Legendre 多項式について

吉川　敦

平成 22 年 5 月 31 日

Legendre の多項式 $P_n(t)$ は微分方程式

$$\frac{d}{dt}\left((1-t^2)\frac{d}{dt}u(t)\right) - n(n+1)u(t) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{1}$$

の多項式解として得られる n 次多項式である．具体的には，

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k}{2^k} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-2k-1)}{k!(n-2k)!} t^{n-2k} \tag{2}$$

と求められている．

$P_n(t)$ は基本的な直交多項式であって，例えば，高木貞治：解析概論（改訂第三版）36 節（第 3 章）に詳細な記述がある．もともと，3 次元 Laplacean を球座標で表し，その固有関数系を変数分離によって求める過程で得られたものである．純粋分野，応用分野を問わず，数学上極めて重要であり，当然，古くからよく調べられている．いまさら付け加えるべきことがあるとは思われないところではあるが，なお，若干目新しい文脈で方程式 (1) を扱えるのではないかと思って，展開したのが以下の考察である．稿末の定理 3.1 に，この立場からの Legendre 多項式の表現公式に相当するものを掲げた．

1　区間における関数若干

実数 $p < q$ を両端とする区間を $I = [p, q]$ とおこう（p, q は以下の議論で必要に応じて指定する[1]）．区間 I の長さは

$$|I| = q - p$$

である．端点 p，q において，それぞれ，実数値 a，b をとる 1 次関数は，I において

$$\mathrm{convex}_I(t; a, b) = a\,\frac{q-t}{|I|} + b\,\frac{t-p}{|I|}\,, \qquad t \in I \tag{1.1}$$

と表わされる（要するに，a, b の凸結合である）．

[1] Legendre 多項式を論ずる場合は，$p = -1, q = 1$ となる．

一方，区間 I の両端で消え，中央点 $\frac{p+q}{2}$ で値 $\frac{1}{4}$ をとる 2 次関数は

$$B_I(t) = \frac{q-t}{|I|}\frac{t-p}{|I|}, \qquad t \in I \tag{1.2}$$

である．

これらの関数の間には，次の簡単な関係式が成り立つ．

補題 1.1　a, b, c, d は実数とする．このとき

$$\mathrm{convex}_I(t; a, a) = a$$

$$\mathrm{convex}_I(t; a, b) + \mathrm{convex}_I(t; c, d) = \mathrm{convex}_I(t; a+c, b+d)$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{convex}_I(t; a, b)\cdot\mathrm{convex}_I(t; c, d)\\ &= \mathrm{convex}_I(t; ac, bd) - (a-b)(c-d)B_I(t)\end{aligned}$$

が成り立つ．

さて，次が本稿の基礎となる主張である．

命題 1.1　（実係数の）n 次多項式 $Q(t)$ に対し，実数 $a_i, i = 0, \cdots, m = [\frac{n+1}{2}]$，$b_i, i = 0, \cdots, m$ が一意的に定まって，区間 I 上で

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{m} \mathrm{convex}_I(t; a_i, b_i)\, B_I(t)^i, \quad t \in I \tag{1.3}$$

と表わされる．

実際，まず，$Q_0(t) = Q(t)$ とおくと，$a_0 = Q_0(p), b_0 = Q_0(q)$ である．次に，

$$Q_1(t) = \frac{Q_0(t) - \mathrm{convex}_I(t; a_0, b_0)}{B_I(t)}$$

と置いて，$a_1 = Q_1(p), b_1 = Q_1(q)$ が定まる．以下，同様に続けて，1 次式 $Q_m(t) = \mathrm{convex}_I(t; a_m, b_m)$ に至る．

2　導関数について

命題 1.1 と微分演算との関係を確認しよう．

補題 2.1　導関数に関しては，

$$\frac{d}{dt}\mathrm{convex}_I(t; a, b) = \frac{b-a}{|I|}, \quad t \in I$$

$$\frac{d}{dt}B_I(t) = \frac{1}{|I|}\mathrm{convex}_I(t; 1, -1), \quad t \in I$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{convex}_I(t;a,b)\cdot B_I(t)^k\right)=\frac{k}{|I|}\mathrm{convex}_I(t;a,-b)\,B_I(t)^{k-1}+\frac{(2k+1)(b-a)}{|I|}\,B_I(t)^k$$

が成り立つ.

ここで，形式和

$$S(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\mathrm{convex}_I(t;a_i,b_i)\,B_I(t)^i \tag{2.1}$$

の形式的導関数を

$$\frac{d}{dt}S(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\mathrm{convex}_I(t;a'_i,b'_i)\,B_I(t)^i \tag{2.2}$$

と表すと，

$$\begin{cases} a'_i=\dfrac{i+1}{|I|}a_{i+1}-\dfrac{2i+1}{|I|}(a_i-b_i) \\ b'_i=-\dfrac{i+1}{|I|}b_{i+1}-\dfrac{2i+1}{|I|}(a_i-b_i) \end{cases} \tag{2.3}$$

となる．特に，

$$a'_i-b'_i=\frac{i+1}{|I|}(a_{i+1}+b_{i+1}) \tag{2.4}$$

である.

