになる．

補題 3.5 $n = 3$ とする．$\varphi(r,\,\theta,\,\phi)$ は $r > 0,\, 0 \leqq \theta < 2\pi,\, 0 < \phi < \pi$ のなめらかな関数で，$r \geqq 0,\, 0 \leqq \phi \leqq \pi$ および $-\infty < \theta < +\infty$ の C^∞ 級関数に拡張され，しかも，拡張は θ に関しては周期 2π とする．このとき[25]，$dx = r^2 dr\,\sin\phi\,d\phi\,d\theta$ であるが，

$$\int_0^{+\infty} r^2 dr \int_0^\pi \sin\phi \int_0^{2\pi} d\theta\ \varphi(r,\,\theta,\,\phi) = 0$$

および $\varphi(r,\theta,\phi) = 0,\, r \geqq R > 0$ が成り立つならば，$r \geqq R$ で消える適当な関数 $\psi_0(r,\theta,\phi)$，$\psi_1(r,\theta,\phi)$，$\psi_2(r,\theta,\phi)$ に対し，

$$\frac{1}{r^2}\partial_r\psi_1(r,\theta,\phi) + \frac{1}{\sin\phi}\partial_\phi\psi_1(r,\theta,\phi) + \partial_\theta\psi_2(r,\theta,\phi) = \varphi(r,\theta,\phi)$$

が成り立つ．

実際，

$$\overline{\varphi}_1(\theta,\phi) = \int_0^{+\infty} \varphi(r,\theta,\phi)\,r^2 dr, \quad \overline{\varphi}_2(\theta) = \int_0^\pi \overline{\varphi}_1(\theta,\phi)\,\sin\phi\,d\phi$$

とおくと，$\overline{\varphi}_2(\theta)$ は周期 2π を持ち，周期上の平均値は消える．したがって，

$$\overline{\psi}_2(\theta) = \int_0^\theta \overline{\varphi}_2(t)\,dt$$

とおくと，$\overline{\psi}_2(\theta)$ は $\partial_\theta\overline{\psi}_2(\theta) = \overline{\varphi}_2(\theta)$ を満たす周期 2π の関数になる．つぎに，$\chi_1(\phi)$ を $\int_0^\pi \chi_1(\phi)\,\sin\phi\,d\phi = 1$ を満たすようにとると，

$$\int_0^\pi \{\overline{\varphi}_1(\theta,\phi) - \overline{\varphi}_2(\theta)\,\chi_1(\phi)\}\,\sin\phi\,d\phi = 0$$

となる．したがって，

$$\overline{\psi}_1(\theta,\phi) = \int_0^\phi \{\overline{\varphi}_1(\theta,s) - \overline{\varphi}_2(\theta)\,\chi_1(s)\}\,\sin\,s\,ds$$

とおけば，$\overline{\psi}_1(\theta,0) = \overline{\psi}_1(\theta,\pi) = 0$ かつ

$$\frac{1}{\sin\phi}\partial_\phi\,\overline{\psi}_1(\theta,\phi) + \partial_\theta\overline{\psi}_2(\theta)\,\chi_1(\phi) = \overline{\varphi}_1(\theta,\phi)$$

[25]球面極座標によれば，$x_1 = r\cos\phi\cos\theta,\, x_2 = r\cos\phi\cos\theta,\, x_3 = r\sin\phi$ ととっていることに相当する．(x_1,x_2,x_3) の関数 $f(x_1,x_2,x_3)$ は $f(r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\cos\theta, r\cos\phi)$ によって，(r,θ,ϕ) の関数になる．

が成り立つ．さらに，$\chi_0(r)$ を $\int_0^{+\infty} \chi_0(r)\, r^2 dr = 1$ にとれば，

$$\int_0^{+\infty} \{\varphi(r,\theta,\phi) - \chi_0(r)\,\overline{\varphi}_1(\theta,\phi)\}\, r^2 dr = 0$$

となるから，

$$\psi_0(r,\theta,\phi) = \int_0^{r} \{\varphi(\rho,\theta,\phi) - \chi_0(\rho)\,\overline{\varphi}_1(\theta,\phi)\}\, \rho^2 d\rho$$

$$\psi_1(r,\theta,\phi) = \chi_0(r)\,\overline{\psi}_1(\theta,\phi), \quad \psi_2(r,\theta,\phi) = \chi_0(r)\,\chi_1(\phi)\,\overline{\psi}_2(\theta)$$

とおく．ここで，特に，$\chi_0(r) = 0,\, r \geqq R,$ を満たすようにとれば，$\psi_0(r,\theta,\phi)$，$\psi_1(r,\theta,\phi)$，$\psi_2(r,\theta,\phi)$ いずれもが $r \geqq R$ で消え，これらが求める関数になる．

補題 3.6　一般の $n \geqq 4$ の場合は，極座標 $r > 0,\, 0 \leqq \theta < 2\pi, 0 < \phi_1, \cdots, \phi_{n-2} < \pi$ を利用する[26]．このとき，$\varphi = \varphi(r,\theta,\phi_1,\cdots,\phi_{n-2})$ が，θ に関し周期 2π であって，

$$\int_0^{+\infty} r^{n-1} dr \int_0^{\pi} \sin^{n-2}\phi_1\, d\phi_1 \cdots \int_0^{\pi} \sin\phi_{n-2}\, d\phi_{n-2} \int_0^{2\pi} d\theta\; \varphi = 0$$

および $\varphi = 0,\, r \geqq R > 0,$ を満足しているなめらかな関数ならば，$r \geqq R > 0$ で消える適当な関数 $\psi_0(r,\theta,\phi_1,\cdots,\phi_{n-2}), \cdots, \psi_{n-1}(r,\theta,\phi_1,\cdots,\phi_{n-2})$ があって，

$$\frac{1}{r^{n-1}}\partial_r \psi_0 + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{\sin^{n-k-1}\phi_k}\partial_{\phi_k}\psi_k + \partial_\theta \psi_{n-1} = \varphi \tag{3.8}$$

が成り立つ．しかも，$\phi_k = 0, \pi$ のとき，$\psi_k = 0$（$k = 1, \cdots, n-2$）となり，すべての ψ_k は θ に関して周期 2π になるようにできる．

実際，$n = 2, n = 3$ の場合と同様である．なお，構成から，$\partial_{\phi_k}\psi_k = (\sin^{n-k-1}\phi_k)\,\varphi_k$，$\partial_r \psi_0 = r^{n-1}\,\varphi_0$ と書けば，$\varphi_0, \cdots, \varphi_{n-2}$ はなめらかになる．

補題 3.7　$\varphi(x), \varphi_1(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ は，いずれも K に台を持ち，平均値 1 の関数とする．$u \in W_2^m(\Omega)$ に対し，

$$\|\mathcal{Q}_{K,\varphi}^m\, u - \mathcal{Q}_{K,\varphi_1}^m\, u\|_m \leqq C \sum_{k=1}^{m} |u|_k$$

が成り立つ．C は u に依存しない定数である．

[26] $x = (x_1, \cdots, x_n)$ を，例えば，

$$x_1 = r\cos\phi_1,\ x_2 = r\sin\phi_1\cos\phi_2,\ x_3 = r\sin\phi_1\sin\phi_2\cos\phi_3, \cdots$$

$$x_{n-1} = r\sin\phi_1\cdots\sin\phi_{n-2}\cos\theta,\ x_n = r\sin\phi_1\cdots\sin\phi_{n-2}\sin\theta$$

と表せる．ヤコビアンは

$$\frac{D(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)}{D(r,\phi_1,\cdots,\phi_{n-2},\theta)} = r^{n-1}\sin^{n-2}\phi_1\cdots\sin^2\phi_{n-3}\sin\phi_{n-2}$$

となる．

3.3 剰余項の評価

(3.5) を思い起こそう.（議論を若干跳ばした上で）詳しく書くと

$$\mathcal{R}u(x) = m \sum_{|\alpha|=m} \int_K \int_0^1 \varphi(y)\,\frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!}\,t^{m-1}\,u^{(\alpha)}(\,t\,y+(1-t)\,x\,)\,dt\,dy \quad (3.5)$$

となる．$\{x\} \cup K$ の凸苞を

$$K_x = \{t\,y + (1-t)\,x\,;\, y \in K,\, 0 \leqq t \leqq 1\} = \bigcup_{y \in K} [x, y] \qquad (3.9)$$

とおく.

