2次方程式と知的な誠実さ*

吉川 敦†

概 要

計測や計量に現われる「実数」は二乗すると正になる。2次方程式によって、虚数単位 i すなわち、$i^2 = -1,\ i = \sqrt{-1}$ が初めて数学的対象として認識され、「複素数」(すなわち、 $a + bi$ (a, b : 実数) と表される「数」) の世界が数学の自然な対象となった。複素数の知見によって、始めて、近代の科学技術、したがって、現代社会そのものが成立することができた。この間の事情の一端を見てみたい。

1 はじめに

その昔、ここではAさんとするが、さる政府機関の長が、奥さんのBさんは2次方程式の解の公式など知らないが、そのことで困ったことはない、2次方程式は教えなくてもいい、と発言したと伝えられたことがある。Aさんも Bさんも高名な作家であり、それぞれに多くのファンがいる人である。Aさんが Bさんについて言ったとされることが事実かどうか、また、事実であったとしても、どういう文脈での発言であったかはわからないが、同感する人がそれなりに多かったと見え、Aさんの発言は話題になった。

その頃だったと思うが、Cさんという当時の有力閣僚が、自分は中学生のとき2次方程式どころか数学など全くできなかったが、大学にも行けたし、大臣にも成ることができたことから、数学など要らない、という趣旨の発言をしたと報じられたことがある。このような発言が事実なら、当然、失言であり、国会の場などで陳謝すべきことであったはずなのだが、新聞記者など報道関係には数学が苦手の人たちへの同情ないし共感を大事に思う人が多かったらしく、愛すべき笑い話程度の扱いになった。今、改めて思い返してみると、大臣の個人的な情緒は、笑い話などで済まされず、牽制されるべきであった。実際、それに引きずられた結果、行政上の実害というべきものが全くなかったと見ることはできないという風に、今日では、世間の評価も定まっているようである。

Aさん、Bさん、Cさんと言った社会的な影響力の強い人たちが、数学的無能を公言して恥じることがないという近年の日本の風潮は、現代社会が各

---

*久留米大学附設高等学校文化祭・第44回「男く祭」(2014) 協賛授業予稿に基づく。

†久留米大学附設中学校・高等学校校長。元(擬・偽)数学者。九州大学名誉教授。理学博士。

種の数学的な成果の上に成立していることへの無知の表明であり、困ったものである。先年、さる数学教育関係の会合で、Ｂさんの母校の数学教員が、わたしの務めは第二のＢさんを出さないことだと思っています、と挨拶して満場の拍手を浴びたことを思い出す。

しかし、考えてみれば、こういう風潮の横行は、数学者や数学教育関係者自身の数学の意義についての理解に偏りがあり、数学の重要さを広く伝える上で力不足であった結果なのかもしれない。ともかく、ここでは、２次方程式が重要である理由、特に、解の公式が本当は深い内容を持つものものであることについて考えてみたい。

2　２次方程式に至る前に

今日、われわれが２次方程式というとき、例えば、

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

のように、$0, 1, 2, 3, \cdots$ はもちろん、x、x^2、$+$、$-$、$=$ などの抽象度の高い（つまり、何らかの数値を意味しているわけでは必ずしもない）文字記号を使うことは大前提になっている。さらに、

$$ax^2 + bx + c = 0$$

の形になれば、x などの他に、a, b, c という文字が使われる。

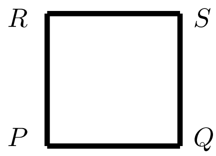
しかし、２次方程式によって表されるようなことは、文字記号が使われるようになる遥か昔から問題にされたし、また、文字記号のようなものを使う場合でも、今日、われわれが使っているような形式での使い方でなければならないものでもない。しかし、一旦、使い方の合意が成立したら、それを遵守しない限り、混乱するだけである。

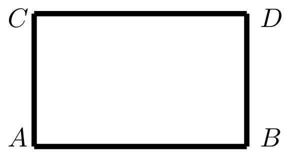
文字の使い方では、図形の特徴を定めている点に名前を付し、これらによって図形を表す場合がある。線分の場合なら、その両端の点 P, Q がわかれば定まるので、線分 PQ という言い方がなりたつ。線分には長さがあり、それを $\overline{PQ}$ と表すと、$\overline{PQ}$ の値は正である。また、線分 PQ を一辺とする正方形については、点 P, Q の他に、R, S と名付けた２点を加えた４点が頂点になり、したがって、正方形 $PQRS$ と呼び表すことができる。正方形 $PQRS$ の面積 $\overline{PQRS}$ は、同じ長さ $\overline{PQ}$ の２辺の積として $\overline{PQ}^2$ （$\overline{PQ}$ の平方 – 二乗のことである）として表すことができる。

なお、長方形 $ABCD$ の面積 $\overline{ABCD}$ は、縦 AC、横 AB の長さの積 $\overline{AC} \cdot \overline{AB}$ として与えられる[1]。

[1]縦、横は、図形の配置に依存する。図形の形そのもの（特に、面積）は図形の移動によって変わらないから、$ABCD$ の面積は、$\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ でもある。小平邦彦「幾何への誘い」（岩波現代文庫）参照。

$$\overline{PQRS} = \overline{PQ} \cdot \overline{PQ} = \overline{PQ}^2 \qquad \overline{ABCD} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$$





$$(\overline{PQ} = \overline{PR} = \overline{QS} = \overline{RS}) \qquad (\overline{AB} = \overline{CD},\ \overline{AC} = \overline{BD})$$

注意 2.1　線分の「長さ」も直線図形の「面積（広さ）」も、いずれも、わざわざ断るには及ばないだろうが、符号のない数値、つまり、正の数値である。直線図形の辺（線分）の長さおよび各頂点での角の開きを測量によって求めれば、図形の面積は計算できる。測量値はいずれも正の値である。

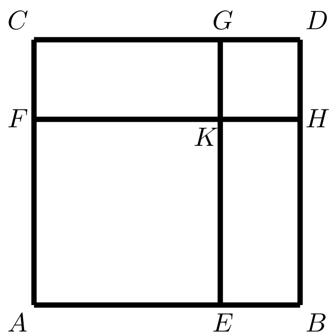
直線上に、A, B, C の順に点が並んでいるなら、AC の長さを AB の長さと BC の長さを加えたものとして把握することは自然だろう。そこで、AC を 1 辺とする正方形を造り、A を頂点とする他の辺を AE とし、その上に、点 D を $\overline{AD}$ と $\overline{AB}$、$\overline{DE}$ と $\overline{BC}$ が等しくなるようにとる。このとき、正方形 $ABCD$ の面積について

$$\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2 + 2\,\overline{EB} \cdot \overline{AE} \tag{1}$$

が成り立つ。正方形 $AEFK$ の面積は、

$$\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 - 2\,\overline{AB} \cdot \overline{EB} + \overline{EB}^2 \tag{2}$$

となる。



$$\overline{AE} = \overline{AF} = \overline{EK} = \overline{FK} = \overline{BH} = \overline{CG}$$
$$\overline{EB} = \overline{FC} = \overline{KG} = \overline{KH} = \overline{DG} = \overline{DH}$$
$$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{CD} = \overline{BD}$$
$$\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB}$$
$$\overline{AC} = \overline{AF} + \overline{FC}$$
$$\overline{ABDC} = \overline{AB}^2,\ \overline{AEKF} = \overline{AE}^2$$
$$\overline{KHDG} = \overline{KH}^2 = \overline{EB}^2$$
$$\overline{AE} \cdot \overline{EB} = \overline{EBHK} = \overline{FKGC} = \overline{FC} \cdot \overline{FK}$$

(1) は、 $\overline{ABDC} = \overline{AEKF} + \overline{KHDG} + \overline{EBHK} + \overline{FKGC}$ から従う。
(2) も同様。

