

職人たちの知恵 vs 現代数学

筑水会館
平成23年1月28日

吉川 敦

(久留米大学附設中学校・高等学校長)
九州大学名誉教授(数理学研究院)・理学博士

yoshikawa_atsushi@kurume-u.ac.jp

今回の講演は、全くの偶然から生じたもので、果たして医学系の方々が満足させられるものなのかどうか、まことに手探りで、かつ、恐る恐る、準備したものです。

実は、ずいぶん前に

William M. Ivins, Jr. : Art & Geometry A Study in Space Intuitions, Dover, 1964; Harvard University Press, 1946.

を目にし、同書が、古典ギリシアから現代に至る西欧文明を空間認識の変遷をもとに通覧していることに示唆を受け、以来、うっすらとはあるが、われわれ日本人の時空認識の構造と、それによる日本文明の規定について、関心を抱き続けてきた。

別項で挙げた微分積分学がなぜ彼の地で成立し、此の地では生まれなかったのかという設問は、その一環である。この種の問いは、昔から日本の碩学たちの関心の的であるけれども、浅学菲才の身としてはいくつかの視点の提供に留まるものであることを承知で、敢えて皆さまの貴重なお時間をお借りするものである。

1. 最初に「職人」について

まず:

「職人の知恵」とは何か、少なくとも「職人」とは何かについて:

単に「職人」というだけでは、そのイメージは人それぞれに異なっていると考えるべきだろう。

それでは、しかし、話は成り立たない。

そこで、少なくとも、この講演では、「職人」を**どう理解し、どう限定して**話を進めていくかを明らかにしておかなければならない。

実は、わたくしも標題を定めるに当り、「職人」という言葉の意味を極めて漠然としか意識していなかった。

ただ、念頭に浮かんでいたのは、今日にも残る古典的な作品を残してきた有名無名の彫刻家や建築家たちを含む、特に、実際の作品を構想し、現場で、作業を自ら行ない、あるいは指揮した人たちのことである。

このアイデアに従って、ここでは、

実際に、目に見え、手に触れ、さらに、鑑賞であれ、日常であれ、不可欠な用をなす「現物」を、しかも、極めて「高い完成度」で実現している人たちを、「職人」と呼ぶべきである

と考える。なお、「現物」とは何か、これも気になるところではある。

特に、手仕事で製品を作っている人たちに限定しているわけではない、誤解を招きやすいようであれば、「大職人」と言い換えるべきか。

ただし、このような「職人」の定義では、階層としての「職人」や「工人」と「技術を有した趣味人」との区別は曖昧になってしまう。また、時代や洋の東西による「職人」の社会的な地位の問題もある。

最近でも、例えば、日本では

「モノヅクリこそが日本の生きる道だ」

という主張がなされる。

モノヅクリとは、ここで「職人」を定義しようとしている立場からは、この表現は

「職人たることが日本人の生きる道だ」

と言っていることに近いようにも思えよう。だが、こう言うと、また、混乱する。

少なくとも、この講演の文脈では、

「職人」は議論の前提として抽象的に定義されているだけである

ことを注意しておきたい。

それでは、「職人の知恵」とは何だろうか。

概ね以下の三点に集約されるのではないだろうか。

1. 「現物」についての**実用的で詳細な知識**。「現物」そのものだけでなく、「現物」をめぐる環境をも包括する**総合的な感覚と想像力**。
2. 「現物」を「高い完成度」で実現するための**技術的な諸知識**。**理屈ではなく、実際に利用し、かつ有効な種々の工夫の集積**。
3. 一にも二にも優れた「現物」の実現を図るという**目標実現型、目的指向型**の、しかも決して**俺め態度**。