命題 3.1 K は中心 c, 半径 R の Ω 内の閉球とする．$x \in \Omega$ とする．$u \in W_2^m(\Omega)$ の m-位の剰余項は

$$|\mathcal{R}u(x)| \leqq \frac{m}{n}\,C\left(1+\frac{|x-c|}{R}\right)^n \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!}\int_{K_x} |x-z|^{m-n}\,|\partial^\alpha u(z)|\,dz \qquad (3.10)$$

を満足する.

注意 3.6 (3.10) の右辺に現れる $\dfrac{|x-c|}{R}$ を評価する．K を Ω に含まれる極大な閉球とし，R をその半径とする．また，明らかに $|x-c| \leqq d_\Omega = \sup_{y,\,z\in\Omega} |y-z|$ である．したがって，$\dfrac{|x-c|}{R} \leqq \dfrac{d_\Omega}{R} = \gamma$ となる．γ は，領域 Ω のずんぐり係数（chunkiness parameter）といわれる.

(3.5) 右辺は本質的に

$$\widehat{K}_x = \{(t,\, t\,y + (1-t)\,x)\,;\, y \in K,\, 0 < t \leqq 1\,\}$$

の上の積分である．ここで，閉球 K の中心が c，半径が $R > 0$ であれば，$z = t\,y + (1-t)\,x$ に対し，$y \in K$ ということは $\left|\dfrac{z-x}{t} + x - c\right| \leqq R$ と同値であり，特に，

$$\left|\frac{z-x}{t}\right| - |x-c| \leqq R \quad \text{すなわち} \quad \frac{|z-x|}{R+|x-c|} \leqq t < 1$$

が成り立ち，$\widehat{K}_x$ は中心 $\hat{x} = (0, x)$，半径 $\sqrt{(R+|x-c|)^2+1}$ の $\mathbb{R}^{n+1}$ の閉球内にある．より詳しくは,

$$\widehat{K}_z \subset [t_0, 1] \times K_x, \quad t_0 = \frac{|z-x|}{R+|x-c|} > 0$$

である.

(3.5) 右辺の積分の処理のために，[2] では，あっさりと，変換 $(t,\, y) \longleftrightarrow (t,\, t\,y + (1-t)\,x)$ を利用している．このとき，(3.5) 右辺に現れる積分は，積分変数を t および $z = t\,y + (1-t)\,x$ として，

$$I_\alpha(x) = \iint_{\widehat{K}_x} \varphi\left(\frac{z-x}{t} + x\right) \frac{(x-z)^\alpha}{\alpha!} t^{-|\alpha|+m-1}\, \partial^\alpha\, u(z)\, t^{-n}\, dtdz$$

となる．したがって，

$$k_\alpha(x,z) = \left(\int_{t_0}^1 |\overline{\varphi}_t(z)|\, t^{-|\alpha|+m-n-1}\, dt\right) \frac{|x-z|^{|\alpha|}}{\alpha!}$$

$$\overline{\varphi}_t(z) = \varphi\left(\frac{z-x}{t} + x\right)$$

とおいて，

$$|I_\alpha(x)| \leqq \int_{K_x} k_\alpha(x,z)\, |\partial^\alpha\, u(z)|\, dz$$

となる．

結局，命題 3.1 は，次の補題に帰着する．

補題 3.8 $|\alpha| = m$ のとき，

$$k_\alpha(x,z) \leqq \frac{1}{n\,\alpha!}\, C\, \left(1 + \frac{|x-c|}{R}\right)^n |x-z|^{m-n}$$

である．

実際，$\sup_z |\overline{\varphi}_t(z)| = \sup_y |\varphi(y)| \leqq C\, R^{-n}$ （(3.3) 参照）に注意すると，

$$\int_{t_0}^1 |\overline{\varphi}_t(z)|\, t^{-n-1}\, dt \leqq C\, R^{-n} \frac{t_0^{-n} - 1}{n} \leqq \frac{1}{n}\, C \frac{(R + |x-c|)^n}{R^n}\, |z-x|^{-n}$$

となる．

注意 3.7 一方，[6] では，同様の状況で，極座標を利用している．同じことのはずであるが，意味への言及という点で [6] に沿ってみる必要もあろう．この点については次節で改めて論ずる．

(3.10) の処理のために古典的な評価を述べる．

補題 3.9 $u(x) \in L^2(\Omega)$ に対し，

$$v(x) = \int_{K_x} |x-z|^{\mu-n}\, u(z)\, dz$$

とおく．$\mu \geqq 1$ ならば，$v(x) \in L^2(\Omega)$ であって，

$$\|v\|_0 \leqq \frac{\omega_{n-1}}{\mu}\, d_\Omega^\mu\, \|u\|_0 \quad (\|\ \|_0 = \|\ \|_{L^2})$$

がなりたつ．ここで，ω_{n-1} は単位球面の表面積，d_Ω は Ω の直径である．

実際，

$$\int_\Omega |v(x)|^2\,dx \leqq \int_\Omega \left(\int_{K_x} |x-z|^{m-n}\,|u(z)|\,dz\right)^2 dx$$

であるが，ここで，Cauchy-Schwarz の不等式により，

$$\left(\int_{K_x} |x-z|^{m-n}\,|u(z)|\,dz\right)^2 \leqq \int_{K_x} |x-z|^{m-n}\,dz \int_{K_x} |x-z|^{m-n}\,|u(z)|^2\,dz$$

が成り立つ．K_x は Ω の部分集合であるが，x を中心とする半径 d_Ω の閉球の部分集合でもある．したがって，

$$\int_{K_x} |x-z|^{m-n}\,dz \leqq \omega_{n-1} \int_0^{d_\Omega} r^{m-1}\,dr = \frac{1}{m}\omega_{n-1}\,d_\Omega^m$$

となる．また，$K_x \subset \Omega$ と Fubini の定理から

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left(\int_{K_x} |x-z|^{m-n}\,|u(z)|^2\,dz\right) dx &\leqq \int_\Omega \left(\int_\Omega |x-z|^{m-n}\,dx\right) |u(z)|^2\,dz \\ &\leqq \frac{1}{m}\,\omega_{n-1}\,d_\Omega^m \int_\Omega |u(z)|^2\,dz\end{aligned}$$

