# 平均値と平均合成積

吉川　敦

九州大学大学院数理学研究院

yoshikaw@math.kyushu-u.ac.jp

## 1　はじめに

ここで紹介する話題は論文[1]が１篇あるだけで，すでに古いものである．しかし，一度，東大数理（！）の小松彦三郎先生のセミナーで話したことがあるだけで，きちんとした批判を受ける形での講演機会を得ないまま，十年経過してしまった．

扱うべき問題は,

> **$\mathbb{R}^n$ 上の有界可測関数を,「平均値」があるということ（だけ）によって分析し，その結果を，$\mathbb{R}^n$ 上の有界可測関数の「平均合成積」理論の展開に応用せよ**

ということである．このような関数としては，概周期関数が典型である．しかし，概周期性を表に出さずに**平均値の存在が論じられるような関数の族がどのようなものになるかを決定すること**は興味のあることである．一方，この文脈での「平均合成積」に関しては，関数の対の相性の分析が決め手である．応用上は，特に，**その任意の元の対に対して「平均合成積」が定義できるような有界可測関数族の抽出が重要**である．事実，もともとの関心は，準線形保存系（空間１次元多成分系）の一種の漸近解析から発した波の干渉の把握の一環としてのものであり[2],「平均合成積」を何らかの関数解析の遂行が行われるように整備しておくことは望ましいことであった.

しかし，この意味での有効さが発揮される段階まで上掲の論文では展開できず，その後も十分に考えを集中する機会がないまま今日に至っている．かつてのセミナーでは，そういうわからない問題こそ大学院学生に問題提起するのに最適ではないか，というご意見を小松先生からいただいた．小生の状況では，この手の問題に関心を持つほど学生に余裕がなく，また，世の習いで致し方のないことではあるが，間もなく機会そのものも失われてしまう．芦野隆一さんのお誘いに[3]便乗する次第ではあるが，関心を抱かれた方々から爾

[1] [10]. MR 98k:42007

[2] 例えば，[11]. MR 98m:35130. 波の干渉が無視できない場合の扱いは不十分である.

[3] ささやかでも新たな考察を付け加えようと老骨に鞭打ちつつも！cf. 命題 A.1 など.

後ご解明の点をご教示いただければ幸甚と存ずる[4].

## 2　平均値

以下，特に必要がない限り，$\mathbb{R}$ で扱う（$\mathbb{R}^m$ への書き換えは困難ではない）．

直線上の非負の可積分関数で積分値が 1 であるものを「重み関数」といおう．重み関数 $\phi(x)$ と $L>0$ に対し，

$$\phi_L(x) = \frac{1}{L}\,\phi\left(\frac{x}{L}\right), \quad L>0,$$

とおく．直線上の有界可測関数 $f(x)$ に対し，

$$\phi_L * f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_L(x-y)\,f(y)\,dy$$

が $L\to\infty$ のときに，定数 $\mu$ に（$\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ において）汎弱収束するとき，すなわち，

$$\lim_{L\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_L * f(x)\,u(x)\,dx = \mu\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,dx$$

が任意の $u(x)\in\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ に対して成り立つとき，$\mu$ を重み関数 $\phi(x)$ に関する $\phi$-平均値といい， $M_\phi(f)$ とかこう．重み関数 $\phi(x)$ に関する $\phi$-平均値が存在するような有界可測関数を $\phi$-認容的ということにする．一方，$\phi$-認容的な関数 $f(x)$ について，さらに，$\phi_L * f(x)$ が $M_\phi(f)$ に（$\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ において）強収束するならば，$f(x)$ は，強-$\phi$-認容的とよぶことにする．

**例 2.1**　$f(x)\in\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ は（適当な定数 $f^\pm$ に対し）$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = f^\pm$ を満たすとする．このとき，$f(x)$ は任意の重み関数 $\phi(x)$ に関して $\phi$-認容的であって，

$$M_\phi(f) = f^+\int_{-\infty}^{0}\phi(x)\,dx + f^-\int_{0}^{+\infty}\phi(x)\,dx$$