この三点は独立ではない。

ただし、この講演ではどちらかという点に注目する。

それでは、なぜ「職人の知恵」が文明を規定すると思うのか。

職人は文明の子である。一方、人は「職人」の成果の中で日常を過ごす。

作品完成に至る過程は直接には不承知であっても、間接的には誰もが職人の成果から影響を受けているのである。

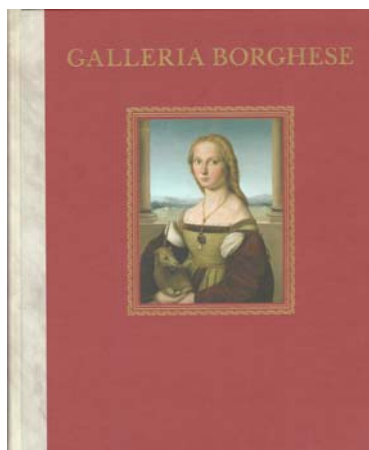
それら成果は慣れ親しんだものとして当然の前提になっているはずだが、ある日ある時、突然に、**意味の自覚を迫る**ということもあるのではないか。

2. 「職人」の仕事のいくつか

ボルゲーゼ美術館展 平成21年12月（京都国立近代美術館）:

細密モザイク画二枚を観たところから始めたい。

後に、東京でも展覧された。ご覧になった方もおられるだろう。支倉常長の等身大の肖像画が展示されてもいた。



図録表紙

ラファエロ：
一角獣を抱く
婦人像



パウルス5世は、ガリレオが、コペルニクスの太陽中心説について（真理としてではなく）「仮説」と断ることを条件に、著作の出版を認めた。

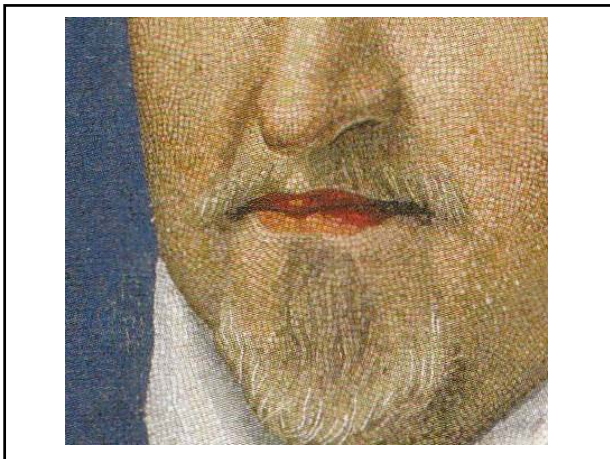
6
1954 チェッコ・プロヴェンツァーレ
（パウルス5世（カミッロ・ボルゲーゼ）の肖像）
1925年
モザイク
47 x 34cm
Marcello Provenzale
Portrait of Pope Paul V (Camillo Borghese)
Ritratto di Paolo V Borghese
1925
Mosaic
47 x 34 cm
Inv. no. 495

教皇パウロ5世（ボルゲーゼ）の肖像画であるが、細かいモザイク片を組み合わせて制作されたものである。

詳細を見ると、同一寸法、同一形状ながら色調の異なる多数のモザイク片を教皇の肖像を再現するように配置してある。
今日的な言葉で言えば、モザイク片には教皇の顔の皮膚などの色彩の局所情報が反映しており、つまり、これらはデータであり、さらに、これらの配置法、つまり、教皇像を再現すべく配置するということは、モザイク片を並列するというアルゴリズムに基づいたプログラムであると言うことになるのではないか。ただし、いわば、職人技という形でプログラムが実行されていることになる。

細部を見、また、二三の例を見よう。モザイク画自体は古くからあり、歴史的経過を重視するのなら、はるかに古い時代の作品を例示すべきであったかもしれない（…汗！）。





- このモザイク画の構造は次の通り:
1. ボルゲーゼ枢機卿の顔の「本来の」色彩と陰影、光線量の想定がある
 2. ボルゲーゼ枢機卿の顔を小さなモザイク片に分割する
 3. 各モザイク片では、そのモザイク片内の本来の光線量の「平均値」を光線量として指定する
 4. 以上、要するに、ボルゲーゼ枢機卿の顔の有限要素近似になっている
 5. 他方、モザイク片をさらに小さくしていけば、各点での光線量情報に相当するものになるであろうという期待ができる。



