Fourier の論法について

吉川　敦

平成 24 年 10 月 13 日

概　要

『熱の解析的理論』第 2 章第 1 節（101 項〜110 項）所収の議論に若干の当世風補正を施して追跡したもの。補正箇所は一々挙げないが、大筋において（２００年前！の）Fourier の記述に忠実のつもりである。

1　Fourier による円環体の熱伝導の扱い

Fourier は、物体の形状によっては、熱伝導の方程式を確立したものとして議論の出発点にせずに、方程式導出の過程を改めて追いかける方がよいことがあるとして、特に、断面の内径が極めて小さい場合の円環体の場合を挙げている。この場合には、一般の媒質における熱伝導の方程式を特化させるよりも、熱伝導の方程式の導出の方を特化させた方がよいというのである。

そこで、まず、内部伝導率 K、比熱 C、密度 D の媒質から円環体が構成されているとし、さらに、この円環体が温度一定の低温（温度 0）の一様な流れの中にあるときの円環体表面の外部伝導率は H であるとする。一方、円環体の断面は、極めて小さい半径 ϵ の円板[1]し、各断面の中心は半径 R の円、中央円、を描くとする。この中央円の一点を基準にして、この点から測った中央円の弧長を表すパラメータを θ とする。

円環体の断面の半径 ϵ が極めて小さいとは、円環体内の温度分布を記述するにあたり、各断面においては温度分布は一様、つまり、円環体の温度分布は、中央円の弧長パラメータ θ と時刻 t だけで記述される、すなわち、$v = v(\theta, t)$ と表して議論を進めてよいという了解になる。

この設定のもとで、Fourier の考えをなぞろう。

円環体の中央円上で近接する 2 点 θ、$\theta + d\theta$ における断面、S_θ、$S_{\theta+d\theta}$、に挟まれた円環体の部分 dV について、その熱収支を見るのである。dV は、直円筒と考えてよく、その断面積は一定で $S = \pi\epsilon^2$ であり、側面 Σ の面積は $\sigma = 2\pi\epsilon d\theta$、体積は $S\,d\theta = \pi\epsilon^2 d\theta$ となる。円環体内の熱流によって、時刻 t から微小時間 dt 経過する間に、断面 S_θ を $KS\,\dfrac{d}{d\theta}v(\theta,t)\,dt$ の熱が通過し[2]、断面 $S_{\theta+d\theta}$ を $KS\,\dfrac{d}{d\theta}v(\theta+d\theta,t)\,dt$ の熱が通過する。また、側面からは $H\sigma\,v(\theta,t)\,dt$ の熱が放散される。要するに、この極細の円環体内での熱の移動は中央円に沿って、つまり、円環体の緯線方向のみと想定しているわけである。

まず、外部から他に熱が加えられていない場合を考えよう。

[1] Fourier は断面を長方形としているが、断面の形は以下の議論では本質的ではない。
[2] S_θ の外部法線方向とは、すなわち、θ の減少する方向である。

このような円環体の部分 dV では、時間経過 dt の間に

$$-KS\,\frac{d}{d\theta}v(\theta,t)\,dt+KS\,\frac{d}{d\theta}v(\theta+d\theta,t)\,dt-H\sigma\,v(\theta,t)\,dt$$
$$=\pi\epsilon^2K\,\frac{d^2}{d\theta^2}v(\theta,t)\,d\theta dt-2\pi H\epsilon\,v(\theta,t)\,d\theta dt$$

の熱が滞留する。温度の増加量 $\dfrac{d}{dt}v(\theta,t)\,dt$ は、V の熱容量 $CD\,S\,d\theta$ に注意して、

$$\frac{\pi\epsilon^2K\,\frac{d^2}{d\theta^2}v(\theta,t)\,d\theta dt-2\pi H\epsilon\,v(\theta,t)\,d\theta dt}{CD\,\pi\epsilon^2d\theta}$$

と一致する。したがって、今日の偏微分記号を用いれば、

$$\frac{\partial}{\partial t}v(\theta,t)=\frac{K}{CD}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}v(\theta,t)-\frac{H}{CD}\frac{2}{\epsilon}v(\theta,t) \tag{1}$$

となる。

一方、dV は外部から一定温度 $T(>0)$ の熱を加えられているとすると、dt の間に側面を通して受け取る熱の量は、$T\,\sigma dt=2\pi\epsilon T\,d\theta\,dt$ である。したがって、dV の温度の増加量は

$$\frac{\pi\epsilon^2K\,\frac{d^2}{d\theta^2}v(\theta,t)\,d\theta dt-2\pi H\epsilon\,v(\theta,t)\,d\theta dt+2\pi\epsilon Td\theta dt}{CD\,\pi\epsilon^2d\theta}$$