である．このような $f(x)$ が強 $\phi$-認容的であるための必要十分条件は $f^+ = f^-$ である．

**定理 2.1**　$f(x)\in\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ が，ある重み関数 $\phi(x)$ に関して強 $\phi$-認容的であるならば，任意の重み関数 $\psi(x)$ に関しても強 $\psi$-認容的であって，しかも，

$$M_\phi(f) = M_\psi(f)$$

が成り立つ．すなわち，強認容性においては重み関数への言及は不要である．

[4]なお，飛田武幸先生には．当初からご関心を寄せていただいたが，先生のご指摘の Paul Lévy の著作（[7]）との関わりは未だ謎である．また，J.-P. Kahane 先生にもご自身の古い仕事（[4]） との関係で興味を持っていただけたようである．

したがって，強認容性は意義が認められる．ここでの問題は，しかし，強認容性の適当な十分条件の発見である．次は，熱方程式の解

$$u(t,x;f) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) f(y)\, dy, \quad t > 0, \tag{1}$$

の挙動を通して見たものである．

**系 2.1**　$f(x) \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ が強認容的であるための条件は，任意の $\epsilon > 0$ に対し，$x$ に依存しない $T_\epsilon > 0$ が存在して，$t \geq T_\epsilon$ ならば

$$|u(t,x;f) - M(f)| < \epsilon,\ -\infty < x < +\infty,$$

が成り立つことである．

**注意 2.1**　ただし，$u(t,x;f)$ の「初期値」$f(x)$ への収束（$t \to 0$ のとき）は $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ の汎弱収束である．

**例 2.2**　周期関数は強認容的である．$f(x)$ が周期 $T > 0$ であれば，平均値は

$$M(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\, dx$$

である．概周期関数も強認容的である[5]．

特に，平均値が 0 であるような強認容的な関数の族の決定は重要である．

**命題 2.1**　$f(x) \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ が，任意の有界可測な関数 $b(x)$ に対して $b(x)\, f(x)$ が強認容的になるようなものであるための必要十分条件は $|f(x)|$ が強認容的であって，しかも，$M(|f|) = 0$ を満たすことである．

$\mathcal{N}(\mathbb{R})$ によって，$f(x) \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ であって $|f(x)|$ が強認容的かつ $M(|f|) = 0$ であるようなものの全体を表そう．$\mathcal{N}(\mathbb{R})$ は，言わば，符号成分の寄与によって打ち消しあう形で平均値が消えるのではなく，関数値の分布そのものが無限遠で希薄になるために平均値が消えるような関数の集まりと考えられる．強認容性の構造の解明には，$\mathcal{N}(\mathbb{R})$ の元のわかりやすい特徴づけが望ましい．

**定理 2.2**　$f(x) \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ とする．$\epsilon > 0$, $R > 0$ に対し，

$$e_{\epsilon,R}(f) = \{\, x \in \mathbb{R}\,;\, |f(x)| > \epsilon,\ |x| \leq R \,\}$$
$$e_\epsilon(f) = \{\, x \in \mathbb{R}\,;\, |f(x)| > \epsilon \,\} = \bigcup_{R>0} e_{\epsilon,R}(f)$$

[5]概周期関数に関しては [6] を見よ．[2]，[1] はもっとも古典的らしく，[2] は未見だが，[1] はページを開くだけで迫力を感じる．なお，Bohr の事跡を研究した学位論文もある（[8]）．比較的新しいのでは，[3] があるが，ここでの議論とはほとんど関わらない．

とおく．$f \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$ のための必要十分条件は，任意の $\epsilon > 0$ に対し，

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{\|e_{\epsilon,R}(f)\|}{R} = 0$$

が成り立つことである．ただし，$\|E\|$ は集合 $E$ の測度を表す．

**例 2.3** 関数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & n < x < n + \frac{1}{n+1} \\ 0, & \text{その他の } x \end{cases}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

とおく．$f(x) \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$ であるが，$f(x) \notin \mathbf{L}^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < +\infty$, である．

重み関数 $\phi(x)$ を与えたときの $\phi$-認容的な関数の全体や，あるいは，強認容的な関数の全体というようなものについて，いろいろと考察はしてみたつもりである（[10]）が，しかし，十分な域には達してはいない．このことが，実は，次節に述べる平均合成積の議論の展開が不満足な水準に留まっている主な理由であろうと考えられる．紙数の関係もあり，強認容的な関数の例を次に挙げて，平均値の議論はひとまず終える[6]．