時代も下がり、文脈も異なるが、身近なところも見てみよう。

基本的にアナログ的な石組みの例（福岡市中央区平尾3丁目 松風園(旧田中丸邸)外周)。



定型に切り出された石や煉瓦状の定型素材を用いずに行われた石垣の組み上げ

石垣の機能には問題がなく、意匠性も高い。だが、規格化の意志や関心は見えない。

色の異なる経糸横糸を種々に織りあわせて出来上がる織物の図柄も複雑な大域構造がより単純な局所構造の規則的な集積として得られている。ただし、この場合、**局所構造にも意匠上の固有の性格が反映している。**

松井別館 花かんざし
ロビー展示品(西陣織)



伊藤若冲の「モザイク風」の絵である。「モザイク風」枠は意匠として選択されており、装飾効果が主眼であろう。また、画題は幻想的である。

ボルゲーゼ枢機卿のモザイク画とは発想上も技法上も全く違う。細かい格子枠、あるいは、太い縦糸横糸織りの布に装画したものを念頭に置いたものと理解すべきであろう。

狩野博幸 森村泰昌 ほか
異能の画家 伊藤若冲
新潮社 2008

白象群獣図 部分



左は段通の商品見本図から。
(鍋島段通吉島家)

<http://www.nabeshimadantsu.jp/home.html>

一点における構造は色系に集約されており図柄はようやく大局的に把握される。

だが、モザイクの場合のように、細部の構造が自明なほどに見えやすいわけではない。

3. 職人デューラーと数学者デューラー

デューラーは、(この講演の意味でも)典型的な「職人」である:

Albrecht Dürer : 1471 -- 1528

ニュルンベルクの職人、彫金師の子である。名付親:印刷師 Anton Koberger. 絵師 Michael Wolgemut のもとで徒弟修業をした。

その著 **Underweysung der messung** (測定法教則)には「職人の知恵」が詰まっている。

ニュルンベルクの有力者 Willbald Prickheimer の知遇を得、かつ、**画家**として大成。晩年には**市の有力富裕層の一員**に数えられた。

ただし、「**職人**」が「**紳士**」として**遇されていないこと**に大きな**不満**を抱いていた → **『測定法教則』**の出版

Underweysung der messung の注釈書および翻訳書:

下村耕史 訳編:「測定法教則」中央公論美術出版 2008

Albrecht Durer: Geometrie presentation et traduction de Jeanne Peiffer, Seuil, 1995

Durer の「測定法教則」は Clavius によってラテン語に訳され、学者の世界に紹介された。必ずしも肯定的な読まれ方をしたわけではなかったようだが、Johannes Kepler や Galileo Galilei にも影響は及んでいる。

Underweysung der messung そのものは、Durer の工夫というよりも Durer が所属していたドイツ職人階級の技術的知見の集積を Durer が当時の幾何学的体裁に整えて整理したものであった。

「測定法教則」
第一書 図18

4分の1円弧を12等分
等分点から下ろした垂線の長さ

デューラーの葉形曲線
といわれるもの

半円周を12等分
等分点と中心を結ぶ半径上に、周上の
点からの距離が対応する垂線の長さにな
る点をとる

これらの点をなめらかに結ぶ

Albrecht Duerer: Geometrie,
ed. Jeanne Peiffer. Seuil, 1995 か
ら

デューラーは、ここで二つの大事なことをしている:

- 1) 4分の1円周を等間隔に細分し、細分点から半径に下ろした垂線群を作っている。
- 2) これらの垂線群を、改めて、一点から等角度間隔に発する図形に再配置して、端点をつないだ曲線を生成している。

デューラーの曲線の扱いは、基本的に、この場合と、同じ方式をとっている。

デューラーの目的は明らかに意匠であるが、分析的で汎用性のある経過をたどっている。

デューラーの葉形曲線

$N=30$ (4分の1円弧を31等分割した場合)

