

# 入試学・補遺の補遺\*

吉川 敦

九州大学大学院数理学研究院

平成 16 年 9 月 4/5 日

## 1 はじめに

若干の文献を見つけたので、紹介しておきたい。文献 [2], [3] は、文献 [1] の引用文献から選んだ。[3] は、一連の考察の端緒となったものらしく、短くもあるので、要点<sup>1</sup>を次節で述べたい。

これらの論考が前提にしている入学者選抜方式は、わが国の様態に直ちに対応するものではない。適正な配置という、より一般的な文脈での考察と考えられる。

[1], [2], [3] は、いずれもインターネットからダウンロードできる（ただし、[3] は、MathSciNet では検索できない）。

## 参考文献

- [1] Mourad Baïou and Michel Balinski. Student admissions and faculty recruitment. *Theoretical Computer Science* **322** (2004) 245 – 265.
- [2] Michel Balinski and Guillaume Ratier. Of stable marriages and graphs, and strategy and polytopes. *SIAM Review* **39** (1997) 575 – 604.
- [3] D. Gale and L. S. Shapley. College admissions and the stability of marriage. *Amer. Math. Monthly* **69** (1962) 9–15.

## 2 文献 [3] の内容

扱われる話題は、 $n$  校の大学  $u_1, \dots, u_n$  に対し、これらの大学への  $m$  名の入学志願者  $a_1, \dots, a_m$  を適切に割り当てることである。

\* 「数学教育の会」2004 年夏の集会（9 月於学習院大学）予稿の参考。

<sup>1</sup> ご承知の方も多いと思う。随所に述べられる著者の見解も興味深いので、未見の方にも原文のご一読をお勧めしたい。

想定は次の通り． $u_i$  大学の入学定員を  $q_i$  名とする．各大学は，志願者について優先順位を付けており，また，各志願者も入学希望希望順位を付けているとする．ただし，いずれにも同一順位はないとする<sup>2</sup>．

目標は，安定かつ最適に，各大学に定員までの入学志望者を割り当て，また，各志望者には一校までの入学先の大学を指定することである．

ここで，安定であるとは，志願者  $a, b$  がそれぞれ  $u$  大学， $v$  大学に割り当てられた際， $b$  の志望順位では  $v$  大学より  $u$  大学の方が高く，かつ， $u$  大学の選抜順位では  $a$  より  $b$  の方が高いという事態<sup>3</sup>が生じないということである．また，入学先割り当てが最適であるとは，他のすべての安定な入学先割り当てと比較して，どの入学志望者にとっても志望順位の改善が見られないことをいう<sup>4</sup>．

[3] は，状況を単純化し， $n = m$  かつ  $q_i = 1, i = 1, \dots, n$ , の場合，すなわち「結婚組合せ」をまず考察している．割り当ての手つづき（アルゴリズム）を実際に示すこと<sup>5</sup>により，次の定理を示す．

**定理 1** 安定（かつ「最適」）な結婚組合せが常に存在する<sup>6</sup>．

[3] は，この“deferred-acceptance”手つづきが，入学者割り当ての場合（ $n \neq m, q_i \neq 1$ ）にも（ほぼ，そのまま<sup>7</sup>）拡張できることを注意した上で，つぎの定理を示す．

**定理 2** “deferred-acceptance”手つづきに基づく選抜による入学許可先の大学は，どの志望者にとっても，他の安定な割り当てのもとでの志望順位の改

<sup>2</sup>例えば， $u_1$  大学は，志望者について， $a_1 > a_2 > \dots > a_{q_1} > \dots > a_l$  の順位を付し， $a_{l+1}, \dots, a_m$  は（定員が割れても）入学させる気はない．他方，志願者  $a_1$  の入学希望順位は  $u_n > u_{n-1} > u_{n-2}$  であって，他の大学からの入学許可には応じないか，そもそも願書を提出しない．言うまでもなく，大学と志望者それぞれにおける順位の決定については，特別な（恐らくは哲学的な内容も伴う）議論が要る．大学側からの順位決定では学力検査などの技術的な要素を強調することもできるであろう．

<sup>3</sup>[3] は，このような  $a, b$  の  $u, v$  への割り当てを定義して *unstable*（不安定）という． $b$  の  $u$  大学への転学の方が  $b, u$  両者の希望順位に沿うからである．

<sup>4</sup>各大学にとり，選抜順位の改善がないという意味での最適性も定義できる．ただし，[3] は，

On the philosophy that the colleges exist for the students rather than the other way around, ... other things being equal, students should receive consideration over colleges.

に従うとしている．

<sup>5</sup>“deferred-acceptance”手つづきと称している． $a_1, \dots, a_n$  を男性， $u_1, \dots, u_n$  を女性とする．各男女には異性群の成員に対する選好嗜好の線形順序が定められているとする．各女性は，それぞれの選好順位に基づいてプロポーズして来た男性のうちから彼女の選好順位のもっとも高い者を「取敢えず」「手持ち」に残して他は拒絶する．あぶれた男性たちは（拒絶した女性を除いた選好順位に基づいて）再度女性にプロポーズし，女性は「手持ち」男性と比較した上で，それぞれの「手持ち」男性を，それまでのプロポーズ男性の中で彼女の選好順位のもっとも高い者に更新する．この手順を繰り返して，あぶれた男性がいなくなったところで，女性はそれぞれの「手持ち」男性のプロポーズを最終的に受け入れればよい．

<sup>6</sup>[3] の Theorem 1 の文言では安定性だけしか述べられていないが（妻から見た）最適性が得られていることも直後に注意している．最適性は，夫から見るか妻から見るかによって，一般には，異なる．手つづきの設計に関わることである．

<sup>7</sup>「女性」を「志望学生」「手持ち」を「受け入れ表明の大学のリスト」に改める．最適性の検証は多少入り組む．

善が得られないようなものである。

[3] の結語はなかなか面白く示唆に富むものである<sup>8</sup>。しかし、小生が、ここで [3] を紹介したのは、

It is our opinion, however, that some of the ideas introduced here might usefully be applied to certain phases of the admission problems.

という見解に同意したからである。

### 3 文献 [1] の概要

なお、[1] の概要は次の通り：

The student admissions and faculty recruitment problems are modeled and analyzed in terms of graphs. Stable assignments, potentially exponential in number, form a distributive lattice whose sup and inf are the applicant-optimal and university-optimal stable assignments,  $\mu_A$  and  $\mu_U$ .

Which one of all possible stable assignments *should* be chosen in practice is answered in these terms :  $\mu_A$  is characterized as the unique choice mechanism that is either “monotone,” or “strategy-proof,” or “efficient.” Similar characterizations are given for  $\mu_U$ , though as a practical matter they are not persuasive.

これから見るように、[1] は [3] の延長上の考察であるが、概念整備が進み、(応用) 数学的な文脈も拡大していることが推察されるであろう。

### 4 結語

さて、「入学試験学」という立場では、これらの考察をどう考えるべきか。これらの考察は、現段階では、有効な応用可能性を実現するところ(工学化)までは進んではないようである。また、考察の前提は、わが国の入試状況には対応していない。取敢えずは、教訓として把握したい。素直で素朴な思い付きを、いかに熟成させて行くか、そういう見本と考えたいのである。

---

<sup>8</sup>つぎのくだけりを除き、再録はしない。