**例 2.4** $f(x), g(x) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ とし，

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+y) - g(y)|^2 \, dy$$

とおく．このとき，$\mathrm{e}^{-i\,x\,\xi}\, h(x)$, $\xi \in \mathbb{R}$, は強認容的であり，平均値については，

$$M(\mathrm{e}^{-i\,x\,\xi}\, h(x)) = \begin{cases} \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2, & \xi = 0 \\ 0, & \xi \neq 0 \end{cases}$$

が成り立つ．ただし，$\|\cdot\|_2$ は $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ のノルムを表す．

# 3 平均合成積

$\phi(x)$ を重み関数とする．有界可測関数の対 $f(x), g(x) \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ について，極限

$$\lim_{L\to+\infty} \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi\left(\frac{x-z}{L}\right) f(y-z)\, g(z)\, dz, \quad -\infty < y < +\infty,$$

が存在するとき，これを $f$ と $g$ の $\phi$-平均合成積といい，$f \otimes_\phi g(y)$ とかこう．このような対 $f, g$ は $\phi$-親密ということにする．定義式から明らかなように，この場合，関数

$$F_y(f,g) : z \quad \mapsto \quad f(y-z) \cdot g(z)$$

[6] §A 参照.

は $\phi$-認容的であって，その $\phi$-平均値が $\phi$-平均合成積に他ならない：

$$M_\phi(F_y(f,g)) = f \otimes_\phi\ g(y).$$

当然，$F_y(f,g)(x)$ が強認容的ならば，重み関数への言及は不要になる．このときは，対 $f$, $g$ は強親密であるということにする．さらに，

$$\lim_{L\to+\infty} \sup_{x,y} |\phi_L * F_y(f,g)(x) - f \otimes_\phi\ g(y)| = 0$$

が成り立つときは，対 $f$, $g$ は一様親密であるといおう．一様親密性は重み関数に依存しない．

**例 3.1**　$f \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ が $g(x) \equiv 1$ と $\phi$-親密（一様親密）な対をなすための必要十分条件は $f$ が $\phi$-認容的（強認容的）であることである．

**命題 3.1**　$f$, $g \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ は $\phi$-親密な対とする． $\phi(x)$ が偶関数であるか，あるいは，$f$, $g$ が強親密ならば

$$f \otimes_\phi g(y) = g \otimes_\phi f(y)$$

が成り立つ．

**例 3.2**　$f$, $g \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ は

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = f^\pm, \quad \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = g^\pm$$

を満たすとする．このとき，任意の重み関数 $\phi(x)$ に対し，$f$, $g$ は $\phi$-親密であって，

$$f \otimes_\phi g(y) = f^- g^+ \int_{-\infty}^0 \phi(x)\,dx + f^+ g^- \int_0^{+\infty} \phi(x)\,dx$$

である．したがって，$f \otimes_\phi g = g \otimes_\phi f$ が成り立つための必要十分条件は

$$(f^+g^- - f^-g^+)\left(\int_0^{+\infty} \phi(x)\,dx - \int_{-\infty}^0 \phi(x)\,dx\right) = 0$$

である．

**命題 3.2**　$f \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ は強認容的であり，さらに，任意の $g(x) \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ と強親密であるとする．このときは，$f(x) \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$ である．逆に，任意の $f(x) \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$ は任意の $g(x) \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ と一様親密である．平均合成積は $f \otimes\ g(y) = 0$ である．この意味で，$\mathcal{N}(\mathbb{R})$ を零イデアルとよぶことにする．

平均合成積に関しては強親密性だけでは十分な結論が導けないことがある．

**命題 3.3**　$f(x), g(x) \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ は一様親密な対とする．$f(x)$ が重み関数 $\psi(x)$ に関して $\psi$-認容的（または，強認容的）であれば，平均合成積 $f \otimes g(y)$ は $\psi$-認容的（強認容的）である．さらに，$g(x)$ が重み関数 $\phi(x)$ に関して $\phi$-認容的であれば，

$$M_\psi(f \otimes g) = M_\psi(f)\, M_\phi(g) \tag{2}$$

が成り立つ．

**系 3.1**　$f(x), g(x)$ は一様親密な対とし，$f(x)$ は強認容的とする．$M(f) = 0$ であれば $M(f \otimes g) = 0$ である．$M(f) \neq 0$ ならば，$g(x)$ は強認容的である．