Maple で作図

左側の図形において、右から n 番目の垂線の長さ y_n

$$y_n = \sin \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{n}{N}\right) = \cos \frac{n\pi}{2N}, \quad n = 1, \dots, N$$

右側の図形において、右から n 番目の径は垂直軸 (y 軸) から $\frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{N}$ の角にあって、その長さは y_n である。

したがって、この径の端点は

$$\left(-\cos \theta \sin 2\theta, \cos \theta \cos 2\theta\right), \theta = \frac{n\pi}{2N}, \quad n = 1, \dots, N$$

すなわち、右の図形の曲線は、 $t = \cos \theta$ として

$$x = -2t^2\sqrt{1-t^2}, \quad y = t(2t^2-1), \quad 0 \leq t \leq 1$$

の上にある。

両辺を二乗して、

$$x^2 = 4t^4 - 4t^6, \quad y^2 = 4t^6 - 4t^4 + t^2$$

これより

$$x^2 + y^2 = t^2$$

であり、第1式に代入して、

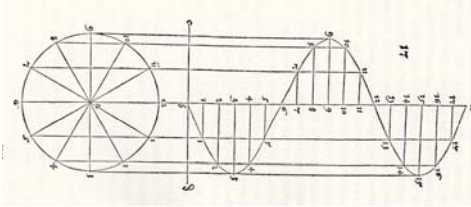
$$x^2 = 4(x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 + y^2)^3, \quad -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \leq x \leq 0$$

$$4(x^2 + y^2)^3 - 4(x^2 + y^2)^2 + x^2 = 0$$

「測定法教則」第一書17図(を右90度回転したもの)

石工たちの螺旋階段設計のためである。

「渦巻き」と訳されている。



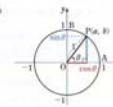
(邦訳書27ページ、構成法は26-27ページ。)

「角」というアイデアがあったわけではないが、現代風に言えば、「角」の減少方向に、つまり、(アナログ)時計の針の回転方向に沿ってのグラフ、つまり、正弦曲線を水平軸に関して折り返したものになっている。

4 三角関数のグラフ

A $y = \sin \theta$, $y = \cos \theta$ のグラフ

右の図のように、角 θ の動径と単位円の交点を $P(a, b)$ とすると $\sin \theta = b$, $\cos \theta = a$ となる。これらのことを用いて、関数 $y = \sin \theta$, $y = \cos \theta$ のグラフをかきことができる。

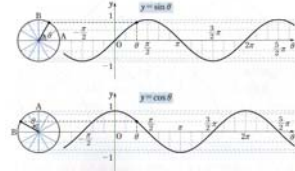


三角関数の**基本的な性質を視覚的に明らかにする定番の正弦曲線・余弦曲線**の図である。

一体、誰が最初に、これらの曲線を意識したのだろうか。

数学史家に問い合わせたが、しっかりとした返答はなかった。

デューラーが最初であったかも知れない。



正弦曲線

余弦曲線

(数学Ⅱ改訂版(数研出版)113ページ)

正弦曲線、余弦曲線は、通例、**弦の振動**との関係で説明される。両端を固定して強く張った糸を弾いて観察される振動の形に正弦曲線の一部が見られる。

三角関数は、円関数と呼ぶのが本来適当だと言われるくらい、円との関わりが深い(高木貞治:解析概論 第三版 岩波書店)。

螺旋階段の設計図面に、正弦曲線に相当するものが現われることは不思議でも何でもないことではあるが、文人、学者の類も螺旋階段を上下して日々を過ごしていたであろうだから?