なお，

$$B_I(t)\frac{d}{dt}S(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{convex}_I(t;a''_j,b''_j)B_I(t)^j \tag{2.5}$$

とおくと，

$$a''_0=b''_0=0,\quad a''_j=a'_{j-1},\ b''_j=b'_{j-1},\ j\geq 1 \tag{2.6}$$

である．したがって，

$$\frac{d}{dt}\left(B_I(t)\frac{d}{dt}S(t)\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{convex}_I(t,a^*_j,b^*_j)B(t)^j \tag{2.7}$$

とすると

$$\begin{aligned} a^*_j &=\frac{j+1}{|I|}a''_{j+1}-\frac{2j+1}{|I|}(a''_j-b''_j) \\ &=\frac{(j+1)^2}{|I|^2}a_{j+1}-\frac{(2j+1)^2}{|I|^2}a_j+\frac{2j+1}{|I|^2}b_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^*_j &=-\frac{j+1}{|I|}b''_{j+1}-\frac{2j+1}{|I|}(a''_j-b''_j) \\ &=\frac{(j+1)^2}{|I|^2}b_{j+1}+\frac{2j+1}{|I|^2}a_j-\frac{(2j+1)^2}{|I|^2}b_j \end{aligned}$$

であるが，見易く整理すると，

$$\begin{pmatrix} a_j^* \\ b_j^* \end{pmatrix} = L_j \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} + \frac{(j+1)^2}{|I|^2} \begin{pmatrix} a_{j+1} \\ b_{j+1} \end{pmatrix}$$

となる．ただし，L_j は 2×2 行列

$$L_j = \frac{1}{|I|^2} \begin{pmatrix} -(2j+1)^2 & 2j+1 \\ 2j+1 & -(2j+1)^2 \end{pmatrix}$$

である．なお，

$$\Lambda_j = \begin{pmatrix} -2j-1 & 1 \\ 1 & -2j-1 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

とおけば，

$$L_j = \frac{2j+1}{|I|^2} \Lambda_j$$

となる．

補題 2.2　$\mu_n = -n(n+1)$ とする．行列 L_j の固有値は

$$\lambda_{2j} = \frac{\mu_{2j}}{|I|^2} = -\frac{2j(2j+1)}{|I|^2}, \quad \lambda_{2j+1} = \frac{\mu_{2j+1}}{|I|^2} = -\frac{(2j+1)(2j+2)}{|I|^2}$$

であって，対応する固有ベクトルは，それぞれ，

$$\mathbf{e}_{2j} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{2j+1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

のスカラー倍である．特に，行列 L_j，L_k $(j \neq k)$ の固有値は相異なる．

実際，行列 Λ_j の固有値は $-2j$ または $-2j-2$ であって，対応する固有ベクトルは，それぞれ ${}^t(1,1)$，${}^t(-1,1)$ の定数倍である．

補題 2.3　$S(t)$ は高々 $2m+1$ 次の多項式とする（$j > m$ ならば $a_j = b_j = 0$ である．すなわち，$S(t) = Q(t)$ (1.3)）．このとき，

$$a_j^* = b_j^* = 0, \quad j > m$$

$$\begin{pmatrix} a_m^* \\ b_m^* \end{pmatrix} = L_m \begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

である．$j < m$ に対しては

$$\begin{pmatrix} a_j^* \\ b_j^* \end{pmatrix} = L_j \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} + \frac{(j+1)^2}{|I|^2} \begin{pmatrix} a_{j+1} \\ b_{j+1} \end{pmatrix}$$

が成り立つ．

3　Legendre 多項式について

微分作用素

$$\mathscr{L}_I \cdot\ = \frac{d}{dt}\left(B_I(t)\frac{d}{dt}\ \cdot\right) \tag{3.1}$$

の固有値と固有関数を論じよう．固有値問題とは,

$$\mathscr{L}_I u(t) = \lambda u(t), \quad t \in I \tag{3.2}$$

を満たす $u(t)$ と λ を求めることである．

注意 3.1　(1) は (3.2) において $I = [-1, 1]$, $\lambda = \dfrac{1}{4}n(n+1)$ の場合に相当する．

$u(t)$ を命題 1.1 の $Q(t)$ として，(3.2) を考える．補題 2.3 により，(3.2) は

$$\lambda \begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix} = L_m \begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix}$$

および $j < m$ に対して,

$$\lambda \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} = L_j \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} + \frac{(j+1)^2}{|I|^2} \begin{pmatrix} a_{j+1} \\ b_{j+1} \end{pmatrix}$$

が成り立つことと同値になる．したがって，$\lambda = \dfrac{\mu}{|I|^2}$ とおくと,

$$\mu \begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix} = (2m+1)\Lambda_m \begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

$$\mu \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} = (2j+1)\Lambda_j \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} + (j+1)^2 \begin{pmatrix} a_{j+1} \\ b_{j+1} \end{pmatrix}, \quad j < m \tag{3.4}$$