**系 3.2**　$f(x), g(x)$ は強親密な対とし，$f(x)$ は強認容的とする．このとき，$f \otimes g$ は任意の重み関数 $\psi$ に関して $\psi$-認容的である．さらに，$g$ が（ある重み関数 $\phi$ に関して）$\phi$-認容的であれば，(2) が成り立つ．

**例 3.3**　$f(x), g(x), f_1(x), g_1(x) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ に対し，

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+y) - g(y)|^2\, dy,\ h_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(x+y) - g_1(y)|^2\, dy$$

とおく．$h(x)$ と $h_1(x)$ とは一様親密な対であって，

$$h \otimes h_1(y) = (\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2)\,(\|f_1\|_2^2 + \|g_1\|_2^2)$$

である．

一方，次のようなことが成り立つ．

**命題 3.4**　$f(x), g(x) \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ は，いずれも強認容的とする．$f$ と $g$ が重み関数 $\phi(x)$ に関して $\phi$-親密な対ならば，$f \otimes_\phi g$ は任意の重み関数 $\psi(x)$ に関して $\psi$-認容的であって，(2) が成り立つ．

**命題 3.5**　$f(x), g(x) \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ は重み関数 $\phi(x)$ に関し $\phi$-親密な対とし，$f(x)$ は強認容的，$g(x)$ は $\phi$-認容的とする．このとき，$f \otimes_\phi g$ は任意の重み関数 $\psi(x)$ に関して $\psi$-認容的であって，(2) が成り立つ．

しかし，$f$ と $g$ のいずれもが強認容的でないときは，重み関数の $\phi$ と $\psi$ が一致しても (2) が成り立たないことがある．

**例 3.4**　$f(x), g(x)$ を例 3.2 のものとする．重み関数 $\phi(x)$ について

$$\lambda = \int_0^{+\infty} \phi(x)\, dx$$

とおくと，

$$M_\phi(f)\, M_\phi(g) - M_\phi(f \otimes_\phi g) = (f^+ - f^-)\{(\lambda-1)^2\, g^+ - \lambda^2\, g^-\}$$

である．

なお，一方が周期関数の場合は強い主張ができる．

**命題 3.6** $f(x), g(x) \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ は $\phi$-親密な対とする．$f(x)$ が周期 $T > 0$ を持ち，$g(x)$ が $\phi$-認容的のとき，$f \otimes_\phi g(y)$ も周期 $T > 0$ を持つ．

平均合成積と（可積分関数との通常の）合成積との関係はいろいろな考察の手掛かりを与える．ただし，詳細は省略する[7]．なお，平均合成積の位相的な性質についても調べたが，散発的な知見に留まっている．

次は，平均合成積に関する結合法則を述べたものだが，十全の形ではない．

**補題 3.1** $f(x), g(x), h(x) \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ とする．$f(x)$ と $h(x)$ は強認容的とし，また，$f(x), g(x)$ および $g(x), h(x)$ は一様親密な対，さらに，$f(x), g\otimes h(x)$, $f \otimes g\,(x), h(x)$ は強親密な対をなすとする．このとき，

$$f \otimes (g \otimes h)\,(y) = (f \otimes g) \otimes h\,(y), \quad -\infty < y < +\infty,$$

が成り立つ．

**例 3.5** $f(x), g(x)$ を例 3.2 のものとし，第三の関数 $h(x) \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ を $\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = h^\pm$ を満たすものとする．$\lambda$ を例 3.5 のものとすると，

$$\begin{aligned} f \otimes_\phi (g \otimes_\phi h)(y) - (f \otimes_\phi g) \otimes_\phi f(y) \\ =&(f^+g^- - f^-g^+)(h^+(1-\lambda)^2 - h^-\lambda^2) \\ &+ (r^+h^- - g^-h^+)(f^+ - f^-)\lambda(1-\lambda) \end{aligned}$$

となる．したがって，結合法則の成立のためには強認容性は外せない．

# 4 平均合成積環

さて，話は前後するが，強認容的な元からなる $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ の部分集合を $\mathbf{L}^\infty_{ad}(\mathbb{R})$ とおこう．