(1) (2) は、初等幾何の命題であるが、線分 AE の長さを $a = \overline{AB}$、EB の長さを $b = \overline{EB}$、AB の長さを $c = \overline{AB}$ と（取りあえず表すことに）すると、(1) は

$$c^2 = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab, \quad c = a + b \tag{3}$$

(2) は

$$a^2 = (c-b)^2 = c^2 - 2cb + b^2, \quad a = c - b \ (>0) \tag{4}$$

と書き換えられる。

注意 2.2　わざわざ回り道をしたのは、幾何的には、平方は面積、したがって、正値であることを確認するためである。なお、(3) (4) は、後述するように（適当な演算規則のもとでの）記号代数の変形演算（展開）で得られる等式に包括される（脚注 12)。

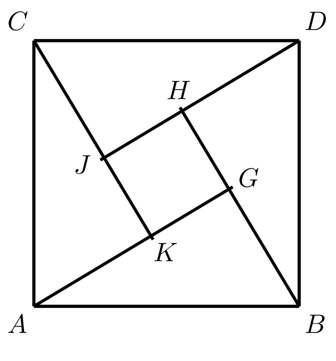
図形的な考察の延長として、直角三角形における直角の挟辺それぞれの二乗の和が直角の対辺（つまり、斜辺）の二乗に等しい、すなわち、直角三角形 ABG において $\angle G$ が直角であれば、

$$AG^2 + BG^2 = AB^2 \tag{5}$$

が成立する、という主張（三平方の定理）を確かめよう。なお、辺（つまり、線分）AG、BG、AB の長さを、それぞれ、a, b, c で表せば、(5) は

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{6}$$

となる。



$$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{CD} = \overline{BD} = c$$
$$\overline{AG} = \overline{BH} = \overline{CK} = \overline{DJ} = a$$
$$\overline{AK} = \overline{BG} = \overline{CJ} = \overline{DK} = b$$
$$\overline{GH} = \overline{HJ} = \overline{JK} = \overline{KG} = a - b$$
$$\overline{ABDC} = \overline{AB}^2 = c^2$$
$$\overline{GHJK} = \overline{GH}^2 = (a-b)^2$$

$$\overline{ABG} = \overline{BDH} = \overline{DCJ} = \overline{CAK} = \tfrac{1}{2}\overline{AG} \cdot \overline{BG} = \tfrac{1}{2}ab$$

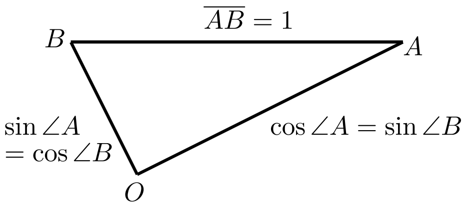
$$\overline{ABDC} = \overline{ABG} + \overline{BDH} + \overline{DCJ} + \overline{CAK} + \overline{GHJK} = 4\,\overline{ABG} + \overline{GHJK}$$

(1) (2) により、$4\,\overline{ABG} + \overline{GHJK} = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2$ となる。

直角三角形 ABG のコピーである直角三角形 BDH、DCJ、CAK を図の

ように配置する[2]。 正方形 $ABCD$ が4個の直角三角形と1個の正方形に分割されていることを、面積の関係に翻訳し直せば、三平方の定理が得られる。

注意 2.3 直角三角形 OAB（角 O が直角）において、斜辺 AB の長さが 1 に正規化されているとき、



角 A の対辺 OB（の長さ $overlineOB$）を角 A の正弦（sin）といい $\sin\angle A$ と表し、また、辺 OA（の長さ $\overline{OA}$）を角 A の余弦（cos）といい、$\cos\angle A$ と表す。これらは古典的な三角比である。角 B についても sin、cos は定義され、したがって、

$$\sin\angle A = \cos\angle B\text{、}\quad \cos\angle A = \sin\angle B$$

である。三平方の定理は、正規化されて

$$(\cos\angle A)^2 + (\sin\angle A)^2 = (\cos\angle B)^2 + (\sin\angle B)^2 = 1 \tag{7}$$

となる。

3 2次方程式の原型

平方は面積であると述べたが、図形がすべて正方形というわけではない。眼前の図形と同じ面積の正方形を求めるということには、昔から関心が示されてきた。例えば、エウクレイデスの原論を開いてみよう。原論 II の第 14 命題[3]は、

> 与えられた直線図形に等しい正方形を作図すること

である。解説によると、「正方形化」という操作をすることであるという。「直線図形」とは「多角形」を意味し、「多角形」を等面積の「長方形」に変形することは（この段階では既知の操作であるので）「長方形」を等面積の「正方形」に変形するための手順を示すことが問われているという。

---

[2]辺の長さは $\overline{AG} > \overline{BD}$ としている。$\overline{AG} = \overline{BG}$ の場合は、点 G, H, J, K は一点に集まり、正方形 $GHJK$ がなくなる。議論を分ける必要が生ずるが、数値 0 が許容できるならば、正方形 $GHJK$ の面積が消える場合として扱うことができる。

[3]エウクレイデス全集（東京大学出版会 2008）第 1 巻 p.274.

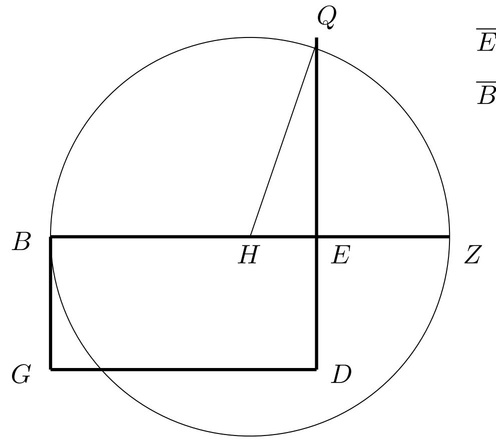
直線図形 A と等面積の長方形 $BDEF$ が得られているとすれば、縦横の長さ $\overline{ED}$、$\overline{BE}$ の積として、もとの面積 $\overline{\mathrm{A}}$ を積 $\overline{ED}\cdot\overline{BE}$ として表すことができる。求めるべき正方形の一辺を $\overline{EQ}$ とすれば、正方形の面積は $\overline{EQ}^2$ だから、

$$\overline{EQ}^2 = \overline{ED}\cdot\overline{BE} \tag{8}$$

となるように、EQ を構成することが求められるのである。直線図形 A の面積を S（>0)、この直線図形と等面積の長方形の縦、横をそれぞれ a, b で表せば、$S = a\,b$ となる。求めるべき正方形の辺の長さを x で著せば、正方形の面積は x^2 となり、これが S と等しくなければならない。すなわち、

$$x^2 = S = ab \tag{9}$$

となる。つまり、この命題は、S の正の平方根を（幾何学的に）求めることを意味している。



$\overline{ED} = \overline{EZ},\ \overline{BH} = \overline{HZ} = \overline{HQ}$

$\overline{BH} = \frac{\overline{BE}+\overline{ED}}{2},\ \overline{HE} = \frac{\overline{BE}-\overline{ED}}{2}$

三角形 HEQ は直角三角形。

$\angle E$ が直角。(5) より

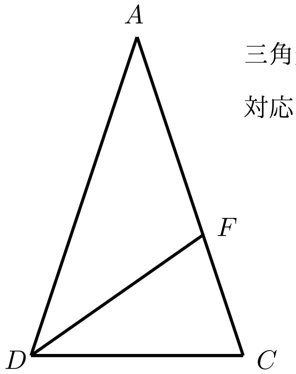
$$\overline{HQ}^2 = \overline{EQ}^2 + \overline{HE}^2$$

(1)(2) より、(8) を得る。

図形の比例関係でも、実質的に、２次方程式は現れる。典型的な例を挙げよう。

> 三角形 ACD は二等辺、$\overline{AC} = \overline{AD}$ とし、さらに、角 D の二等分線と辺 AC の交点を F とすると、$AF = DF = CD$ が成り立つとする。このとき、三角形 ACD と三角形 DCF が相似であるとすると、線分 AF の長さと線分 FC の長さの比はどうでなければならないか[4]。