正弦曲線は、高校数学の標準的な題材である。しかし、三角関数という「関数」が明瞭に意識されるようになったのは、時代が下がってからであった。したがって、理念としての三角関数のグラフは、大分後まで、存在しなかったはずである。

しかし、実質的な三角関数のグラフは、構成法も覚えて、デューラーには知られていた。

デューラーが紹介している手法は、**比較的単純な形の構成要素を多数積み重ねて**、最終的には、細部を削り上げ磨き上げて、なめらかな曲線(や曲面)を実現する方法である。

例えば、「渦巻き」(前のスライド)の構成を見よ。4分の1円周を3等分し、結局、円周上に12点を定め、これらから水平線に垂線を下ろし、水平線に等間隔で配置した点から、これらの垂線の長さを方向を考慮して、垂直に測って、「渦巻き」の上の点を定め、残りの作業は、これらの点をなめらかに結ぶことである。

「分析」と「総合」を体系的に行っているわけである。

細かい部分だけに着目するものごとは単純化されるものだという実感があつたことを推察させる。

小さくて単純なものからは、集めた次第で、どんな複雑な形でも描けるという感覚もあつたであろう。

Jeanne Peiffer 教授 (フランス、CNRS), **Durer は「数学者」と呼ばれるに値する**と言ひ、次の3点を理由に挙げる:

1. Durer 自身によるいくつかの曲線類の発見。ならびに、立体的断面図を用いての円錐曲線の扱いに数学的貢献が認められること
2. ドイツ文化圏に正統遠近法(中心射影法)を最初に紹介したこと
3. 形に対する喜びの感覚が著しいこと

もとより、わたくしも同意する。



メレンコリア I (一五二四)

物想う次第は職人である
背後の魔方陣に制作年代
が記され散乱する作年代
や幾何学的立体など興味
深い

(芸術新潮100三年五月号から)

4. 微分積分学の基本定理について

ニュートンの微分積分学 (18世紀前半)

アイデアの基本: verbal には

どのような複雑なものも単純な(すなわち、標準化された)微細因子の集積として得られるという主張である。

微分積分学は、数学的対象について、標準化された微細因子への分解法(微分法)と標準化された微細因子からの集積法(積分法)を与えた。

数式で把握することは技術的には必要な要請であるが、言語化することは概念そのものの拡がりを感じ取るためには不可欠である。

非学術的見解として:

先行事例の典型として、定型のレンガや敷石が敷き詰められた道路、定型に切り出された石を積み上げた城壁や石造建造物を挙げたい。

いい加減なテーゼ: 微分積分学は職人の技能の延長であった。

「いい加減」というのは「検証可能性」の問題があるからである。

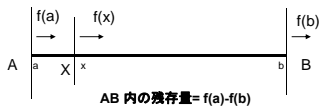
ルネッサンス(15世紀) ↔ 「無限」の合理的把握
 Perspective
 透視・絵画
 人文主義者・画家・職人

ある種の集大成: アルブレヒト・デューラー 『測定法教則』

Underweysung der messung, (Nurnberg 1525, 1534)

邦訳: 下村謙史, 中央公論美術出版, 2008. 数学的解説(三浦伸夫)付き。

「微分積分学の基本原理」を言葉で表すために、ある直線に沿って流れる何らかの量の様子を考えてみよう。その直線の一部 AB にだけ着目する。



AB 上の点 X を通過する量を、X の座標を x で表すとして、 $f(x)$ とする。

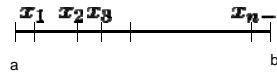
線分 AB に残っている量は、A を通過して入ってくる量 $f(a)$ から B を通過して出て行く量 $f(b)$ を引いたもの、すなわち、

AB 内の残存量 = $f(a) - f(b)$

である。ちなみに、これは大域量である。

それでは、点 X に残っている量はどんなものか

区間 $[a, b]$ 分割点列 $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$



$a = x_0, b = x_n$ として、区間 $[a, b]$ での残存量は小区間での残存量の和:

$$f(a) - f(b) = f(a) - f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) - f(b) \\ = f(x_0) - f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) - f(x_n)$$

となる。小区間に分けて考えることについてはデューラーの図を思い出してほしい。ここで、右辺の典型的な項は、つぎのように書ける:

$$f(x_j) - f(x_{j+1}) = \frac{f(x_j) - f(x_{j+1})}{x_{j+1} - x_j} \cdot (x_{j+1} - x_j)$$