**命題 4.1** $\mathbf{L}^\infty_{ad}(\mathbb{R})$ は，$\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ の閉部分空間であって，平均値 $M$ は $\mathbf{L}^\infty_{ad}(\mathbb{R})$ 上の有界線形汎関数である．

例えば，$\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ の元との合成積に関する不変性など，$\mathbf{L}^\infty_{ad}(\mathbb{R})$ についての若干の性質の確認は難しくない．しかし，$\mathbf{L}^\infty_{ad}(\mathbb{R})$ に関して納得の行く特徴づけの提示はまだできてはいないと言わざるを得ない．

さらに，応用上，本来の問題は，平均合成積に関して環をなすような $\mathbf{L}^\infty_{ad}(\mathbb{R})$ の極大部分集合の決定である．しかし，この部分は不十分なままである．したがって，平均合成積環と呼ばれるのにふさわしいものとして，このような極

[7]一部は §A に述べてある．

大な環が一意的に決まるかどうかについても，結論は得ていない．関数環をめぐる膨大な研究の累積を参考に，検討すべきアイデアは多岐にわたり，目が廻るというのが正直なところかも知れない．

最後に，Fourier 変換との関係についての示唆を考察する．

$$e_\xi(x) = e^{ix\xi}, \quad \xi \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

とおく．$\xi, \eta \in \mathbb{R}$ とすると，$e_\xi$ と $e_\eta$ は一様親密な対であって，

$$e_\xi \otimes e_\eta = \begin{cases} e_\xi, & \xi = \eta \\ 0, & \xi \neq \eta \end{cases} \tag{4}$$

が成立する．

**補題 4.1** $f \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ は強認容的であるとする．このとき，次の条件は同値である：

(a) $f$ と $e_\xi$ は強親密な対である；

(b) $f$ と $e_\xi$ は一様親密な対である；

(c) $e_{-\xi}\, f$ は強認容的である．

なお，以上の条件のもとで，

$$e_\xi \otimes f = M(e_{-\xi} \cdot f)\, e_\xi$$

が成り立つ．

**系 4.1** 一様親密な対をなす $f, g \in \mathbf{L}^\infty_{ad}(\mathbb{R})$ について，$e_\xi$ と $f$ および $e_\xi$ と $g$ も一様親密な対をなすとする．このとき，$f \otimes g$ と $e_\xi$ も一様親密な対になり，

$$M(e_{-\xi} \cdot f \otimes g) = M(e_{-\xi} \cdot f)\, M(e_{-\xi} \cdot g)$$

が成り立つ．

# A 付記

直線上の有界可測関数の認容性は，零イデアル $\mathcal{N}(\mathbb{R})$ によって示唆されるように，関数の無限遠での挙動の指標にもなっている[8]．

特に，強認容性は平均値を重み関数のしがらみから解放する．しかし，重み関数として

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & x < 0 \text{ または } x > 1 \end{cases}$$

[8]ちなみに，$f(x) \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ の強認容性は，関数 $y \mapsto f(x - Ly)$ が $L \to \infty$ のとき $x$ に関して一様に $M(f)$ に汎弱収束することと同値である．

をとると，

$$\phi_L * f(x) = \frac{1}{L}\int_x^{x+L} f(y)\,dy$$

である．したがって，

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & 1/2 < x < 1 \\ -1, & 0 < x < 1/2 \\ 0, & x < 0 \text{ または } x > 1 \end{cases}$$

とおくと，

$$\psi_{2L}(x) = \phi_{2L}(x) - \phi_L(x)$$

であり，しかも，

$$\lim_{L\to\infty} \|\psi_{2L} * f\|_\infty = 0$$

となる．これは，このままでは余り意味のある観察ではないが，強認容性とウェーブレットの関係を示唆するところがある．

一方，補題 4.1 は，無限遠での振動成分への興味を惹起する．(4) と合わせると，$M(e_{-\xi}\cdot f)$ が $f$ の $e_\xi$-成分を表すのではないかと期待されよう．もちろん，背後には，はなはだ怪しい，あるいは虫のよい，目論見ではあるが，