[4]三角形 ACD は、正五角形 $ABCDE$ の頂点 A と A に隣接しない残りの頂点 C、D を結んで得られる三角形である。点 F は正五角形 $ABCDE$ においては DB と AC の交点である。なお、角 A は $\frac{\pi}{5}$（ラジアン）、すなわち、36°である。



三角形 ACD と三角形 CDF は相似である。

対応する辺の長さの比は等しい：

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}}$$

一方、$\overline{AF} = \overline{DF} = \overline{DC}$

および $\overline{AC} = \overline{AF} + \overline{FC}$ だから

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{AF} + \overline{FC}}{\overline{AF}} = 1 + \frac{\overline{FC}}{\overline{AF}}$$

となる。慣例では、

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FC}} = \phi$$

と表す[5]が、ϕ を用いると、上の関係式は

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} \quad \text{または} \quad \phi^2 = \phi + 1$$

となり、ϕ についての 2 次方程式

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 \qquad (\phi > 0) \tag{10}$$

が得られる。したがって[6]、

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033988\cdots \tag{11}$$

である[7]。

相似二等辺三角形の入れ子の代わりに、相似長方形の入れ子の場合にも、黄金比が現れる。

$ABCD$ は長方形、辺の長さは $AB > AD$ とする。辺 AB、CD 上に点 E、F が $AEFC$ が正方形になるようにとったとき、長方形 $ABCD$ と長方形 $BCFE$ が相似になるとすれば、$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}$ は黄金比 ϕ である。

---

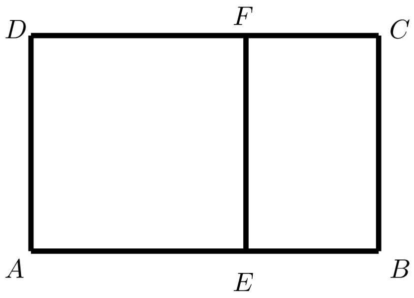
[5] ϕ はギリシア文字。フィーまたはファイ（英読み）と読む。

[6] $\phi > 0$ および (10) から、$\phi^2 > 1$、したがって、$\phi > 1$ だから、$\phi - \frac{1}{2} > 0$、それゆえ、完全平方形を利用して、

$$\left(\phi - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}, \qquad \phi - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

が導かれる。

[7] ϕ は、黄金比あるいは黄金分割比といわれる。



$$EF = AE = DF = AD = BC$$

長方形 $ABCD \sim$ 長方形 $BCFE$

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AE}+\overline{EB}}{\overline{EF}}$$

すなわち

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{EB}} = 1 + \frac{\overline{EB}}{\overline{AD}}$$

したがって、$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{EB}} = \phi$ （黄金比）である。

注意 3.1　附設校舎西棟の階段室の正面（タイル面）には、この形の黄金比構造がデザインされている。

4　数直線

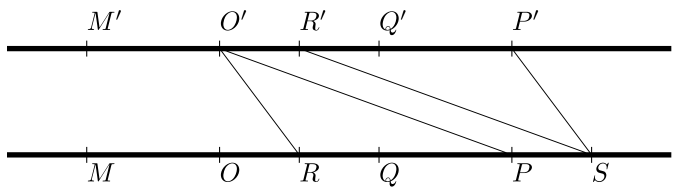
ここまで、数値として念頭に置いていたのは、個数や比、線分の長さや図形の面積だけであって、正値であるのが当然のものばかりであった。しかし、われわれは日常生活で、0（ゼロ、零）はもちろん、数値に符号を付け、負の数も扱っている。数直線によって、これらの数を幾何的に把握することができる。

図のように、直線上の一点 O によって、直線は二分される。一方を正の部分（図では、向かって右側）とし、他方を負の部分とする。正の部分に一点 E を $OE = 1$ となるようにとる。正数 p に対し、正の部分の点 P で $OP = p$ を満たすものを対応させ、負数 m に対しては、負の部分の点 M で $OM = -m$ となるものを対応させる。点 O は原点とよばれ、数値 0 が対応させられる。

$\overline{OM} = -m\ (> 0)$　　$\overline{OE} = 1$　　　　$\overline{OP} = p\ (> 0)$

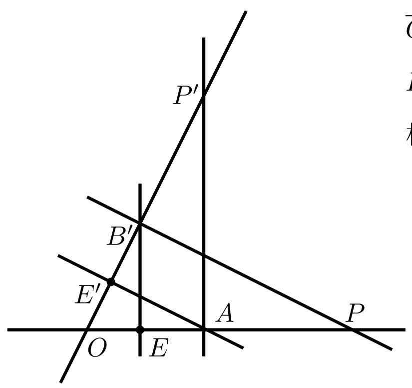
数直線上での加法は、平行な二本の数直線を利用して、次のように定義できる。図は、点 R、P （コピーでは、R'、P'）に対応する数値 r、p の和を作るために、O' と R（または P）を結び、P' （または R'）から $O'R$（ま

たは $O'P$）への平行線がもとの数直線と交わる点 S が $r+p=p+r$ に対応することを示している[8]。



注意 4.1　点 R（R'）が原点 O（O'）に一致する場合には、$S=P$、すなわち、$0+p=p+0=p$ となる。

乗法は、２本の数直線（もとの数直線とそのコピー）が原点で交わったものを利用して定義できる。図は a、b 共に正の場合に積 ab に対応する点が正の部分に定義できることを示す。同様の図を描いてみれば、a、b 共に負の場合は積 ab に対応する点は正の部分に定義され、一方、a、b が異符号ならば、積は負の部分に定義されることがわかる。また、一方が 0 ならば、積も 0、つまり、原点に対応することもわかる。



$\overline{OE}=\overline{OE'}=1,\ \overline{OA}=a,\ \overline{OB'}=b$

$E'A \parallel B'P$、$EB' \parallel AP'$（平行）

相似関係を利用して

$$\overline{OE}:\overline{OA}=\overline{OB'}:\overline{OP'}$$

$$\overline{OE'}:\overline{OB'}=\overline{OA}:\overline{OP}$$

したがって

$$\overline{OP}=ab=ba=\overline{OP'}$$

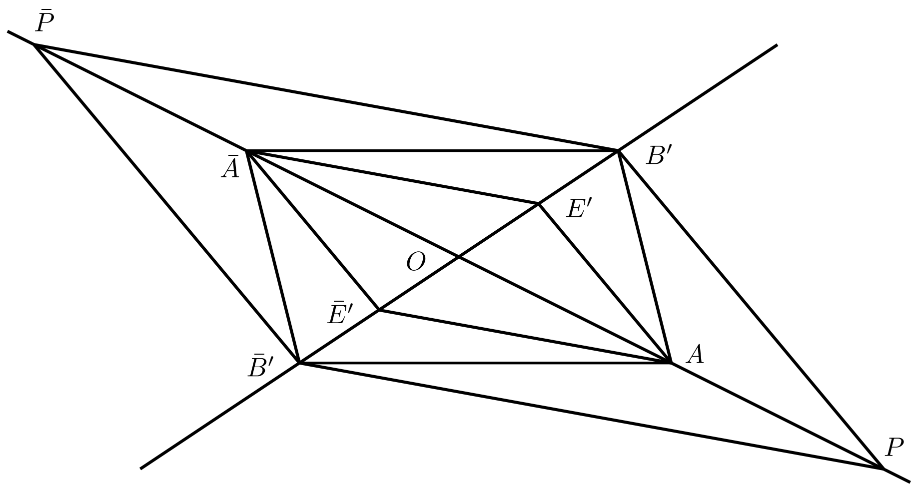
なお、$B'=E'$ ならば、$E'A \parallel B'P$ のためには $P=A$ でなければならない。すなわち、$1a=a$ である。