となる．

命題 3.1 と補題 3.9 を組み合わせて，次に掲げる Bramble-Hilbert の定理を得る．

定理 3.1　領域 Ω はある閉球に関して星型，d_Ω を直径，γ をずんぐり係数とする．$u \in W_2^m(\Omega)$ に対し，

$$|u-\mathcal{Q}u|_k \leqq C_k\,(1+\gamma)^n\,d_\Omega^{m-k}\,|u|_m, \quad k=0,\cdots,m-1$$

が成り立つ．C_k は，n, m, k によってのみ定まる定数である．

ここで，$k=0$ の場合は，命題 3.1 と補題 3.9 によって書き改めたものである．$k>0$ に対して $|u-\mathcal{Q}u|_k$ を計算するためには，$|\beta|=k$ として，$\partial^\beta \mathcal{R}^m u$ を計算しなければならない．注意 3.1 を用いると，(3.5) の代わりに

$$\partial^\beta \mathcal{R}u(x) = \int_\Omega \varphi(y)\,R_y^{m-k}(\partial^\beta u; x)\,dy$$

が成り立つことがわかる．したがって，命題 3.1 に相当する不等式は，

$$|\partial^\beta \mathcal{R}u(x)| \leqq \frac{m-k}{n}\,C\,(1+\gamma)^n \sum_{|\alpha|=m-k} \frac{1}{\alpha!}\int_{K_x} |x-z|^{m-k-n}|\partial^\alpha\partial^\beta u(z)|dz$$

となる．この場合に，補題 3.9 を適用して，

$$\|\partial^\beta \mathcal{R}u\|_0 \leqq C_\beta\,(1+\gamma)^n\,d_\Omega^{m-k}\,|u|_m$$

が導かれる．別な表現に書き換えれば定理が得られる．

3.4 剰余項の多項式部分

多項式関数部分空間 $\mathbb{P}^{m-1}$ への $\mathcal{R}u,\ u\in W_2^m(\Omega)$, の正射影 Π_{m-1}^m を計算しよう．このために，(3.5) を書き直す．

まず，(なめらかな) $w(x)$ に対し，$w_t(y,x)=w(ty+(1-t)x)$ とおくと，

$$\partial_y^\beta w_t(y,x)=t^{|\beta|}\,w^{(\beta)}(ty+(1-t)x)$$

となることに注意する．そこで，$u^{[k]}(x)=\partial_k u(x)$ とおき，また，多重指標 α の集合を，部分集合

$$S^{[1]}=\{\alpha\,;\,\alpha_1\geqq 1,\,|\alpha|=m\}$$
$$S^{[k]}=\{\alpha\,;\,\alpha_1=\cdots=\alpha_{k-1}=0,\,\alpha_k\geqq 1,\,|\alpha|=m\}\quad(k=2,\cdots,n)$$

の直和に分解し，さらに，第 k-成分のみが 1 で他が 0 の多重指標を ϵ_k とおくと，

$$\sum_{|\alpha|=m}t^{m-1}\frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!}\,u^{(\alpha)}(ty+(1-t)x)=\sum_{k=1}^n\sum_{\alpha\in S^{[k]}}\frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!}\partial_y^{\alpha-\epsilon_k}u_t^{[k]}(y,x)$$

と変形することができる．一方，$\varphi(y)$ も $(x-y)^\alpha\varphi(y)$ も，台が領域 Ω 内の閉球 K に含まれるなめらかな関数である．したがって，(3.5) の右辺は

$$\begin{aligned}&m\,(-1)^{m-1}\sum_{k=1}^n\sum_{\alpha\in S^{[k]}}\int_\Omega\partial_y^{\alpha-\epsilon_k}\left(\frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!}\varphi(y)\right)\left\{\int_0^1u_t^{[k]}(y,x)\,dt\right\}dy\\&=\sum_{k=1}^n\sum_{\alpha\in S^{[k]}}\sum_{\gamma\leq\beta+\epsilon_k\leq\alpha}c_{\alpha,\beta,\gamma}^{[k]}\,x^\gamma\int_\Omega y^{\beta+\epsilon_k-\gamma}\varphi^{(\beta)}(y)\,\left\{\int_0^1u_t^{[k]}(y,x)\,dt\right\}dy\end{aligned}$$

となる．$\mathcal{R}\,u$ の多項式成分，つまり，$\mathcal{R}\,u$ の $\mathbb{P}^{m-1}$ への正射影を見るには，右辺と $\mathbb{P}^{m-1}$ の正規直交基底 $e_1^0(x),\cdots,e_{N(n,m-1)}^{m-1}(x)$ との（$W_n^m(\Omega)$ における）内積を計算すればよい．

3.5 Bramble-Hilbert のもとの論文について

実は，[1] では Sobolev 空間 $W_p^m(\Omega)$ の元の多項式部分を得るために平均化された Taylor 多項式を用いているわけではない．実際，多項式部分はモーメント成分として得られており（後述の補題 3.10 参照），この段階での領域 Ω の形状に対する要請は有界性以外に特にない．領域に対する条件を強錘性[27]に強めると，$W_p^m(\Omega)$ の閉部分空間 $\mathbb{P}^{m-1}$ による商空間のノルムをこの結果を利用して計算できることが示されており，この結果が定理 3.1 の原型なのであろう．ずんぐり係数は，当然まだ現れておらず，これは後年の有限要素法などの進展に伴って導入されてきたわけである．

[27] strong cone property.

補題 3.10 Ω は有界とする．$W_2^m(\Omega)$ から $\mathbb{P}^{m-1}$ への線形写像 M^m を[28]，

$$\int_\Omega \partial^\alpha(u(x) - M^m u(x))\,dx = 0, \quad |\alpha| \leqq m-1 \tag{3.11}$$

が満足されるように定義できる．

実際，$M^m u(x) = \sum_{|\alpha|\leqq m-1} c_\alpha x^\alpha$ とおくと，$\alpha \leq \beta$, $|\beta| \leqq m-1$，について，(3.11) により，$c_\beta = 0$, $|\beta| = m$, として，

$$c_\alpha = \frac{1}{\alpha!}\int_\Omega \partial^\alpha u(x)\,dx - \sum_{\alpha\leq\beta}\left(\frac{\beta!}{\alpha!\,(\beta-\alpha)!}\int_\Omega x^{\beta-\alpha}\,dx\right) c_\beta$$

により，逐次決定されてしまう．なお，[1] は Morrey[5] を引用して済ませているが，[5] には証明として，m についての帰納法で明らかとあるだけである．

さて，$u(x), v(x) \in W_2^m(\Omega)$ について，$u(x) - v(x) \in \mathbb{P}^{m-1}$ が成り立つとき，両者は同値であるという．同値類の全体，すなわち，商空間には，$W_2^m(\Omega)$ から誘導されたノルムが入り，Banach 空間になる．すなわち，$u \in W_2^m(\Omega)$ の同値類を

$$[u] = \{\, v(x)\,;\, v(x) - u(x) \in \mathbb{P}^{m-1} \,\}$$

として，線形演算を

$$a\,[u_1] = [a\,u_1], \quad [u_1] + [u_2] = [u_1 + u_2], \quad a \in \mathbb{F}, \quad u_1, u_2 \in W_2^m(\Omega)$$