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\,d\nu_f(\xi) \tag{5}$$

と表されるのであれば，

$$f \otimes g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} M(e_{-\xi}\cdot g)\,e^{iy\xi}\,d\nu_f(\xi) \tag{6}$$

となるのではないかということがある．ただ，以下の考察でも想像されるように，この方向だけでは概周期性の議論との差別化が難しいかも知れない．

**問題 A.1**　すべての $\xi \in \mathbb{R}$ に対して，$e_{-\xi}\cdot f$ が認容的であるような関数 $f \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ の全体を $\mathcal{Q}(\mathbb{R})$ とする[9]．$\mathcal{Q}(\mathbb{R})$ を決定せよ．また，$\mathcal{Q}(\mathbb{R})$ は平均合成積に関して閉じているか？

$f \in \mathcal{Q}(\mathbb{R})$ に対し，その平均スペクトルを

$$\sigma^\mu(f) = \{\,\xi \in \mathbb{R}\,;\, M(e_{-\xi}\cdot f) \neq 0\,\}$$

[9] [4] 同様，古い文献で恐縮だが，[5] で Kahane は同種の条件を Ryll-Nardzewski の概周期性とよんでおり，Besicovitch の書物 [1] を引用している．ただし，恐らく記号や論述のためであろうが，[1] の該当箇所は見当がつかない．いずれにせよ，概周期性との関係を論ずる上で，[10] には調査不足と言われても仕方がない部分が確かにあるようである．なお，Web での検索では，この半世紀近い空隙を埋めるのはなかなか難しい．他方，Studia Mathematica 21 巻を借り出して眺めているうちに [9] を見つけた．重み関数を利用しての『Marcinkiewicz(-Besicovitch) 空間』の類比は直ちに思い浮かぶ．この方向の話題は今どうなっているのか，ここにも半世紀の重みがあるが，この遭遇自体は，Web だけでは得にくいものである．なお，関連するデータは数学だけでなく，広く情報関係，それも物理系，工学系から医学系に至るまでの本当に広大な分野にわたっているようで，昨今の大学図書館の再編に対して一般的に数学系が示している反応や姿勢が，数学研究者にとっても望ましいとは言えないのではないか，という感に囚われる．

で定める[10]．$f \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$ ならば明らかに $\sigma^\mu(f) = \emptyset$ である．また，$\sigma^\mu(e_\xi) = \{\xi\}$ も明らかであろう．

**命題 A.1** $f \in \mathcal{Q}(\mathbb{R})$ とする．$\sigma^\mu(f)$ はたかだか可算集合である．

$\sigma^\mu(f)$ が零集合であることは見やすい．実際，$M$ の線形性と有界性とから，任意の急減少な $v(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対し，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} M(e_{-\xi} \cdot f)\, v(\xi)\, d\xi = M\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}\, v(\xi)\, d\xi \cdot f\right) = M(\hat{v} \cdot f)$$

となる．ところが，$\hat{v} \cdot f \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$ だから，最右辺の平均値は 0 である．したがって，ほとんど到るところで $M(e_{-\xi} \cdot f) = 0$ である．$\sigma^\mu(f)$ が可算集合になることは，定理 2.1 により重み関数の選択が自由になるので，Kahane の論文 [4] に従って示すことができる．すなわち，$f \in \mathcal{Q}(f)$ ならば

$$\sigma^\mu(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\xi\, ;\, |M(e_{-\xi} \cdot\ f)| > \frac{1}{n}\right\}$$

右辺の合併集合の成分集合のおのおのが自己稠密な部分集合を含まない可算集合になるのである．

**注意 A.1** $\sigma^\mu(f) = \emptyset$ となるような $f \in \mathcal{Q}(\mathbb{R})$ の全体を $\mathcal{Q}_0(\mathbb{R})$ とおく．$\mathcal{N}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{Q}_0(\mathbb{R})$ は明らかであるが，それ以上のことがわからない[11]．

**系 A.1** $f, g \in \mathcal{Q}(\mathbb{R})$ が一様親密であれば

$$\sigma^\mu(f \otimes g) \subset \sigma^\mu(f) \cap \sigma^\mu(g)$$

となる[12]．特に，$f \in \mathcal{Q}_0(\mathbb{R})$ ならば，$f \otimes g \in \mathcal{Q}_0(\mathbb{R})$ である．