注意 4.2　上の説明では、$\overline{OP}=\overline{OP'}$ を $ab=ba$ によって注意しているが、$ab=ba$ は、この構成の P、P' から $\overline{OP}=\overline{OP'}$ を導けば、それによって示すことができるわけでもある。数学的な意義は、もちろん、こちらの方にある。

念のために、二個の負数の積が正になることを確かめておこう。次の図において、$\overline{OE'}=\overline{O\bar{E}'}=1$、$\overline{OA}=\overline{O\bar{A}}=a>0$、$\overline{OB'}=\overline{O\bar{B}'}=b>0$ とする。点 A、B' は数直線の正の部分にあり、それぞれ、正数 a、b に対応する

[8] R の代わりに M をとると、S の代わりに Q が得られる。

ならば、数直線の負の部分にある $\bar{A}$、$\bar{B}'$ は、それぞれ、負数 $-a$、$-b$ に対応する。図において、$B'P \parallel E'A$、$\bar{P}\bar{B}' \parallel \bar{A}\bar{E}'$ とすれば、平行四辺形 $AE'\bar{A}'\bar{E}'$ と平行四辺形 $PB'\bar{P}\bar{B}'$ は相似であり、したがって、対角線 $P\bar{P}$ は対角線 $A\bar{A}$ が載る数直線上にある。特に、数直線の正の部分にある点 P は A、B' に対応する a、b の積 ab に対応すると同時に、$\bar{A}$、$\bar{B}'$ に対応する $-a$、$-b$ の積 $(-a)(-b)$ にも対応する。すなわち、$ab=(-a)(-b)$ である。



なお、点 A と $\bar{B}'$（つまり、a と $-b$）、あるいは、点 $\bar{A}$ と B'（つまり、$-a$ と b）の積は数直線の負の部分にある点 $\bar{P}$ に対応することも、図から明らかであろう。

実数とは、数直線上の点に対応する数で（も）ある。二個の実数 a、b に対して、和 $a+b$（加法）、積 ab（乗法）が定義されるが、それらを数直線上でも幾何的に構成できるということを、ここまでで示したわけである。ただし、実数の加法および乗法についての種々の性質のすべての幾何的な確認については、その手間は掛けていない。

以下に、実数の性質の基本を掲げる（特に、ことわらない限り、a、b、c、a'、b'、$\cdots$ は実数を表すとする）。

１．まず、加法について

$$a+b \text{ および } b+c \text{ の間に } (a+b)+c=a+(b+c) \text{ が成り立つ} \tag{12}$$

$$a+b=b+a \tag{13}$$

$$a+0=0+a=a \tag{14}$$

$$a+a'=a'+a=0 \text{ となる } a' \text{ がある} \tag{15}$$

２．乗法については

$$ab \text{ および } bc \text{ の間に } (ab)c=a(bc) \text{ が成り立つ} \tag{16}$$

$$ab = ba \tag{17}$$

$$a1 = 1a = a \tag{18}$$

$$b \neq 0 \text{ ならば } bb' = b'b = 1 \text{ となる } b' \text{ がある} \tag{19}$$

３．加法と乗法の間では

$$(a+b)c = c(a+b) = ac + bc \tag{20}$$

なお、(15) における a' は $-a$ と書かれ、また、(19) における b' は $\dfrac{1}{b}$（または、b^{-1} ）と書かれる[9]。

問 4.1　(12) の幾何的な説明を与えよ。

注意 4.3　実数の重要な特徴は、正負があること、つまり、実数 a が 0 でなければ、a は正（$a > 0$、または、負（$a < 0$）のいずれか一方でなければならないことである。したがって、相異なる実数 a、b の間の大小の関係 $a > b$ を

$$a > b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a - b > 0$$

によって定めれば、相異なる二個の実数 c、d に対しては、$c > d$ か $d > c$ のどちらか一方が成り立っている。このようなことは、c、d が特定の数値を表している場合には明らかなことではあるが、特定の数値を離れても意味のある表現になっていることが大切である。

a、b、c は（任意の）実数を表しているとしよう。このとき、いずれも幾何的に確かめられることであるが、

$$a > b \quad \text{および} \quad b > c \quad \text{ならば} \quad a > c \quad \text{となる} \tag{21}$$

$$a > b \quad \text{ならば} \quad a + c > b + c \quad \text{となる} \tag{22}$$

$$a > b \quad \text{および} \quad c > 0\ (c < 0) \quad \text{ならば} \quad ac > bc\ (ac < bc) \quad \text{となる} \tag{23}$$

特に、実数 a $(\neq 0)$ の正負にかかわらず、その二乗は正となる、つまり、

$$a \neq 0 \quad \text{ならば} \quad a^2 > 0 \quad \text{である} \tag{24}$$

が成り立つ。

[9] (12) ～ (20) を満たすことを、実数の全体は「体」をなすという。

5　完全平方形 – 解の公式

ここまで２次方程式として扱ってきたものは、(9) 、すなわち、$x^2 - S = 0$（$S > 0$)、または、(10)、すなわち、$\phi^2 - \phi - 1 = 0$ であった。0 や負数は想定していなかったから、方程式を満たす解としては、正のものだけを考慮の対象としてきた。今や、0 や負数を扱ってもよいとする立場から、これらの２次方程式を見直してみると、

$$(\sqrt{S})^2 = (-\sqrt{S})^2 = S$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \quad \text{および} \quad \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1$$

が成り立つから、負数 $-\sqrt{S}$ も (9) を満たし、負数 $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ も (10) を満たすが方程式を満たすことがわかる。方程式導出の経緯を考慮すれば、これは形ばかりのことではあるだろう。だが、数学は、あらゆる可能性を検討する。

そこで、今、x、b、c を実数として、

$$x^2 + b\,x + c = 0 \tag{25}$$

として表される式を x に関する２次方程式と言おう。x の二乗 x^2 を含んでいるから、２次なのである[10]。

さて、(25) を、さらに変形する前に、(2) を思い出そう。a、b を使う代わりに、x、d を使うと、相当する式は

$$(x + d)^2 = x^2 + 2\,d\,x + d^2 \tag{26}$$

となる。ところが、(2) は幾何的に導き出したから、$x > 0$ でなければならず[11]、x や d がただの実数として、(26) が有効であるかどうかはわからない。そこで、実数の性質だけを利用して再考しよう。(26) 左辺から、出発すると、(20) により、

$$(x + d)^2 = (x + d)\,(x + d) = x\,(x + d) + d\,(x + d)$$

であるが、第３辺は、さらに、(13) により

$$x\,(x + d) + d\,(x + d) = (x^2 + x\,d) + (d\,x + d^2) = x^2 + 2\,d\,x + d^2$$

すなわち、(26) に到達する[12]。

---

[10](25) の代わりに、$a'\,x^2 + b'\,x + c' = 0$ という式を考えたとき、$a' = 0$ ならば、x^2 の項は実は現れない。$a' \neq 0$ ならば、a'^{-1} を乗じ、さらに、$b = a'^{-1}\,b'$、$c = a'^{-1}\,c'$ とすれば、(25) に帰着する。

[11]d に関しては、(3) も併せて考えれば、$d \neq 0$ ならよい。

[12]つまり、(1) (2) に相当する等式

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

は a、b が (12) 〜 (20) を満たしていれば、幾何的考察と独立に、成立する。

ここで、(26) において、$d = \frac{1}{2}b$ とすると

$$\left(x + \frac{1}{2}b\right)^2 = x^2 + b\,x + \frac{1}{4}\,b^2$$

となるが、(25) と比較することにより、完全平方形

$$\left(x + \frac{1}{2}\,b\right)^2 = \frac{1}{4}\,b^2 - c \tag{27}$$

が得られる。

命題 5.1　2 次方程式 (25) は完全平方形 (27) に変形できる。

系 5.1　(25) において、x が実数ならば、

$$\frac{1}{4}\,b^2 - c > 0 \tag{28}$$

または

$$\frac{1}{4}\,b^2 - c = 0 \tag{29}$$

である。

実際、(27) において、$x + \dfrac{1}{2}\,b$ が 0 と異なるならば、左辺は正、0 と一致するならば、左辺は 0 となる。

系 5.2　(25) において (28) または (29) が成り立つとする。(29) のもとで、(25) は

$$x + \frac{1}{2}\; = 0 \quad \text{すなわち} \quad x = -\frac{1}{2}\,b \tag{30}$$

と同値になる。(28) のもとでは、(25) は

$$x + \frac{1}{2}\,b = \sqrt{\frac{1}{4}\,b^2 - c} \quad \text{または} \quad x + \frac{1}{2}\,b = -\sqrt{\frac{1}{4}\,b^2 - c}$$