となる。特に、$\theta=\theta_0$ において温度 T で加熱され、その他の点では全く加熱されていないときは、結局、

$$\frac{\partial}{\partial t}v(\theta,t)=\frac{K}{CD}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}v(\theta,t)-\frac{H}{CD}\frac{2}{\epsilon}v(\theta,t)+\frac{2}{\epsilon}\frac{1}{CD}\,T\delta(\theta-\theta_0) \tag{2}$$

となる。ここで、

$$\delta(\theta-\theta_0)=\begin{cases}1, & \theta=\theta_0\\ 0, & \theta\neq\theta_0\end{cases} \tag{3}$$

は $\theta=\theta_0$ における衝撃関数（デルタ関数）である。

Fourier による (1)(2) の導出では局所的な考察しかしていないが、温度分布は、パラメーター θ について、中央円の一周の長さ $L=2\pi R$ を周期として、周期的と考えるべきである。したがって、一点 θ_0 でのみ加熱されている場合は、(2) を θ が 1 周期分変動するとして把握するのがよい。

注意 1　ただし、(1) (2) 右辺の係数に $\frac{1}{\epsilon}$ が現れるのは（導出の趣旨から言って）好ましいとは言えない。

さらに、Fourier に従って、定常状態の温度分布 $v_e(\theta)$ を検討し、簡単な応用に言及している。Fourier は、(2) に相当する場合を考察しており、このとき、$t\to\infty$ に伴って、温度関数 $v(\theta,t)$ は定常状態の温度分布 $v_e(\theta)$ に移行するとして、$v_e(\theta)$ が満たすべき方程式：

$$\frac{K}{CD}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}v_e(\theta)-\frac{H}{CD}\frac{2}{\epsilon}v_e(\theta)+\frac{2}{\epsilon}\frac{1}{CD}\,T\delta(\theta-\theta_0)=0. \tag{4}$$

を要請した上で、$v_e(\theta)$ の挙動を検討している。なお、(2) (4) において、θ に関する周期性から

$$-\frac{L}{2}<\theta<\frac{L}{2},\quad \theta_0=0 \tag{5}$$

と置いてよいであろう。

さて、$w(\theta,t)=v(\theta,t)-v_e(\theta)$ とおくと、(2) (4) から

$$\frac{\partial}{\partial t}w(\theta,t)=\frac{K}{CD}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}w(\theta,t)-\frac{H}{CD}\frac{2}{\epsilon}w(\theta,t),\quad -\frac{L}{2}<\theta<\frac{L}{2},\tag{6}$$

となる。これより、

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-L/2}^{L/2}w(\theta,t)^2\,d\theta=0$$

が従い、確かに、$v_e(\theta)$ が $t\to\infty$ のときの温度分布の平衡状態を表すことがわかる。実際、(6) の両辺に $w(\theta,t)$ を乗じ、θ に関する周期性を利用し、θ について 1 周期だけ積分すると、

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-L/2}^{L/2}w(\theta,t)^2\,d\theta\\ &=-\frac{K}{CD}\int_{-L/2}^{L/2}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}(\theta,t)\right)^2d\theta-\frac{H}{CD}\frac{2}{\epsilon}\int_{-L/2}^{L/2}w(\theta,t)^2\,d\theta\\ &\quad\le-\frac{H}{CD}\frac{2}{\epsilon}\int_{-L/2}^{L/2}w(\theta,t)^2\,d\theta\end{aligned}$$

が得られ、したがって、

$$\int_{-L/2}^{L/2}w(\theta,t)^2\,d\theta\le\exp\left(-\frac{H}{CD}\frac{4}{\epsilon}\,t\right)\int_{-L/2}^{L/2}w(\theta,0)^2\,d\theta$$

となる[3]が、$t\to\infty$ のときに右辺は 0 に収束する。

さて、定常解 $v_e(\theta)$ を (4)(5) から具体的に求めよう。簡単のために

$$a=\sqrt{\frac{2}{\epsilon}\frac{H}{K}},\quad b=\frac{2}{\epsilon}\frac{T}{K}$$

と置こう。このとき、(4) は

$$v_e''(\theta)-a^2v_e(\theta)+b\,\delta(\theta)=0,\quad -\frac{L}{2}<\theta<\frac{L}{2}$$

となる。

命題 1　定常解は

$$\begin{aligned}v_e(\theta)=&\frac{b}{2a}\left(\frac{\mathrm{e}^{-aL/2}}{\mathrm{e}^{aL/2}-\mathrm{e}^{-aL/2}}-\eta(\theta)\right)\mathrm{e}^{a\theta}\\ &+\frac{b}{2a}\left(\frac{\mathrm{e}^{aL/2}}{\mathrm{e}^{aL/2}-\mathrm{e}^{-aL/2}}+\eta(\theta)\right)\mathrm{e}^{-a\theta}\end{aligned},\quad -\frac{L}{2}<\theta<\frac{L}{2},\tag{7}$$