一方，一般に $f \in \mathbf{L}^\infty(\mathbf{R})$ に対し，$g \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}), \|g\|_1 \leq 1,$ との合成積 $f * g$ の汎弱閉包を $W^*(f)$ とかき，$f$ の汎弱平行移動凸包とよぼう．

**補題 A.1** $f \in \mathbf{L}^\infty_{ad}(\mathbb{R})$ ならば $M(f) \in W^*(f)$ が成り立つ．また，$f \in \mathcal{Q}(\mathbb{R})$ ならば $M(e_{-\xi} \cdot f)\, e_\xi \in W^*(f)$ が成立する．

前半は平均値の定義から明らかである（実は，$\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ で強収束している）．後半は $W^*(e_{-\xi} \cdot f) = e_{-\xi}\, W^*(f),\ f \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}),$ から見やすいであろう．

さて，$f \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ に対し，

$$c_\xi\, e_\xi \in W^*(f), \quad \text{ただし，定数 } c_\xi \neq 0,$$

[10] [4] に示唆され，[10] の定義を改めた．命題 A.1 を見よ．

[11] $\mathcal{Q}_0(\mathbb{R})$ は [4] の $R_0$ という関数集合と $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ との共通部分に一致する．したがって，[4] に若干の考察があり，特に，Théorème 2 は実質的に $\mathcal{Q}_0(\mathbb{R})$ を特徴づけているとも言える．しかし，平均合成積の計算などの示唆はそこから相当踏み込んでみないと得られないようである．

[12] [10] 所収の Proposition 6.1 の文言は正確ではない．

が成立するような $\xi \in \mathbb{R}$ の全体を $f$ の汎弱スペクトルといい，$\sigma^*(f)$ とかこう．汎弱スペクトルは古典的であり[13]，素性は把握しやすい．

**系 A.2** $f \in \mathcal{Q}(\mathbb{R})$ ならば，$\sigma^\mu(f) \subset \sigma^*(f)$ が成り立つ．

**補題 A.2** $g \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ とする．$f \in \mathbf{L}^\infty_{ad}(\mathbb{R})$ に対し， 合成積 $f * g \in \mathbf{L}^\infty_{ad}(\mathbb{R})$ であって，

$$M(f * g) = M(f) \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,dy$$

である．また，$e_{-\xi} \cdot f \in \mathbf{L}^\infty_{ad}(\mathbb{R})$ ならば，$e_{-\xi} \cdot (f * g) \in \mathbf{L}^\infty_{ad}(\mathbb{R})$ であって，

$$M(e_{-\xi} \cdot (f * g)) = \hat{g}(\xi)\, M(e_{-\xi} \cdot f)$$

である．ただし，$\hat{g}(\xi) = \int e^{-ix\xi}\, g(x)\,dx$ とする．

この結果，$c_\xi\, e_{-\xi} = f * g,\ g \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ と表せるならば，$c_\xi = \hat{g}(\xi)\, M(e_{-\xi} \cdot f)$ となることがわかる．だから，平均値 $M$ が $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ の汎弱位相で連続であるならば，$\sigma^*(f) \subset \sigma^\mu(f)$ が成り立ち，したがって，$\sigma^*(f) = \sigma^\mu(f)$ が言えるはずである．ところが，一般に $f \mapsto M(f)$ は $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ の汎弱位相では連続ではない．

**例 A.1** $n = 1,,2,\cdots,$ に対し，

$$c_n(x) = \begin{cases} 1, & |x| < n, \\ 0, & |x| \geq n \end{cases}$$

とおく．$c_n(x) \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$ であり，特に，$M(c_n) = 0$ である．$c_n(x)$ は $c(x) \equiv 1$ に汎弱収束する．しかし，$M(c) = 1 \neq 0 = \lim M(c_n)$ である．

そこで，$f \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ が一様連続（$\in \mathbf{C}_{unif}(\mathbb{R})$）である場合に限って，$f$ の平行移動凸包，すなわち，合成積 $f * g,\ g \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}),\ \|g\|_1 \leq 1,$ の $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ の強位相での閉包 $W(f)$ を考察しよう[14]．この場合，$W(f) \subset W^*(f)$ は明らかである．また，周知のように，$f$ が概周期的であることと $W(f)$ が $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ で全有界（したがって，コンパクト）であることとは同値である．