すなわち、

$$x = -\frac{1}{2}\,b \pm \sqrt{\frac{1}{4}\,b^2 - c} \tag{31}$$

となる。

ここで、(10) を思い起こそう。黄金比 ϕ、つまり、(11) は、方程式 (10) を完全平方形に直して、導いたのであった（脚注 6）。

注意 5.1　(28) (29) は、通例、

$$D = b^2 - 4\,c$$

と置き、(25) において、x が実数であるための条件を $D>0$ または $D=0$ として表す。このとき、(31) (30) は、一括して、

$$x=\frac{b\pm\sqrt{D}}{2},\quad D=b^2-4\,b\,c, \tag{32}$$

にまとめられる。これが、$D\geqq 0$ のもとでの (25) の（実）解の公式である。

解の公式の基本は、完全平方形 (27)、さらには、原型 (8) であるということができる。

6 虚数と複素数

さて、実数 x に関する 2 次方程式 (25) の完全平方形 (27) は

$$\left(x+\frac{1}{2}\,b\right)^2=\frac{D}{4},\quad D=b^2-4c\geqq 0$$

と表せた。したがって、実数 y を

$$y=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{D}}\left(x+\frac{1}{2}\,b\right), & D>0\\ x+\frac{1}{2}\,b, & D=0\end{cases}$$

とおけば、(27) は、

$$y^2=1\quad (D>0)\quad \text{または}\quad y^2=0\quad (D=0) \tag{33}$$

となる[13]。つまり、(33) は、実数に関する 2 次方程式としてはもっとも単純なものを表しているのである。

2 次方程式としては、

$$z^2+1=0\quad \text{すなわち}\quad z^2=-1 \tag{34}$$

を構想することはできるであろう。しかし、z が実数であるとすると、$z^2\geqq 0$ だから、(34) は絶対に成立することはない、つまり、決して解けないことは明らかである。そうだとすると、(34) など思いつくのが間違っている、大体、何かの役に立つのか、と常識人は言うであろう。これに対して、好奇心の対象にはなるのではないかと反問もできるだろうが、話が好奇心となると、理屈などはどうでもよいようなものだし、方向性もばらばらになりがちになってしまう。(34) の解とは何だ、と考えるより、(34) の想定上の解について

働き方の様子、つまり、どういう働きをするのか

を、まず、考える方が議論は進み易くなるものである。

[13] 方程式 $y^2-1=0$ の判別式は $\Delta=4$、方程式 $y^2=0$ のものは $\Delta=0$ である。

そこで（いくつあるとすべきかは今はわからないが）(34) の解となる z を 1 個想定して、それを i と置こう[14]。すなわち、

$$i^2 = -1 \tag{35}$$

とする。i は実数ではないが、i が属する「数の世界」には実数も含まれていて、その世界で成り立つことを実数に制限したものとして、実数の加法、乗法および関係する (12) 〜 (20) があるとしよう。特に、実数 a を i に乗じたもの $a\,i$ があり、さらに、実数 b を加えた $b + a\,i$ があるとする。つまり、a、b を実数として $b + a\,i$ の形の「数」があって、(34)、すなわち、$z^2 = -1$ は、この「数の世界」で成り立つもっとも簡単な 2 次方程式（の一つ）であると考えよう。

まず、実数 c は、$c + 0\,i$ の形のものとして、i の属する「数の世界」に含まれると考えよう。特に、0 は $0 + 0\,i$ となる。

a、a_1、b、b_1 を実数として、$\alpha = a + a_1\,i$ と $\beta = b + b_1\,i$ の和を

$$\alpha + \beta = (a + a_1\,i) + (b + b_1\,i) = (a + b) + (a_1 + b_1)\,i \tag{36}$$

と定義すれば、実数の性質 (12) 〜 (15) を i の属する「数の世界」に移行させることができる。$0 + 0\,i$ は（実数の）0 と同じように扱うことができ、特に、$\alpha = a + a_1\,i$ に対し、$-\alpha = -a + (-a_1)\,i$ と置くことにより、(15) の類比

$$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0 + 0\,i = 0 \tag{37}$$

が成り立つ。

問題は、積 $\alpha\,\beta$ であるが、(20) を念頭に、試算を試みると

$$\begin{aligned}(a + a_1\,i)(b + b_1\,i) &= a\,(b + b_1\,i) + a_1\,i\,(b + b_1\,i)\\ &= a\,b + a\,b_1\,i + a_1\,i\,b + a_1\,i\,b_1\,i\end{aligned}$$

となる。(17) の移行を期待して、$a_1\,i\,b = a_1\,b\,i$、$a_1\,i\,b_1\,i = a_1 b_1\,i^2 = -a_1\,b_1$ としてみた結果として、積 $\alpha\,\beta$ は

$$\alpha\,\beta = (a + a_1\,i)(b + b_1\,i) = (a\,b - a_1\,b_1) + (a\,b_1 + a_1\,b)\,i \tag{38}$$

と定義するのがよいとわかる。(16) や (17) の類比の成立は明らかだろう。また、(18) に相当する $(1 + 0\,i)\alpha = \alpha\,(1 + 0\,i) = \alpha$ は容易に確かめられる。

(19) に相当する場合を見よう。$\alpha \neq 0$、すなわち、$a \neq 0$ または $a_1 \neq 0$ ならば、$\alpha\,\beta = 1 + 0\,i$ となる $\beta = \alpha^{-1}$ は

$$a\,b - a_1\,b_1 = 1, \quad a\,b_1 + a_1\,b = 0$$

[14] i は、取り敢えず、アイでもイでも好きなように読んでいただきたい。なお、i は imaginary（相当のラテン語）に由ると聞いたことがあるが、初出文献などの確認はしたことがない。

から b と b_1 を解いて

$$\beta = \alpha^{-1} = \frac{a}{a^2 + a_1^2} - \frac{a_1}{a^2 + a_1^2}\, i \qquad (\alpha = a + a_1\, i \neq 0) \tag{39}$$

となることがわかる。要するに、$1 + 0\, i$ は（実数の）1 と同じように扱えるのである。

(20) の類比の検証も難しくない。実際、(36)(38) のもとで、実数の性質 (12) から (20) に至るまでのすべてが、i の属する「数の世界」に移行されることを確かめることができるのである。

ここまでのところをまとめておこう。(35) で指定した i を虚数単位と称し、実数 a と a_1 によって $a + a_1\, i$ の形に表される「数」を複素数という。複素数 $\alpha = a + a_1\, i$ において、a を α の実部（または、実数部分）、a_1 を α の虚部（または虚数部分）という。i が属する「数の世界」とは、複素数の世界であったのであり、そこでは、実数 b は $b + 0\, i$ という複素数とみなせるのである。

また、これまでの議論では、複素数の本質といった類のことには踏み込んでいないが、「働き方の様子」は確かめたことにはなる。すなわち、

命題 6.1　複素数に対して、和、積を、それぞれ、(36)、(38) で定義すれば、$0 + 0\, i$ を 0、$1 + 0\, i$ を 1 とみなして、(12) ～ (20) において実数を複素数と読み替えた類比が成り立つ[15]。