により定義しよう（$\mathbb{F}$ はスカラー体：$\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$）．すると，商空間

$$\mathscr{W}_2^m(\Omega) = \{[u]\,;\, u \in W_2^m(\Omega)\,\}$$

は線形空間になる．さらに，商ノルムを

$$\|[u]\| = \inf\,\{\|v\|_m\,;\, v \in [u]\,\}$$

で定義することにより，$\mathscr{W}_2^m(\Omega)$ は Banach 空間になる．特に．$\mathbb{P}^{m-1}$ は閉部分空間なので，$\mathscr{W}_2^m(\Omega)$ は商ノルムによって Banach 空間になる．[1] で示されていることは，今の状況下では，次のようになる．

命題 3.2 領域 Ω は強錐性を持つとする．このとき，適当な定数 $c > 0$, $C > 0$ があって

$$c\,|u|_m \leqq \|[u]\| \leqq C\,|u|_m, \quad u \in W_2^m(\Omega) \tag{3.12}$$

が成り立つ．

[28] もちろん，$M^m\ : W_p^m(\Omega) \to \mathbb{P}^{m-1}$ でよい．

この意味を調べよう．$W_2^m(\Omega)$ は Hilbert 空間なので，直交分解

$$W_2^m(\Omega) = \mathbb{P}^{m-1} \oplus \left(\mathbb{P}^{m-1}\right)^{\perp}$$

が成り立つ．この場合，$u \in W_2^m(\Omega)$ の直交分解は

$$u = \Pi_{m-1}^m\, u \oplus (1 - \Pi_{m-1}^m)\, u$$

である．同値類としては，$[u] = [(1 - \Pi_{m-1}^m)\, u]$ であり，写像

$$\mathscr{W}_2^m(\Omega) \ni [u] \mapsto (1 - \Pi_{m-1}^m)\, u \in \left(\mathbb{P}^{m-1}\right)^{\perp}$$

により，商空間 $\mathscr{W}_2^m(\Omega)$ と直交補空間 $\left(\mathbb{P}^{m-1}\right)^{\perp}$ とを同一視できる．しかも，

$$\|[u]\| = \|(1 - \Pi_{m-1}^m)\, u\|_m$$

である．Π_{m-1}^m は Hilbert 空間の射影作用素なので，

$$\|(1 - \Pi_{m-1}^m)\, u\|_m^2 = |u|_m^2 + \sum_{k=0}^{m-1} |u - \Pi_{m-1}^m\, u|_k^2$$

である．したがって，(3.12) は基本的に次の評価に帰着していることになる．

補題 3.11 領域 Ω は強錘性を持つとする．$u \in W_2^m(\Omega)$ に対し，

$$|u - \Pi_{m-1}^m\, u|_k \leqq C_k\, |u|_m, \quad 0 \leqq k \leqq m-1 \tag{3.13}$$

が成り立つ．C_k は領域 Ω にのみ依存する定数である．

ただし，[2] は，やや違う補題を利用する．すなわち，

補題 3.12 Ω は強錘性を持つとする．このとき，

$$|u - M^m\, u|_k \leqq C'_k\, d_\Omega^{m-k}\, |u|_m, \quad u \in W_2^m(\Omega)$$

が成り立つ．C'_k は，u や d_Ω には依存しない定数である．

定理 3.1 は，この補題に近いものと思われる．しかし，この補題自体は [5] が引用されているが，[5] の証明は帰謬法によるもので，したがって，Ω がある球に関して星型であることが要求されてはいないが，定数 C'_k について具体的に論ずることもできない．

4 Sobolev 射影のアイデア

Sobolev[6] はある閉球 K に関して星型の領域 Ω で考えている．

$x, y \in \Omega$ とし，x を極とする極座標を考える．$r = |y - x|$，$\omega = \dfrac{y - x}{r}$ とすれば，$y = r\,\omega + x$ は対応する極座標表示である[29]．このとき，x を発し，y を通る半直線は $z = x + t\,\omega,\ 0 \leqq t < +\infty$ と表される．

[29] [6] は x, y をそれぞれ $\overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}$ とかき，ω を $\overrightarrow{l}$ とかく．また，本稿の関数の記法も [6] とは違っている．

4.1　Sobolev の補助関数

Sobolev が $W_p^m(\Omega)$ から多項式空間 $\mathbb{P}^{m-1}$ への射影を構成するために利用した関数 – Sobolev の補助関数を検討しよう．

$\varphi(x)$ は K に台を持つなめらかな重み関数とする．

$$\chi_x(r,\omega) = -\int_r^{+\infty} \varphi(x+t\,\omega)\,t^{n-1}\,dt \tag{4.1}$$

および

$$\psi_x(r,\omega) = \frac{1}{(m-1)!}\,r^{m-1}\,\chi_x(r,\omega) \tag{4.2}$$

を考える．最初の仕事は，これらの関数の意味を理解することである．なお，後述するが，これらの関数は極座標で考える方が自然である．しかし，誤解のおそれがない場合に限るが，$y = x + r\,\omega$ として，$\chi_x(r,\omega)$, $\psi_x(r,\omega)$ を，それぞれ，$\chi_x(y)$, $\psi_x(y)$ と表すことがある．

補題 4.1　K_x は (3.9) のものとする．$y \notin K_x$ ならば $\chi_x(y) = 0$ である．

実際，$y \notin K_x$ ならば，(4.1) において $x + t\,\omega \notin K_x$, $t > r = |y-x|$，であり，特に，被積分関数は消えているからである．

系 4.1　C を (3.3) に現れる定数 $C_{(0,\cdots,0)}$，Ω のずんぐり係数を γ とすると，

$$|\chi_x(r,\omega)| \leqq \frac{1}{n}C\left(1+\frac{|x-c|}{R}\right)^n \leqq \frac{1}{n}C(1+\gamma)^n \tag{4.3}$$

が成り立つ．

[証明]　特に，$x + t\,\omega \in K$ が成り立つような t の上限を $r_{x,\omega}$ とおく．すなわち，K は中心 c，半径 R の閉球として，ベクトル $c-x$ と $y-x$ とがなす角が $\theta_{y,x}$ ならば，

$$r_{x,\omega} = \sup\{t\,;\,|x-c|^2 + 2t\,|x-c|\,\cos\theta_{y,x} + t^2 \leqq R^2\} \leqq +\infty$$

である[30]．$t \geqq r_{x,\omega}$ ならば $\varphi(x+t\omega) = 0$ である．したがって，$r \geqq r_{x,\omega}$ のとき，$\chi_x(r,\omega) = 0$ となる．しかも，$r_{x,\omega} < +\infty$ となる ω について，$r_{x,\omega}$ の上限は

$$\sup_{\substack{\omega \\ r_{x,\omega}<+\infty}} r_{x,\omega} = R + |x-c|$$

となる．一方，$r_{x,\omega} = +\infty$ ならば，$\chi_x(r,\omega) = 0$ となることに注意すれば，(4.3) が従う．[証明終]

[30] $\sup\,\emptyset = +\infty$ とする．

さて，偏微分作用素

$$\partial_r = \omega \cdot \partial = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k - x_k}{|y-x|} \partial_{y_k}$$

を $\chi_x(y)$ に繰り返し施そう．念のために，次の関係に注意しておく．

補題 4.2 $k = 1, 2, \cdots$ に対し，

$$\partial_r^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \frac{(y-x)^\alpha}{|y-x|^k} \partial_y^\alpha = \frac{k!}{r^k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{(y-x)^\alpha}{\alpha!} \partial_y^\alpha$$