**系 A.3** $f \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}) \cap \mathbf{C}_{unif}(\mathbb{R})$ ならば $M(e_{-\xi} \cdot f)\, e_\xi \in W(f)$ である．

---

[13] [6] p.170. ただし，$\sigma_{w^*}$ とかかれている． $f \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ の汎弱スペクトル $\sigma^*(f)$ は $f$ の Fourier 像 $\hat{f}$（pseudo-measure）の台 $\Sigma(\hat{f})$ と一致する（Theorem 6.1, p.170）．

[14] [6], p.157. ただし，もともとの $W(f)$ の定義は $f$ の平行移動の凸結合の全体，$\sum b_j\, f(\cdot - y_j),\ \sum |b_j| \leq 1,$ の $\mathbf{L}^\infty$ ノルムによる閉包であって，$f$ の一様連続性は要求されない．しかし，合成積経由の表現との一致は $f$ が一様連続でなければ成り立たない．議論の混乱を避けるためには，概念を分けて論ずるべきであるが，現段階では煩雑に過ぎよう．他方，$f$ の平行移動の凸結合の全体の汎弱位相による閉包と $W^*(f)$ が一致する．

一般に，$f \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ に対し，

$$\sigma(f) = \{\, \xi \in \mathbb{R},\ c\, e_\xi \in W(f),\, c \neq 0 \,\}$$

を $f$ のノルム・スペクトル[15]という．明らかに，$\sigma(f) \subset \sigma^*(f)$ である．また，定義から明らかなように，

**命題 A.2** $f \in \mathbf{L}^\infty_{ad}(\mathbb{R})$ とする．このとき，

$$M(f) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \notin W(f)$$

が成り立つ．

**系 A.4** $f \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}) \cap \mathbf{C}_{unif}(\mathbb{R})$ ならば，$\sigma^\mu(f) = \sigma(f)$ である．

**例 A.2** 例 2.4 の $h(x)$ は $\mathcal{Q}(\mathbb{R}) \cap \mathbf{C}_{unif}(\mathbb{R})$ の元であり，$\sigma^\mu(h) = \sigma(h) = \{0\}$ を満たす．

なお，$g \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ と $f \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ の合成積については常に $f * g \in \mathbf{C}_{unif}(\mathbb{R})$ であり，したがって，$g$ の積分が消えなければ，$\sigma^\mu(f) = \sigma(g * f) = W(g * f)$ が成り立つ．

## 参考文献


[1] A. S. Besicovitch. *Almost Periodic Functions.* Cambridge University Press, 1934; Dover Publications, 1954.

[2] H. Bohr. *Almost Periodic Functions.* Chelsea Publ. Co., 1947.

[3] C. Corduneanu. *Almost Periodic Functions.* Interscience, 1961; Second Edition: Chelsea Publ. Co., 1989.

[4] J.-P. Kahane. Sur les coefficients de Fourier-Bohr. Studia Mathematica, 21 (1961/62), 103 - 106.

[5] J.-P. Kahane. Sur les fonctions presque-périodiques généralisées dont le spectre est vide. Studia Mathematica, 21 (1961/62), 231 - 236.

[6] Yitzhak Katznelson. *An Introduction to Harmonic Analysis.* Dover Publications, 1976.

[7] Paul Lévy. *Problèmes Concrets d'Analyse Fonctionnelle.* Gauthier-Villars, 1951.


[15] [6], p.159.

[8] Kurt Ramskov. The mathematician Harold Bohr. PhD Thesis. Summary at http://www.math.ku.dk/˜ramskov/docs/phd/phdcontent.htm

[9] K. Urbanik. Fourier analysis in Marcinkiewicz spaces. Studia Mathematica, 21 (1961/62), 93 - 102.

[10] A. Yoshikawa. Mean values and mean-convolution products. Kyushu Journal of Mathematics, 50 (1996), 385 - 436.

[11] A. Yoshikawa. Modulation equations for planar phases and asymptotic weak solutions. Kyushu Journal of Mathematics, 52 (1998), 99 - 148.