この結果、2 次方程式として

$$z^2 + \beta\, z + \gamma = 0 \tag{40}$$

を想定し、さらに、完全平方形

$$\left(z + \frac{1}{2}\,\beta\right)^2 = \frac{1}{4}\,\beta^2 - \gamma \tag{41}$$

に変形することができる。ただし、複素数の 2 乗に符号の制約はない。

ここで一例を検討しておこう。

例 6.1　複素数 $i = 0 + 1\, i$ を含む 2 次方程式

$$z^2 = i$$

の解は複素数

$$z = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, i\right) = \pm\frac{1 + i}{\sqrt{2}}$$

である。

[15] 複素数の全体は「体」をなすという。脚注 9 参照。

実際、検算により明らかではあるが、手順としては、$z = x + y\,i$（x、y は実数）とおき、(38) より、

$$x^2 - y^2 = 0, \quad 2xy = 1$$

を導く。第 2 式より、x、y は同符号であり、したがって、第 1 式より、$x = y$ である。実数 $x = y$ の決定には、$2x^2 = 1$ に依ればよい。

しかし、複素数は、ここまでの説明では、どう贔屓目に見ても、実数と違って現実に根差しているようではない、それこそ、オタク世界以外の何の価値があるのだ、ということになりそうである。

問 6.1 （オタク諸君のために） α は複素数とする。$z^2 = \alpha$ を満たす複素数 z を決定せよ。

問 6.2 （オタク諸君のために） 複素数 β、γ を係数とする（つまり、含んでいる）複素数 z に関する 2 次方程式

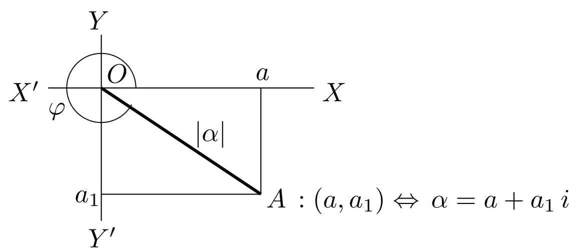
$$z^2 + \beta\,z + \gamma = 0$$

の解の公式を導け。

以上の問の解としては、余り見やすいとは言えないものが得られたであろう。

7 複素数の現実化

さて、複素数は 2 個の実数 a、a_1 によって、$\alpha = a + a_1\,i$ と表される「数」であった。



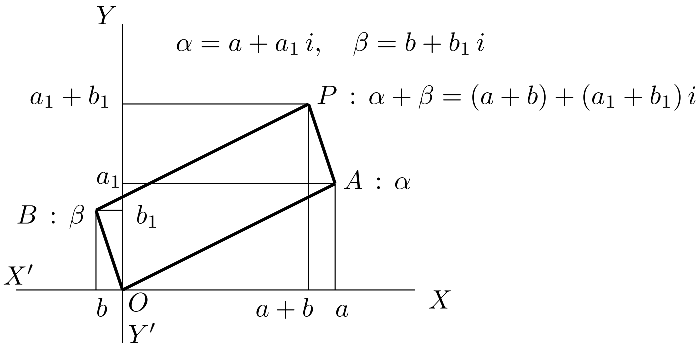
従って、幾何的には、複素数 α は平面内の点 A で表されることが予想される。平面に直交軸、すなわち、原点 O において直交する二本の座標軸（＝数直線）を用意し、A からそれぞれの座標軸に下ろした垂線の足の一方が実数 a、他方が実数 a_1 を定めるときに、点 A は複素数 $\alpha = a + a_1\,i$ を表すとするのである。

点 A の指定法としては、原点 O からの距離 OA と向きに拠ることもできる。今の場合、OA の距離は（a、a_1 の符号に依らず）

$$\overline{OA} = |\alpha| = \sqrt{a^2 + a_1^2} \tag{42}$$

である[16]。向きの指定は基線からの回し方による。基線を OX（点 O から X に向かう向き）にとり、OX から反時計回りに OA に至る角 XOA の大きさ φ で、OA の向きを表す[17]この立場では、、。

複素数の和 (36) に関しては、次図に見るように、この複素数の平面表示は適切である。



$OAPB$ は平行四辺形であり、長さ $\overline{BP}$ と $\overline{OA}$ は等しく、長さ $\overline{AP}$ と $\overline{OB}$ も等しい。

問題は、複素数の積 (38) の解釈である。まず、複素数の積はモデュラスの積を導くことに注意しよう。すなわち、$\alpha = a + a_1\, i$ と $\beta = b + b_1\, i$ の積を $\gamma = \alpha\,\beta = c + c_1\, i$ とすると、

$$|\gamma| = |\alpha\,\beta| = |\alpha|\,|\beta| \tag{43}$$

が成り立つ。実際、(38) により、

$$c^2 + c_1^2 = (a\,b - a_1\,b_1)^2 + (a\,b_1 + a_1\,b)^2 = a^2\,b^2 + a_1^2\,b_1^2 + a^2\,b_1^2 + a_1^2\,b^2$$

となり（脚注 12 参照）、

$$c^2 + c_1^2 = (a^2 + a_1^2)(b^2 + b_1^2)$$

と整理される。

したがって、複素数の積 (38) の秘密はモデュラス 1 の複素数の間に潜んでいることがわかる。そこで、$|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$ とする。言い換えると、

$$a^2 + a_1^2 = 1, \quad b^2 + b_1^2 = 1, \quad c^2 + c_1^2 = 1$$

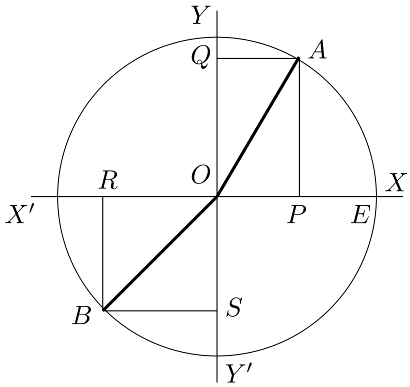
[16] $|\alpha|$ は α への言及のためであるが、後の記号使用への布石でもある。$|\alpha|$ は α のモデュラス（絶対値）と呼ばれる。

[17] α に言及する表現としては、α の偏角と言い、$\varphi = \arg\alpha$ と表す（φ は ϕ の異体字、読みは同じ）。角自体は原点 O を任意の回数だけ回った後で OA に至ったとすることが許されるので、O の回りの 1 回転相当の角 2π（ラディアン）の整数倍の不定性がある。

となる。つまり、α、β、γ に対応する点 $A\,(a, a_1)$、$B\,(b, b_1)$、$C\,(c, c_1)$ は、いずれも、原点 O に中心がある半径 1 の円周[18]の上にある。

8 単位円周の上で

モデュラス 1 の複素数 $\alpha = a + a_1\, i$ を単位円周上の点 A として図示してみよう。



$$A\,:\,(a, a_1) \;\Leftrightarrow\; \alpha = a + a_1\, i$$
$$a^2 + a_1^2 = 1$$
$$E\,:\,(1, 0) \;\Leftrightarrow\; 1 = 1 + 0\, i$$
$$P\,:\,(a, 0) \;\Leftrightarrow\; a + 0\, i$$
$$Q\,:\,(0, a_1) \;\Leftrightarrow\; 0 + a_1 i$$
$$\overline{OA} = \overline{OE} = 1$$
$$\overline{OP} = |a|,\; \overline{OQ} = |a_1|$$

この図では、角 EOA が鋭角なので、点 P も Q も $a > 0$、$a_1 > 0$ としてよく、この場合については、注意 2.3 に拠れば、(正規化された) 直角三角形 PAO において、

$$a = \cos\angle EOA, \quad a_1 = \sin\angle EOA \qquad (0 < \angle EOA < \text{直角})$$

となる。だが、このような捉え方では、例えば、点 B の場合も統一的に扱いにくい。

点 A が単位円周上にあるということの意義は、半径 OE を原点を中心に回転させて半径 OA が得られるということにあり、A は E からの回転量、すなわち、回転の向きとその絶対量、で表されなければならない。そして、回転量は、点 E から点 A までの円周上の移動距離(絶対量)に正負(向き)によって決定できる。習慣上、