分割を細かくすればするほど、小区間の数、したがって、このような項の数が増える。

$\frac{f(x_j) - f(x_{j+1})}{x_{j+1} - x_j}$ という量は 区間 $[x_j, x_{j+1}]$ における

残存量を区間の長さで割ったもの、すなわち、区間あたりの残存量である。

分割を細かくしていくとき、点 x を含んだ区間だけについて、区間あたりの残存量を考えよう。これらは数値の列になる。

点 x における残存率というべきものは、

点 x を含む区間あたりの残存量の列を通じて「合理的」に抽出される量

である。極限移行によって「合理性」が与えられるとき、微分積分学の第一歩が始まる。今の場合(高校教科書の水準であれば)

$$x \text{ における残存率} = -f'(x)$$

である。

通例、変化率、微分係数あるいは接線勾配として扱われるが、その「直前」を意識しておくことが大事だろう。

例えば、平面内の一点について、その点を含む円板なら円板の系列、正方形なら正方形の系列のように、その点を含む領域の系列があるとする。これらの領域は仮想的なものよい。

すると、領域の面積からなる数値の列が出来上がり、領域が当初の点を含んでいるという限定のもとで、どんどん小さくなるとすれば、面積の数値列は 0 に収束するだろう。

これは、一点 x を含むような直線上の区間の列で起きること全く同様のことである。

平面内に、物理法則のように、ある量の場があり、その場の効果が、これら小領域に一定の方式で及んでいるとしよう。

数値化された効果を領域に対する場の作用量とも呼ぼうか。作用量については、数学的には的確に計算できるものである必要があるが、verbal には詳細を知らなくてもよいとする。

$$\text{領域あたりの場の作用量} = \frac{\text{領域に対する場の作用量}}{\text{領域の面積}}$$

となる。この場合も、領域の列がある点に収束していくとき、該当する「領域あたりの場の作用量」の列が一定値を定めることがあるだろう。こうして、

$$\text{点における場の作用率}$$

が定められる。

本来は、「点における作用量」とでもいうべきものが概念的に確定できるものであれば、しかるべき領域における作用量は、この領域内の各点での「点における作用量」を集めることで得られるであろうし、また、それによって、「作用」の構造もよくわかるはずである。

ところが、「点」には大きさがなく、他方、それにもかかわらず、「領域」が「点」の集まりとして得られるのは、領域内に「点」が「無限」にあるからであるとするのは、自然だろう。

また、大きさがなく「点」への作用量は、想定しえたとしても0となると考えるのが自然であろう。そこで、「点における作用率」という形のものが意味を持つてくる。

ただし、実際に(数学的に)「点における作用率」なるものが具体的にどのような場の作用の場合に計算できるかを論ずることは別の話になる。この段階となると、数学的な詳細技術に立入らざるを得ない。

以上の趣旨は、「点における場の作用量」というものを考えれば、どうしても仮想的なものになり、しかも、「点における領域の面積」(あるいは、「点における区間の長さ」というべき仮想量との組合せで、

$$\text{点における場の作用量} = (\text{点における場の作用率}) \times (\text{点における領域の面積})$$

と表されるべきだということである。しかも、この表現は

$$\text{領域の面積} = (\text{点における領域の面積}) \text{を領域内の点について「集めた」もの}$$

が「合理的に」意味を持つように理解されなければならないことになる。すると、

$$\text{領域における場の作用量} = (\text{点における場の作用量}) \text{を領域内の点について「集めた」もの}$$

となる(実は、これが「**微積分学の基本定理**」(口唱版)である)。

大域的な様子が細部の積み重ねからわかるとするのは、作品全体、つまり、大域的なものが、魔法でも使わない限り、一挙に出来上がることはなく、こつこつとした作業で組み上げて行かなければならないことを知るまさに(大小を問わない)職人の知恵である。

だが、細分ないし分割が無限個あり、細分の各小単位の大きさが無限小であっても、この手法や過程が成立するに違いないと信じるのは、職人の及ぶところではない。この飛躍は、天才のものであろう。