が成り立つ．

実際，k に関する帰納法で

$$\partial_r^k = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \frac{(y_{i_1} - x_{i_1}) \cdots (y_{i_k} - x_{i_k})}{|y-x|^k} \partial_{y_{i_1}} \cdots \partial_{y_{i_k}}$$

が示される．多項定理（後述）で書き直せばよい．

まず，

$$\partial_r \, \chi_x(r,\omega) = \varphi(x + r\,\omega)\, r^{n-1} = \varphi(y)\, |y-x|^{n-1}$$

であり，$j \geqq 2$ に対しては

$$\begin{aligned}
\partial_r^j \, \chi_x(r,\omega) &= \partial_r^{j-1} \big(\varphi(y)\, r^{n-1}\big) \\
&= \sum_{i=0}^{\min(j-1,n-1)} \frac{(j-1)!\,(n-1)!}{i!\,(j-1-i)!\,(n-1-i)!}\, r^{n-1-i}\, \partial_r^{j-1-i} \varphi(y) \\
&= r^{n-j} \sum_{i=0}^{\min(j-1,n-1)} \frac{(j-1)!\,(n-1)!}{i!\,(n-1-i)!} \sum_{|\alpha|=j-1-i} \frac{(y-x)^\alpha}{\alpha!} \partial_y^\alpha \varphi(y)
\end{aligned}$$

となる．なお，これから，系 4.1 と同様に次の評価が得られる．

系 4.2 $j = 0, 1, \cdots$ に対し，

$$|\partial_r^j \chi_x(r,\omega)| \leqq \frac{1}{r^j}\, C_j\, (1+\gamma)^{n+j} \tag{4.4}$$

が成り立つ．

実際，まず，(3.3) と系 4.1 の証明から

$$|\partial_r \chi_x(r,\omega)| = \frac{1}{r}\, |\varphi(x + r\,\omega)|\, r^n \leqq \frac{C_1}{r}\, R^{-n}\, r_{x,\omega}^n \leqq \frac{C}{r}\, (1+\gamma)^n$$

である．定数 $C_1 = C_{(0,\cdots,0)}$ である．つぎに，(3.3) により，$r_{x,\omega} < +\infty$ のとき，

$$|\partial_r^j \, \chi_x(r,\omega)| \leqq \frac{1}{r^j} \sum_{|\alpha| \leqq j-1} C_{\alpha,j}\, R^{-n-|\alpha|}\, r_{x,\omega}^{n+|\alpha|}$$

となる．ここで，$C_{\alpha,j}$ は適当な定数である．(4.4) は，これより直ちに従う．

さて，さらに，$l=0,\cdots,m-1$ に対し，

$$\begin{aligned}\partial_r^l\,\psi_x(r,\omega) &= \sum_{j=0}^{l}\frac{l!}{(l-j)!j!}\partial_r^{l-j}\left(\frac{r^{m-1}}{(m-1)!}\right)\partial_r^j\chi_x(r,\omega)\\ &= \sum_{j=0}^{l}\frac{l!}{(l-j)!j!(m-1-l+j)!}\,r^{m-1-l+j}\,\partial_r^j\chi_x(r,\omega)\end{aligned}$$

となり[31]，特に，

$$\partial_r^{m-1}\,\psi_x(r,\omega) = \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(m-1)!}{(m-1-j)!(j!)^2}\,r^j\,\partial_r^j\chi_x(r,\omega)$$

となる．また，

$$\begin{aligned}\partial_r^m\psi_x(r,\omega) &= \sum_{j=1}^{m}\frac{m!}{(m-j)!j!}\partial_r^{m-j}\left(\frac{r^{m-1}}{(m-1)!}\right)\partial_r^{j-1}\Big(r^{n-1}\varphi(y)\Big)\\ &= r^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{min(j-1,n-1)}\sum_{|\alpha|=j-1-i}C_{m,j;n,i}\,\frac{(y-x)^\alpha}{\alpha!}\partial_y^\alpha\varphi(y)\end{aligned}\tag{4.5}$$

となる．ただし，

$$C_{m,j;n,i} = \frac{m!}{(m-j)!\,j!}\frac{(n-1)!}{(n-1-i)!\,i!}$$

とする．

以上の議論から次の 2 補題が従う．これらが，恐らく Sobolev がもっとも留意した関係式であろうと思われる．

補題 4.3　$r=0$（すなわち $y=x$）において

$$\partial_r^l\,\psi_x(r,\omega)\big|_{r=0} = 0,\quad l=0,\cdots,m-2$$

および

$$\partial_r^{m-1}\,\psi_x(r,\omega)\big|_{r=0} = \chi_x(+0,\omega) = -\int_0^{+\infty}\varphi(x+t\,\omega)\,t^{n-1}\,dt,$$

が成り立つ．

補題 4.4　適当な $\zeta_\beta(y)$, $|\beta|\leqq m-1$ があって，

$$\partial_r^m\psi_x(r,\omega) = r^{n-1}\sum_{|\beta|\leqq m-1}\zeta_\beta(y)\,x^\beta,\quad y=x+r\,\omega$$

と表される．

[31] もちろん，$\partial_r^j\,\chi_x(r,\omega)$ を代入して計算を続けることができる．

実際，(4.5) に多項定理

$$(y-x)^\alpha = \sum_{\beta\le\alpha} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!\,\beta!}(-1)^{|\beta|}\, y^{\alpha-\beta}\, x^\beta$$

を代入して整理すれば，

$$\zeta_\beta(y) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{\min(n-1,j-1)} \sum_{\substack{|\alpha|=j-1-i\\ \alpha\ge\beta}} C_{m,j;n,i} \frac{(-1)^{|\beta|}}{(\alpha-\beta)!\,\beta!}\, y^{\alpha-\beta}\, \partial_y^\alpha \varphi(y)$$

となる．

4.2 Sobolev の表現定理

次の定理が，補題 3.2 の原型に相当する Sobolev の表現定理である．

定理 4.1 $u\in W_2^m(\Omega)$ とする[32]．$x\in\Omega$ とする．このとき，

$$u(x) = \Pi_1 u(x) + \Pi_2 u(x), \quad u\in W_2^m(\Omega), \tag{4.6}$$

と表される[33]．ただし，

$$\Pi_1 u(x) = \int_{K_x} u(y)\, \partial_r^m\, \psi_x(y)\, \frac{1}{|x-y|^{n-1}}\, dy \tag{4.7}$$

$$\Pi_2 u(x) = (-1)^{m-1} \int_{K_x} \psi_x(y)\, \partial_r^m\, u(y)\, \frac{1}{|x-y|^{n-1}}\, dy \tag{4.8}$$

である．$\Pi_1 u(x)$ は $m-1$ 次の多項式（$\Pi_1 u\in\mathbb{P}^{m-1}$）となり，特に，

$$u\in\mathbb{P}^{m-1} \quad\Longrightarrow\quad \Pi_1 u(x) = u(x) \tag{4.9}$$

が成り立つ．

注意 4.1 (4.7) (4.8) 右辺の積分範囲は Ω としてもよい．$\psi_x(y)$ の台の条件があるからである．

定理 4.1 の証明をしよう．$u\in W_2^m(\Omega)$ に対し，

$$U_x(r,\omega) = \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l\, \partial_r^l u(y)\, \partial_r^{m-1-l} \psi_x(r,\omega), \quad y = x + r\,\omega,$$

とおく．補題 4.1，補題 4.3 により，$U_x(+\infty,\omega)=0$，および

$$U_x(0+,\omega) = -\varphi(x)\,\chi_x(0+,\omega) = -u(x)\int_0^\infty \varphi(x+t\omega)\, t^{n-1}\, dt$$