で与えられる。ここで、

$$\eta(\theta)=\begin{cases}1,&\theta\ge0\\0,&\theta<0\end{cases}$$

は Heaviside 関数である。

[3] Gronwall の不等式による。

求積法（定数変化法）を応用して、適当な定数 c_1, c_2 によって、

$$v_e(\theta) = c_1\,\mathrm{e}^{a\theta} + c_2\,\mathrm{e}^{-a\theta} - \frac{b}{2a}\mathrm{e}^{a\theta}\,\eta(\theta) + \frac{b}{2a}\,\mathrm{e}^{-a\theta}\,\eta(\theta)$$

と表される。c_1, c_2 の決定のために、$v_e(\theta)$ の周期性から導かれる条件

$$v_e\left(\frac{L}{2}\right) = v_e\left(-\frac{L}{2}\right), \quad \int_{-L/2}^{L/2} v_e(\theta)\,d\theta = \frac{b}{a^2} = \frac{T}{H}$$

を利用する。すなわち、

$$c_1 - c_2 = -\frac{b}{2a}, \quad c_1 + c_2 = \frac{b}{2a}\left(\frac{\mathrm{e}^{aL/2} + \mathrm{e}^{-aL/2}}{\mathrm{e}^{aL/2} - \mathrm{e}^{-aL/2}}\right)$$

から

$$c_1 = \frac{b}{2a}\frac{\mathrm{e}^{-aL/2}}{\mathrm{e}^{aL/2} - \mathrm{e}^{-aL/2}}, \quad c_2 = \frac{b}{2a}\frac{\mathrm{e}^{aL/2}}{\mathrm{e}^{aL/2} - \mathrm{e}^{-aL/2}}$$

となる。

注意 2　定常温度分布を表す (7) の $v_e(\theta)$ は、直線上の周期 L の周期関数で、不連続点を $nL,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ に持つ関数に拡張できる。(7) における $v_e(\theta)$ の表現は複雑に見えるが、連続区間では、$\mathrm{e}^{a\theta}$ と $\mathrm{e}^{-a\theta}$ の 1 次結合として表されており、定性的な議論では、このことに注意するだけで十分な場合もある。

さて、Fourier は、この極細の円環体上で（加熱点を挟まずに）等間隔に並ぶ 3 点 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$（$0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < L$、$\theta_2 - \theta_1 = \theta_3 - \theta_2 = \lambda > 0$）について、興味深い観察をしている。

命題 2　定常温度分布において、連続区間で等間隔に並ぶ 3 点における温度の間に関係式

$$\frac{v_e(\theta_1) + v_e(\theta_3)}{v_e(\theta_2)} = \mathrm{e}^{a\lambda} + \mathrm{e}^{-a\lambda} \geq 2 \tag{8}$$

が成り立つ。

実際、$v_e(\theta) = c_1'\,\mathrm{e}^{a\theta} + c_2'\,\mathrm{e}^{-a\theta}$ と置き、$\theta_2 = \theta_1 + \lambda,\ \theta_3 = \theta_1 + 2\lambda$ を用いて、$v_e(\theta_1) + v_e(\theta_3)$ を計算すればよい。

注意 3　Fourier は、温度 $v_e(\theta_1), v_e(\theta_2), v_e(\theta_3)$ が測定可能であり、したがって、(8) の左辺の比

$$q = \frac{v_e(\theta_1) + v_e(\theta_3)}{v_e(\theta_2)}$$

は測定に基づいて計算できることに注意している。したがって、(8) を

$$\mathrm{e}^{2a\lambda} - q\,\mathrm{e}^{a\lambda} + 1 = 0$$

と書くと、

$$\mathrm{e}^{a\lambda} = \frac{q + \sqrt{q^2 - 4}}{2}, \quad \mathrm{e}^{-a\lambda} = \frac{q - \sqrt{q^2 - 4}}{2}$$

が得られる。これより、

$$a = \sqrt{\frac{2}{\epsilon}\frac{H}{K}} = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{q + \sqrt{q^2 - 4}}{2}\right)$$

が従う。λ、ϵ は既知の量だから、Fourier は $\dfrac{H}{K}$ の値を測定値に基づいて計算できると主張する。

2　参考文献その他

Jean Baptiste Joseph Fourier : *Théorie analytique de la chaleur* , Cambridge Library Collection, 2009 (pp.99-105)

なお、Fourier の議論の当否自体は、Fourier が実施したという測定実験を今日の技術で追試を行うことによって判断できるのではないか。