回転の向きは、**反時計回りを正とする**

(すなわち、アナログ時計の時針の回転方向を負にとる)。点 E から点 A までの回転量は、点 E から点 A に至るまで、正の向きに単位円周上を進んだ時の円弧の長さ(弧長)によって測られ[19]、A の位置を決める。

注意 8.1 上図において、E、A、B は正の向きに並んでいる。

[18] 単位円周とよばれる。

[19] 円弧の長さの測り方として、断面半径 1 の円筒表面の定点 E に固定した「伸び縮みしない極めて細い糸」を E を通る断面円の周に沿って点 A まで円筒に巻きつけ、あるいは、円筒表面をはわせたものの長さを測ることを(取りあえず)想定する。

ところで、点 E は起点として不変であるべきだが、円周上を正負いずれかに 1 回転すると元の点 E に戻る。単位円周の全長は 2π だから、E は、$\cdots, -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, \cdots$ と無限個の値がある。同様に、点 A については、弧 EA の（正の向きの）弧長を φ とすると、$\varphi+2n\pi$（$n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$）は、すべて A を与える。特に、E から B を経由して A に至る回転量は、負であるべきだが、E から A まで正の向きに測り、A から時計回り（負の向き）に一周したとして $\varphi - 2\pi(+2n\pi)$（$n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$）である。つまり、円周の全長 2π の整数倍の曖昧さは単位円周上の点の指定に影響を与えず、実際に、円周上の点の指定に意味があるのは、回転量がとりうる $-\infty$ から $+\infty$ までの値のうちの、ある特定の長さ 2π の区間、例えば、$[0, 2\pi)$ であって、実際に、回転量が何であれ、2π の整数倍の加減で、この区間の値に帰着させることができる。

角 EOA（が定める角）の大きさを測るために、E から A に至る回転量を利用する。これを、角 EOA（の定める角）の弧度という。

注意 8.2　2π の整数倍の曖昧さを別にして、直角 $= \frac{1}{4}\pi$、平角 $= 2$ 直角 $= \pi$ である。

さて、単位円周上の点 A の弧度を φ、点 B の弧度を ψ とする[20]。φ は反時計回りに E から A に至るまでの円弧の弧長であり、ψ は E から B までの弧長である（$0 \leqq \varphi,\ \psi \leqq 2\pi$ であるとは限らない）。このとき、φ は A に対応する複素数 $\alpha = a + a_1\,i$ の偏角 $\varphi = \arg\alpha$ であり、A から $X'X$ に下ろした垂線の足 P が座標軸（数直線）$X'X$ に定める実数値を $\cos\varphi$ と定義し、A から $Y'Y$ に下ろした垂線の足 Q が座標軸（数直線）$Y'Y$ に定める実数値を $\sin\varphi$ と定義する。

重要なことは、P、Q は、A だけで決まるから、φ に円周の長さ 2π の整数倍の曖昧さがあっても、$\cos\varphi$ も $\sin\varphi$ も確定していることである。したがって、

$$\alpha = a + a_1\,i, \quad a = \cos\varphi, \quad a_1 = \sin\varphi \qquad (\varphi = \arg\alpha)$$

となる。同様に、$\beta = b + b_1\,i$ が点 B に対応する複素数とすれば、$\psi = \arg\beta$ であり、B から $X'X$、$Y'Y$ に下ろした垂線の足 R、S が、それぞれ、実数 $\cos\psi$、$b_1 = \sin\psi$ を定める。

$$\beta = b + b_1\,i, \quad b = \cos\psi, \quad b_1 = \sin\psi \qquad (\psi = \arg\beta)$$

となる。

注意 8.3　定義から、

$$\cos(\varphi + 2n\pi) = \cos\varphi, \quad \sin(\varphi + 2n\pi) = \sin\varphi, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \cdots. \tag{44}$$

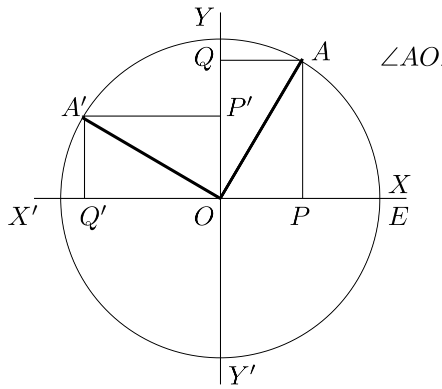
[20] ψ はギリシア字。プシーあるいはプサイ（英読み）と読む。

である。特に、$0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$ のときは、構成から、正規化された直角三角形において、$\angle EOA = \varphi$ とみて、

$$\cos\varphi = \cos\angle EOA, \quad \sin\varphi = \sin\angle EOA \tag{45}$$

である。すなわち、古典的な三角比と関連付けられた。

次の図では、三角形 POA と三角形 $Q'OA'$ は合同である。また、角 $EOA = \varphi$ が $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$、角 $EOA' = \varphi + \frac{1}{2}\pi$ である。



$\angle AOA' =$ 直角

$\overline{AP} = \overline{A'P'} = \overline{Q'O} = \overline{QO}$

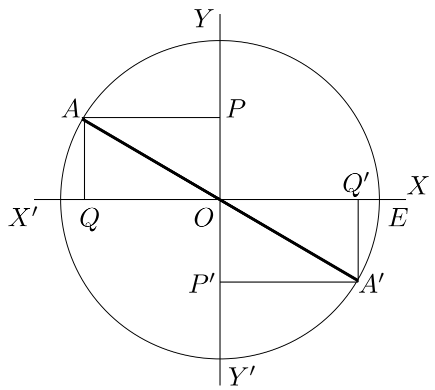
$\overline{AQ} = \overline{A'Q'} = \overline{PO} = \overline{P'O}$

また、P、Q' は、それぞれ、座標軸（数直線） $X'X$ の正の部分、負の部分にあり、Q、P' は座標軸（数直線）の正の部分にある。したがって、

$$\cos(\varphi + \frac{1}{2}\pi) = -\sin\varphi, \quad \sin(\varphi + \frac{1}{2}\pi) = \cos\varphi, \qquad 0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi \tag{46}$$

である。

(45) (46) により、$\cos\varphi$、$\sin\varphi$ は $0 < \varphi < \pi$ に対し、正体はわかった（つまり、直角三角形における三角比と結び付けられた）。そこで、$0 < \varphi < \pi$ に相当する新たな図を描いてみよう。



$\angle AOA' =$ 平角

$\overline{OQ} = \overline{OQ'}$

$\overline{OP} = \overline{OP'}$

$\angle EOA = \varphi$

$\angle EOA' = \varphi + \pi$

点 A が偏角 φ の複素数 α に対応し、点 A' は偏角 $\varphi + \pi$ の複素数 α' に対応する。図において、三角形 QOA と三角形 $Q'OA'$ は合同であり、点 Q

と Q'、および点 P と P' は、それぞれ、数直線 $X'X$、$Y'Y$ において、原点 O に関して対称である。したがって、

$$\cos(\varphi+\pi) = -\cos\varphi, \quad \sin(\varphi+\pi) = -\sin\varphi \quad (0 < \varphi < pi) \tag{47}$$