となる． ただし，Λ_j は (2.8) で与えられている．ここで，区間 I の情報が完全に消えてしまったことが興味深い．

したがって,

$$\mu = \mu_{2m}, \quad a_m = b_m \neq 0, \quad \text{または} \quad \mu = \mu_{2m+1}, \quad a_m = -b_m \neq 0 \tag{3.5}$$

である．以下，$n = 2m$ または $n = 2m+1$ に応じて,

$$\begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} = (j+1)^2 \Big(\mu_n - (2j+1)\Lambda_j\Big)^{-1} \begin{pmatrix} a_{j+1} \\ b_{j+1} \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

から a_j, b_j （$j = 0, \cdots, m-1$）が逐次決められる．

補題 3.1　$n = 2m$ ならば $a_j = b_j$ である．

実際，$j=m$ のときは正しい．$j<m$ のときは，(3.6) から従う．まず，

$$\begin{aligned}\delta_{n,j} &= \det\Bigl(\mu_n - (2j+1)\Lambda_j\Bigr)\\ &= (n+2+2j)(n+1+2j)(-n+2j)(-n+1+2j)\end{aligned}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}&(\mu_n - (2j+1)\Lambda_j)^{-1}\\ &= \frac{1}{\delta_{n,j}}\begin{pmatrix} -n(n+1)+(2j+1)^2 & 2j+1 \\ 2j+1 & -n(n+1)+(2j+1)^2 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{3.7}$$

となる．$n=2m$，$a_{j+1}=b_{j+1}$ とすると，

$$a_j = \frac{(j+1)^2}{(2m+1+2j)(-2m+2j)}\, a_{j+1} = b_j$$

となる．したがって，

$$a_j = \frac{(j+1)^2\cdot\cdots\cdot m^2}{(2m+1+2j)\cdot\cdots\cdot(4m-1)\cdot(-2m+2j)\cdot\cdots\cdot(-2)}\, a_m$$

すなわち，$j<m$ ならば

$$a_j = \frac{(-1)^{m-j}}{2^{2m-2j}}\frac{\Gamma(m+j+1/2)\,(m!)^2}{\Gamma(2m+1/2)\,(m-j)!\,(j!)^2}\, a_m = b_j \tag{3.8}$$

である．

補題 3.2　$n=2m+1$ ならば $a_j=-b_j$ である．

実際，$j=m$ のときは正しい．$j<m$ のときは，(3.7) を利用する．$n=2m+1$，$b_{j+1}=-a_{j+1}$ より，

$$a_j = \frac{(j+1)^2}{(2m+3+2j)(-2m+2j)}\, a_{j+1} = -b_j$$

となる．したがって，$j<m$ ならば

$$a_j = \frac{(-1)^{m-j}}{2^{2m-2j}}\frac{\Gamma(m+j+3/2)\,(m!)^2}{\Gamma(2m+3/2)\,(m-j)!\,(j!)^2}\, a_m = -b_j \tag{3.9}$$

である．

以上をまとめよう．

定理 3.1　固有値問題 (3.2) は，固有値 $\lambda = -\dfrac{n(n+1)}{|I|^2}$ に対し，n 次多項式の固有関数を持つ．より詳しくは，$\lambda = -\dfrac{2m(2m+1)}{|I|^2}$ に対し，$2m$ 次の多項式

$$a\sum_{j=0}^{m}\frac{(-1)^{m-j}}{2^{2m-2j}}\frac{\Gamma(m+j+1/2)\,(m!)^2}{\Gamma(2m+1/2)\,(m-j)!\,(j!)^2}\,\mathrm{convex}_I(t;1,1)\,B_I(t)^j \tag{3.10}$$

が固有関数になる（$a \neq 0$）．また，固有値 $\lambda = -\dfrac{(2m+1)(2m+2)}{|I|^2}$ に対し，$2m+1$ 次の多項式

$$a \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^{m-j}}{2^{2m-2j}} \frac{\Gamma(m+j+3/2)\,(m!)^2}{\Gamma(2m+3/2)\,(m-j)!\,(j!)^2} \operatorname{convex}_I(t;1,-1)\, B_I(t)^j \tag{3.11}$$

が固有関数になる（$a \neq 0$）．

注意 3.2 $I = [p, q]$, $p < q$ に対し，

$$\operatorname{convex}_I(t;1,1) = 1, \quad \operatorname{convex}_I(t;1,-1) = \frac{p+q-2t}{q-p}$$

である．特に，$I = [-1, 1]$ の場合，$\operatorname{convex}_I(t;1,-1) = -t$ となる．このときは，$B_I(t) = \dfrac{1-t^2}{4}$ である．したがって，Legendre 多項式 (2) は (3.10) または (3.11) において，それぞれ，

$$a = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{n!} 2^{[n/2]}, \quad n = 2m \text{ または } n = 2m+1$$

ととるときに得られる．