[32] $W_p^m(\Omega)$, $1\le p<+\infty$, としておいて十分である．
[33] Π_1, Π_2 の記法は [7] に従う．[6] では Π_2 を Π_1^* と表している．以下に示すように，主要項は $\Pi_1 u$ であり，$\Pi_2 u$ は剰余項である．

である．一方，構成から，

$$\partial_r U_x(r,\omega) = u(y)\,\partial_r^m \psi_x(r,\omega) + (-1)^{m-1}\partial_r^m u(y)\,\psi_x(r,\omega)$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned} &u(x)\int_0^\infty \varphi(x+r\omega)\,r^{n-1}\,dr \\ &= \int_0^\infty \left[u(x+r\,\omega)\,\partial_r^m\psi_x(r,\omega) + (-1)^{m-1}\partial_r^m u(x+r\,\omega)\,\psi_x(r,\omega)\right]\,dr \end{aligned}$$

である．両辺をさらに（ω について）球面上で積分し，$dy = r^{n-1}dr\,dS_\omega$ に注意すれば，示すべき等式 (4.6) (4.7) (4.8) が得られる．

$\Pi_1 u(x)$ が多項式になることを示すには，補題 4.4 を用いればよい．(4.7) と組み合わせて，

$$\Pi_1 u(x) = \sum_{\beta|\leqq m-1}\left(\int_\Omega \zeta_\beta(y)\,u(y)\,dy\right)\,x^\beta \in \mathbb{P}^{m-1}$$

となるからである．$u \in \mathbb{P}^{m-1}$ ならば $\Pi_2 u = 0$ となるから，(4.9) の成立は明らかである．

[6] にしたがって，$\Pi_2 u$ を書き直そう．補題 4.2（を弱偏微分に適用したもの）により，

$$\partial_r^m u(x+r\,\omega) = \frac{m!}{|y-x|^m}\sum_{|\alpha|=m}\frac{(y-x)^\alpha}{\alpha!}\,\partial_y^\alpha u(y), \quad y = x + r\,\omega$$

だから，(4.8) 右辺の被積分関数は

$$\begin{aligned} &\psi_x(y)\frac{m!}{r^m}\sum_{|\alpha|=m}\frac{(y-x)^\alpha}{\alpha!}\,\partial_y^\alpha u(y)\,\frac{1}{r^{n-1}} \\ &= \frac{1}{r^{n-m}}\sum_{|\alpha|=m}\left(\frac{m}{\alpha!}\,\omega^\alpha\,\chi_x(r,\omega)\right)\,\partial_y^\alpha u(y) \end{aligned}$$

となる．ここで，[6] に倣って，

$$w_{x,\alpha}(y) = \frac{m}{\alpha!}\,\omega^\alpha\,\chi_x(r,\omega), \quad y = x + r\,\omega \tag{4.10}$$

とおけば，

$$\Pi_2 u(x) = (-1)^{m-1}\int_{K_x}\frac{1}{|x-y|^{n-m}}\sum_{|\alpha|=m} w_{x,\alpha}(y)\,\partial_y^\alpha u(y)\,dy \tag{4.11}$$

となる．

Sobolev[6] は，Bramble-Hilbert の定理（定理 3.1）に相当する評価を明示的に導いているわけではないが，しかし，$\Pi_2 u$ も，ずんぐり係数を含む定数の形が若干変わるだけの同様の評価を満たす．

定理 4.2　領域 Ω はある閉球に関して星型，d_Ω を直径，γ をずんぐり係数とする．$u \in W_2^m(\Omega)$ に対し，

$$|\Pi_2\, u|_k \leqq C'_k\,(1+\gamma)^{n+k}\, d_\Omega^{m-k}\, |u|_m, \quad k = 0, \cdots, m-1$$

が成り立つ．C'_k は，n, m, k によってのみ定まる定数である．

実際，$|\beta| = k$ として，

$$\partial_x^\beta\, \Pi_2\, u(x) = (-1)^{m-1} \int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} \partial_x^\beta \left\{ \frac{1}{|x-y|^{n-m}}\, w_{x,\alpha}(y) \right\} \partial_y^\alpha u(y)\, dy$$

とかける．ここで，(4.10) と系 4.1，系 4.2 により，

$$\left| \sum_{|\alpha|=m} \partial_x^\beta \left\{ \frac{1}{|x-y|^{n-m}}\, w_{x,\alpha}(y) \right\} \right| \leqq \frac{C_\beta\,(1+\gamma)^{n+k}}{|x-y|^{n-m+k}}$$

が従う．したがって，補題 3.9 を適用すれば，定理 4.2 の証明は終わる．

5　補間作用素について

5.1　有限要素

有界領域 $\Delta \subset \mathbb{R}^n$，$\Delta$ 上の関数のなす有限次元の線形空間 $\mathscr{P}$ および $\mathscr{P}$ の双対空間 $\mathscr{N}$ からなる三つ組　$(\Delta, \mathscr{P}, \mathscr{N})$ を有限要素という．また，Δ を要素域，$\mathscr{P}$ の元を形状関数，$\mathscr{N}$ の元を節点関数という．これらは，基本的に Ciarlet のアイデアに従って整理したものである（[3], [2]）．ここでは $\mathscr{P}$ を多項式関数の空間，$\mathscr{P} = \mathbb{P}^{m-1}$ とし，その双対空間 $\mathscr{N}$ の元は適当な Sobolev 空間上の有界線形汎関数と考える．実際，例えば，$\mathbb{P}^{m-1} \subset W_2^\ell(\Delta)$, $\ell = 0, 1, 2, \cdots$ と考えると，$\mathscr{N}$ の元は Hahn-Banach の拡張定理により，$W_2^\ell(\Delta)$ 上の有界線形汎関数に拡張される．しかし，ここには微妙な問題がある．

$p(x) \in \mathbb{P}^{m-1}$ ならば

$$p(x) = \sum_{|\alpha| \leqq m-1} a_\alpha\, x^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathbb{F}$$

である．したがって，

$$\frac{1}{C_{\Delta,\ell}}\, \|p\|_{W_2^\ell(\Delta)} \leqq \sum_{|\alpha| \leqq m-1} |a_\alpha| \leqq C_{\Delta,\ell}\, \|p\|_{W_2^\ell(\Delta)} \tag{5.1}$$

となる定数 $C_{\Delta,\ell} > 0$ がある．また，$\nu \in \mathscr{N}$ は

$$|\nu(p)| \leqq C_\nu \sum_{|\alpha| \leqq m-1} |a_\alpha| \leqq C_\nu\, C_{\Delta,\ell}\, \|p\|_{W_2^\ell(\Delta)}$$

を満たす．したがって，ν を $W_2^\ell(\Delta)$ 上の有界線形汎関数として，ノルムが $C_\nu\, C_{\Delta,\ell}$ を超えないように拡張することができる．拡張された汎関数を表すために ν を流用してよいのであるが，ℓ を明示する必要があるときは，$\nu^{(\ell)}$ と書こう．