となる。

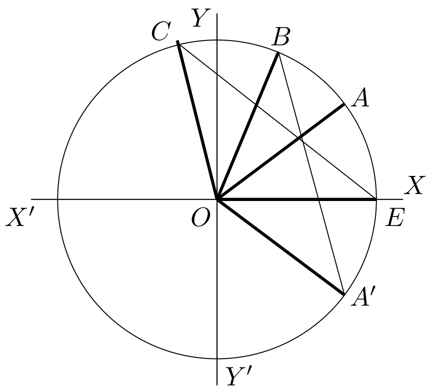
以上をまとめておこう。

命題 8.1　モデュラス 1 の複素数 α は、単位円周上の点 A として表される。単位円周上の基準点 E から（正の向き、すなわち、反時計回りに）点 A まで測った弧長 φ を複素数 α の偏角といい、$\varphi = \arg\alpha$ と表す。偏角は、E から A に至る円周上の経路において正負の向きと複数回円周を周回する場合を含み、したがって、任意の実数値をとりうるものである。α は、偏角 $\varphi = \arg\alpha$ によって、

$$\alpha = \cos\varphi + i\,\sin\varphi, \quad -\infty < \varphi = \arg\alpha < +\infty \tag{48}$$

と表され、この表現は、単位円周上の点 A の直交座標表現 $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ と対応する。cos および sin については、(44) (45) (46) (47) で明らかなように、正規化された直角三角形に基づく三角比（注意 2.3）の理念の延長上のものである。

かねての課題であったモデュラス 1 の複素数どうしの積 (38) の理解は、複素数の (48) によって可能になる。まず、準備として、次図を掲げよう。



$$\angle EOA = \varphi = \angle A'OE$$

$$\angle EOB = \psi = \angle AOC$$

A : $(\cos\varphi, \sin\varphi)$

B : $(\cos\psi, \sin\psi)$

A' : $(\cos\varphi, -\sin\varphi)$

図の三角形 EOC を負の向きに φ だけ回転させると三角形 $A'OB$ が得られる。したがって、両者は合同で、特に、EC の長さと $A'B$ の長さは等しい。図中に、A、B、A' の座標は与えてある。C の座標は、角 EOC が角 EOA に角 AOC を加えたものであることに注意すると、$(\cos(\varphi+\psi), \sin(\varphi+\psi))$ であることがわかる。したがって、$\overline{EC} = \overline{A'B}$ から、

$$(\cos(\varphi+\psi) - 1)^2 + (\sin(\varphi+\psi))^2 = (\cos\psi - \cos\varphi)^2 + (\sin\psi + \sin\varphi)^2$$

すなわち

$$\cos(\varphi+\psi) = \cos\varphi\,\cos\psi - \sin\varphi\,\sin\psi \tag{49}$$

が得られる。ここで、ψ の代わりに $\psi+\frac{1}{2}\pi$ を用い、(45) を利用すると、

$$\sin(\varphi+\psi) = \cos\varphi\,\sin\psi + \sin\varphi\,\cos\psi \tag{50}$$

が従う。

ここで、モデュラス 1 の複素数 $\alpha = \cos\varphi + i\,\sin\varphi$ と $\beta = \cos\psi + i\,\sin\psi$ の積をみると、(38) より、

$$\alpha\,\beta = (\cos\varphi\,\cos\psi - \sin\varphi\,\sin\psi) + (\cos\varphi\,\sin\psi + \sin\varphi\,\cos\psi)\,i$$

すなわち、

$$\alpha\,\beta = \cos(\varphi+\psi) + i\,\sin(\varphi+\psi) \tag{51}$$

となる。

以上をまとめると、次になる。

命題 8.2 二個の複素数の和は、それぞれの実数部分、虚数部分の和に帰着する。また、二個の複素数の積は、それぞれのモデュラスの積と偏角の和に帰着する。

二次方程式の原型から出発して、複素数にまで至った。複素数が体系的に理解されるようになって、近世以降の数学の世界が始まった。この延長上に、今日の科学技術文明がある。

9 おわりに

２次方程式の解の公式の解説を試みて、２０ページを超えてしまった。Aさん、Bさん、Cさんが、２次方程式の解の公式を知らなかったり、理解できなかったとしても、不思議ではないということになりそうである。この解説は決して歴史的順序に従ってはいない。その上、多分に現代の視点からの解釈が混在してもいる。だが、こんな不完全な形であっても、２次方程式の解の公式ひとつとっても、一朝一夕に出来上がったものではないこと、有名無名の先人たちの苦闘や知恵、アイデアの閃きの集積であることは推測が付くであろう。二次方程式の解の公式には長い歴史があり、しかも、数学の本流から言うと、今や、岸近くで揺蕩う水の淀みに似ているかもしれない。実際、解の公式そのものには拘泥しなくてもいいのかも知れず、ある人たちには役に立たないと言われれば、その通りかも知れない。だが、そのことと、二次方程式は要らない、数学は要らない、という判断とは、間隙がありすぎ

る。実際、その間隙を埋めているものは、無知であり、傲慢さであり、知的な誠実さの欠如だといわれても仕方がないのではないだろうか[21]。

もっとも、Aさん、Bさん、Cさんの話はすべて伝聞である。仮に、実際に伝聞に近い発言があったとしても、それぞれの立場を慮って弁護できる点があるかも知れない。Aさん、Bさんは文学者である。数学の定理にも、それに至る知的な冒険の歴史があっただろうに、無味乾燥な表現だけになっているのはおかしいではないか、という含意を籠めた指摘であった可能性はあるだろう。もし、そうであるなら、真面目に対応しなければならない。つまり、このような文学的感性にあった初等数学の展開というものが工夫されていてもよかったのである。もちろん、文系分野での活躍を目指す人には、文学的感性に満ちた数学教育を提供すべきだと、言っているのではない。わからないから、要らない、という短絡性の発生を、数学教育者も数学者も怪しまなかったのはなぜか、ということこそ、真っ先に問われなければならないことだと、わたくしは思う。

他方、Cさんは、政治家である。配慮すべきことは多く、優先順位の付け方も重要である。そのときの緊急の課題もあったろう。しかも、発言が公的な価値を持つ立場にあったとすれば、何であれ、特定の知識技能について、要らない、と判断したのであれば、それは合理的かつ客観的な理由に基づいたものでなければならない。もし、本当に、伝えられるような私的な理由であれば、事の当否に依らず、無効な判断なのである。Cさん自身も私的なコメントであり、それ以上でもそれ以下でもないと考えていたかも知れない。公的存在である政治家には基本的に私的なコメントをする自由はない、という考え方は成り立つかもしれないが、こういう原理的な立場に拘泥して、見識を示さずに、政治家の私的なコメントを流布させることは、報道関係者の原則的な姿勢とも相容れまい。かれらも卑怯であるとまでは言えないにしても、無責任の誹りを免れないのではないだろうか。

言うまでもなく、Aさん、Bさんも、そして、Cさんや周辺の報道や行政の関係者も、さらに、われわれ自身も、みな同じ日本の社会のうちに暮らし、日々を過ごして来ている。日本の学校現場で二次方程式が扱われるようになって、すでに一世紀を大幅に超えているであろう。今日の形になってからも、明治末期から数えれば、実質的に一世紀を超えているはずである。こういう一見簡単そうな数学的命題を前にして極端に二分化されたような反応が生じることを怪しまないという、そういう文化を奉ずるような社会に、日本はなってしまったのか、どうして未知のもの、理解を拒絶しているようなものごとの前で、その背後を解き明かそう、少しでも理解を深めよう、とせずに、短絡的に要不要の判断を急ぐような傲慢かつ軽薄な文化が横溢するようになっ

[21]西欧文化圏でも似たようなことはあるのではないか、という意見もあるだろうが、最近見た Mircea Pitici（編）*The Best writing on mathematics 2013*（Princeton University Press, 2014）所収の諸論説からは、現代西欧世界の知的基盤としての数学の基本性の認識は当然極まりないものであったが、それが数理情報技術の普及などを前にして揺らいでいるらしい様子が見て取れる。

てしまったのか、それが問題である。

　二次方程式の解の公式に関して言えば、恐らく、数学教育者や数学者の単調な価値観の現れ – 解の公式を易しいとか初等的とかいう理由でいくらかでも軽蔑している様子 – があったからではないか、と思われる。ところが、この稿を用意してみて、一応、出来上がったのは余りにも難しい代物になった。実際のところ、大変な技量を要することであると痛感する。