注意 5.1　$p \in \mathbb{P}^{m-1}$ ならば

$$\|p\|_{W_2^\ell(\Delta)} = \|p\|_{W_2^{m-1}(\Delta)}, \quad \ell \geqq m-1$$

である．

$m-1$ 次までの多項式関数の空間 $\mathbb{P}^{m-1} \subset W_2^\ell(\Delta)$ の（必ずしも正規直交性を持たない）基底を

$$b_1^0(x),\, b_1^1(x),\, \cdots,\, b_n^1(x),\, \cdots,\, b_1^{m-1}(x),\, \cdots,\, b_{N(n,m-1)}^{m-1}(x)$$

とする（(2.23)．$d = m-1$）．一方，$\mathscr{N}$ の基底

$$\nu_1^0(x),\, \nu_1^1(x),\, \cdots,\, \nu_n^1(x),\, \cdots,\, \nu_1^{m-1}(x),\, \cdots,\, \nu_{N(n,m-1)}^{m-1}(x)$$

を双対基底，すなわち，

$$\nu_i^j(b_{i'}^{j'}) = \begin{cases} 1, & i = i',\ j = j' \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

を満たすものとする．これらを $W_2^\ell(\Delta)$ 上の汎関数に拡張したものも（特に ℓ を明示せずに）同じ記号で表すならば，写像

$$\mathscr{J}\ :\ W_2^\ell(\Delta) \ni u(x) \mapsto \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=1}^{N(n,d)} \nu_i^j(u)\, b_i^j(x) \in \mathbb{P}^{m-1} \tag{5.2}$$

が定義できる．$p \in \mathbb{P}^{m-1}$ ならば，$\mathscr{J}(p) = p$ である．

注意 5.2　実際の有限要素法用例では，$\mathscr{N}$ の基底に相当するもの，節点変数，が先に得られ，それらを双対基底とするような $\mathbb{P}^{m-1}$ の基底が求められると考えるべきことが多い．特に，Sobolev の埋蔵定理により，$\ell > \frac{n}{2} + q$ ならば，$\nu(u)$ を $\partial\Delta$ 上の点での u の q 階までの偏導関数の値を与えるように選ぶことができる．この場合は，各 ν は，すでに，$W_2^\ell(\Delta)$ 上の有界線形汎関数である．

$\mathscr{J}$ と $W_2^\ell(\Delta)$ から $\mathbb{P}^{m-1}$ への正射影 Π_{m-1}^ℓ との関係を見ておこう．

補題 5.1　$\ell \geqq m-1$ とする．

$$\|\mathscr{J} u - \Pi_{m-1}^\ell u\|_{m-1} \leqq C\, \|u - \Pi_{m-1}^\ell u\|_\ell, \quad u \in W_2^\ell(\Delta) \tag{5.3}$$

が成り立つ（C は u に依らない正の定数である）．

扱いやすくするために，$\mathbb{P}^{m-1}$ の基底を $b_1(x), \cdots, b_N(x)$ と書き，対応する $\mathscr{N}$ の双対基底を $\nu_1, \cdots, \nu_N$ と書こう．正射影と比較しやすくするために，$\mathbb{P}^{m-1}$ の（$W_2^\ell(\Delta)$ の内積に関する）正規直交基底を $e_1(x), \cdots, e_N(x)$ とする．したがって，基底変換

$$T = (T_{ij}), \quad e_i(x) = \sum_{j=1}^{N} T_{ij}\, b_j(x), \quad i = 1, \cdots, N$$

を用いれば，$\nu_k(e_i) = T_{ik}$ により

$$\mu_j = \sum_{k=1}^{N} S_{jk}\, \nu_k, \quad {}^tT^{-1} = (S_{jk})$$

は $e_1(x), \cdots, e_N(x)$ の双対基底である．一方,（Hahn-Banach の定理により）$\nu_k \in \mathscr{N}$ を $W_2^\ell(\Delta)$ 上の有界線形汎関数に拡張したものに Riesz-Fréchet の定理を適用すると，各 $\nu_k \in \mathscr{N}$ に対応して，$v_k \in W_2^\ell(\Delta)$ が選ばれて

$$\nu_k(u) = \langle u, v_k \rangle_\ell, \quad u \in W_2^\ell(\Delta)$$

が成り立つ．それゆえ，$w_j = \sum_{k=1}^N S_{jk}\, v_k \in W_2^\ell(\Delta)$ が $\mu_j \in \mathscr{N}$ に対応する．

さて，この記法のもとで，(5.2) は

$$\begin{aligned}
\mathscr{J}\, u(x) &= \sum_{k=1}^{N} \langle u, v_k \rangle_\ell\, b_k(x), \quad u \in W_2^\ell(\Delta) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \langle u, v_k \rangle_\ell \sum_{j=1}^{N} S_{jk}\, e_j(x) \\
&= \sum_{j=1}^{N} \langle u, \sum_{k=1}^{N} S_{jk}\, v_k \rangle_\ell\, e_j(x) = \sum_{j=1}^{N} \langle u, w_j \rangle_\ell\, e_j(x)
\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$\mathscr{J}\, u(x) - \Pi_{m-1}^\ell\, u(x) = \sum_{j=1}^{N} \langle u, w_j - e_j \rangle_\ell\, e_j(x)$$

である．しかも，構成から

$$w_j - e_j \in \left(\mathbb{P}^{m-1}\right)^\perp, \quad j = 1, \cdots, N$$

となる．$^\perp$ は $W_2^\ell(\Delta)$ の内積に関する直交補空間を表す．したがって，$\mathscr{J}\, u - \Pi_{m-1}^\ell\, u \in \mathbb{P}^{m-1}$ に注意すれば，(5.3) が導かれる．

5.2　有限要素法と補間作用素

領域 Ω_h は（代表的な）直径が $O(h)$ である部分領域[34] $\Delta_{h,k}$ の直和（集合和）として得られているとする：

$$\Omega_h = \bigcup_{k=1}^{N_h} \Delta_{h,k}, \quad \mathrm{Int}(\Delta_{h,k}) \cap \mathrm{Int}(\Delta_{h,k'}) = \emptyset,\ k \neq k'. \tag{5.4}$$

念頭にあるのは，当初の領域 Ω の部分領域への分割であるが，Ω の境界の近傍は取り扱いの困難が予想されるので，今は，取りあえず，境界に掛からない部分領域だけの直和領域としての Ω_h を考える．これらは領域の増大列 $\Omega_h \subset \Omega_{h'}, h > h' > 0$ を成し，もともとの Ω が

$$\Omega = \bigcup_{h>0} \Omega_h \tag{5.5}$$

として得られることを想定している．

Ω_h 上の Sobolev 空間 $W_2^m(\Omega_h)$ と各 $\Delta_{h,k}$ 上の Sobolev 空間 $W_2^m(\Delta_{h,k})$ 直和の間には自然な単射

$$\sigma_h\,;\, W_2^m(\Omega_h) \ni u \quad \mapsto \quad \sum_{k=1}^{N_h} u|_{\Delta_{h,k}} \in \sum_{k=1}^{N_h} \bigoplus W_2^m(\Delta_{h,k}) \tag{5.6}$$

がある．他方，各 $u_k \in W_2^m(\Delta_{h,k})$ に対し，$\sigma_h(u) = \sum_{k=1}^{N_h} u_k$ となる $u \in W_2^m(\Omega_h)$ が存在するための条件は，隣接する部分領域，すなわち，境界が空でない共通部分を持つようなもの，$\Delta_{h,k}$，$\Delta_{h,k'}$（$\Gamma_{h,k,k'} = \overline{\Delta_{h,k}} \cap \overline{\Delta_{h,k'}} \neq \emptyset$）それぞれの上で与えられた $u_{h,k}$，$u_{h,k'}$ が（共通部分 $\Gamma_{h,k,k'}$ において）両立条件を満たすことである．

両立条件の基礎になるのは次の補題である．

補題 5.2　Δ_1，Δ_2 は，区分的になめらかな境界を持つ領域であって，閉苞の共通部分 $\Gamma = \overline{\Delta_1} \cap \overline{\Delta_2} \neq \emptyset$ はなめらかなものとし，さらに，合併集合の内部を $\Delta = \mathrm{Int}(\overline{\Delta_1} \cup \overline{\Delta_2})$ とおく．$u_1 \in W_2^m(\Delta_1)$，$u_2 \in W_2^m(\Delta_1)$ に対し，

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \in \Delta_1 \\ u_2(x), & x \in \Delta_2 \end{cases}$$

と定義される u が $u \in W_2^m(\Delta)$ を満たすための必要十分条件は，境界値の等式の成立

$$\partial_\nu^k\, u_1|_\Gamma = \partial_\nu^k\, u_2|_\Gamma, \quad k = 0, \cdots, m-1 \tag{5.7}$$

である．ここで，∂_ν は Γ における Δ_1 の内向き法線微分（したがって，Δ_2 の外向き法線微分）である．

[34]領域は連結開集合である．しかも，以下では，形状その他を最低限の要請として法線と境界値が定義できるものに制限する．

実際，仮定のもとで議論は，局所化され，なめらかな座標変換で Δ_1 は $x_n > 0$，Δ_2 は $x_n < 0$，Γ は $x_n = 0$ に含まれる場合を考えればよいことがわかる．特に，$\partial_\nu = \partial_n$ である．ちなみに，$\varphi(x)$ は（Δ 内と考えて）$x_n = 0$ の近傍に台を持つなめらかな関数とすると，

$$\begin{aligned}&\int_\Delta u(x)\,\partial_n^m \varphi(x)\,dx \\ &\qquad = -\int_\Gamma u_1(x)\,\partial_n^{m-1}\varphi(x)\,dx' + \int_\Gamma u_2(x)\,\partial_n^{m-1}\varphi(x)\,dx' \\ &\qquad\quad - \int_{\Delta_1} \partial_n u_1(x)\,\partial_n^{m-1}\varphi(x)\,dx - \int_{\Delta_2} \partial_n u_2(x)\,\partial_n^{m-1}\varphi(x)\,dx\end{aligned}$$

であり，(5.7) から右辺の境界上の積分は消しあっている．同様の計算はさらに続けられる．(5.7) は，$|\alpha| \leqq m$ のとき，$L^2(\Delta)$ の元

$$u_\alpha(x) = \begin{cases} \partial^\alpha u_1(x), & x \in \Delta_1 \\ \partial^\alpha u_2(x), & x \in \Delta_2 \end{cases}$$

が $u_\alpha(x) = \partial^\alpha u(x)$ を満たすことを意味する．

前節までの多項式空間への各種の射影を思い起こそう．Δ_1，Δ_2，Δ，Γ は補題 5.2 の仮定のものとする．$W_2^m(\Delta_1)$ から閉部分空間[35] $\mathbb{P}^{m-1}$ への正射影を P_1 とし，同様に，P_2 は $W_2^m(\Delta_2)$ から，P は $W_2^m(\Delta)$ からのものとする．今，$u \in W_2^m(\Omega)$ とし，$u_1 = u|_{\Delta_1}$，$u_2 = u|_{\Delta_2}$ とおく．このとき，$P\,u$，$P_1\,u_1$，$P_2\,u_2$ の関係はどうなっているであろうか．

6 ひとまず問題にできること

領域 Ω は有界で，境界の形状はよいものとする．§2 では，Sobolev 空間 $W_2^m(\Omega)$ から閉部分空間 $\mathbb{P}^\ell$ への正射影 Π_ℓ^m を考察した．各 $u \in W_2^m(\Omega)$ について

$$\lim_{\ell\to\infty} \|\Pi_\ell^m\,u - u\|_m = 0 \tag{6.1}$$

が成り立つことは明らかである．

問題 6.1 この収束 (6.1) は，領域 Ω の形状や，m, ℓ によってどのように記述されるか．つまり，収束率がわかるか．

恐らく収束率は u に依存するだろう．としたら，どれほどの意味がこの問自体にはあるのだろう．

ところが，§3 や §4 で論じてきたのは (6.1) とは異なる方向のものである．実際，領域 Ω の形状について比較的強い要請を置いた上で，(3.4) また

[35] 詳しくは，$\mathbb{P}^{m-1}|_{\Delta_1}$ と書くべきである．Δ_2，Δ に関しても同様．

は (4.7) として，$W_2^m(\Omega)$ から $\mathbb{P}^{m-1}$ への線形写像であって $\mathbb{P}^{m-1}$ 上では恒等写像になるもの， Q または Π_1 を構成し，これらについて

$$|u - Q\,u|_k \quad \text{または} \quad |u - \Pi_1\,u|_k \leqq C_{\Omega,k}\,|u|_m, \quad k = 0, \cdots, m-1, \quad (6.2)$$

を導いている．ここで，C_k は C_Ω を Ω の形状を反映する定数，d_Ω を領域 Ω の直径として，基本的に，$C_k = C_\Omega\,d_\Omega^{m-k}$ と表せる定数である．(6.2) の意義については，評価式

$$|u - M^m\,u|_k \leqq C_\Omega\,d_\Omega^{m-k}\,|u|_m, \quad u \in W_2^m(\Omega), \quad k = 0, \cdots, m-1, \quad (6.3)$$

を経由する方法もあることに注意を払いつつ，§3.5 で説明がされている．しかも，その結果，

$$|u - \Pi_{m-1}^m\,u|_k \leqq C_\Omega\,d_\Omega^{m-k}\,|u|_m, \quad u \in W_2^m(\Omega), \quad k = 0, \cdots, m-1 \quad (6.4)$$

が成り立つべきこともわかる．しかし，(6.4) は直接の評価によって得られているわけではなく，したがって，定数 C_Ω についての知見は十分ではない．

問題 6.2 評価式 (6.4) を直接的な方法で導くことができるか．Ω の形状についての条件はどこまで緩和できるか．また，定数 C_Ω の最良の値はどのようなものか．

参考文献

[1] J. H. Bramble and S. R. Hilbert. Estimation of linear functionals on Sobolev spaces with application to Fourier transforms and spline interpolations. SIAM J. Numer. Anal., **7** (1970), 112 – 124.

[2] Susanne C. Brenner and L. Ridgway Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer (1994)

[3] P. G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. North Holland (1978)

[4] S. Dekel and D. Leviatan. The Bramble-Hilbert lemma for convex domains. SIAM J. Math. Anal., **35** (2004), 1203 – 1212.

[5] C. Morrey. *Multiple integrals in the Calculus of Variations*. Springer-Verlag (1966)

[6] S. L. Sobolev. *Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*. American Mathematical Society (1963)

[7] S. L. Sobolev. *Sur les équations aux dérivées partielles hyperboliques non-linéaires*. Edizione Cremonese (1961)

[8] H. Triebel. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*. 2ne rev. and enl. ed. Johann Ambrosius Barth Verlag (1995)

[9] William P. Ziemer. *Weakly Differentiable Functions*. Springer-Verlag (1989)

索 引