実際に、前のスライドで示した「微積分学の基本定理(口唱版)」

$$\text{領域における場の作用量} = (\text{点における場の作用量}) \text{を領域内の点について「集めた」もの}$$

が成り立つためには、いくつかの定性的な前提があることがわかる。

定性的な前提はつぎの3点である。いずれも実は厳格に表現できる数学的手続きに対応している(はずのものである)。

前提1. 問題となる(大域的な)領域が、最終的には、点の集まりと言えるような、大きさが極めて小さい小領域に分割されること

前提2. 場の作用は、大域的な領域に対しても、その細分の小領域に対しても基本的に同じであること

前提3. 細分の各小単位の領域への場の作用の結果が、全体としては、大域的な領域に対する場の作用に一致すること

直線上の「流れ」 f の場合は前提が満たされている。したがって、

$$\text{区間 } [a, b] \text{ における残存量} = (\text{各点における残存量}) \text{を区間内の点について「集めた」もの}$$

となる。そこで、仮想量「点における区間の長さ」を dx と表すと、

$$\text{点における残存量} = (\text{点における残存率}) \cdot dx = -f'(x) dx$$

と書き表すのがよい。

$$\text{区間の長さ} = (\text{点における区間の長さ}) \text{を区間内の点について「集めた」もの}$$

について、「集めた」を**積分記号**で表すと、区間 $[a, b]$ の場合なら $b - a = \int_a^b dx$ したがって

$$\text{区間 } [a, b] \text{ における残存量} = f(b) - f(a) = \int_a^b (-f'(x)) dx = - \int_a^b f'(x) dx$$

あるいは

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$$

となる。つまり、1変数版の「微積分学の基本定理」になる。

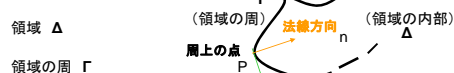
平面内のある量の場とその作用の効果を考えてみよう。

領域について、場の作用としては、その周を経由することになる。しかも、先の前提1～前提3が満たされるような作用でなければならない。

実際に、例えば、周を通っての場の作用量の流入を計算しようと考えると、技術的な二三点を明確化しなければならない。場の作用が領域の周を通って出入りするとはどういうことかをはっきりさせなければならないわけである。

まず、領域の周の点において、その点における**接線**と**接線に直交する法線**が考えられるとする。場の作用を接線方向と法線方向に分解し、特に、**法線方向は領域の内部に向う**ように向きを指定しておこう。**接線方向は領域の内部が左側になるように向きを付けておく**のが習慣である。

以上に従って、**場の作用を法線方向と接線方向に分解する**。



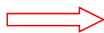
すると、

- A. 領域に対する周を通っての作用の**流入量**は、**法線方向の作用量**を周上の点について集めた結果として表わされることになる。
- B. 領域に対する周に沿っての作用の**巡回量**は、**接線方向の作用量**を周上の点について集めた結果として表されることになる。

いずれも、前提1～前提3を満たしていることが予想されている。

場が与えられたとき、A, B いずれについても、一般の領域の周については、数学的にも決して自明ではない。特別な形の領域、例えば、円板とか、長方形の場合には、比較的容易に計算できる。しかし、その場合でも、計算は**技術的詳細**に属することである。他方、**原理的な要点の把握**は言語によって可能であり、また、原理的な把握が質的な判断の基礎になるのだから、そのような議論の構成はしておかなければならない。

原理的な要点把握
(言語)



技術的詳細
(固有の技法)

原理的な要点把握と技術的詳細の中間に、わかる人には適切という**中間的表現**もある。要するに、言語によって原理的な要点把握をする人には符牒にしか見えないが、技術的詳細に踏み込んでいるわけでもなく、その示唆を与えるだけのものだが、準備と訓練のもとで、正確に読み取れるものである。

平面内に場 $F(Q) = (u(Q), v(Q))$ が働いているとする(点 Q において)。

領域 Δ の周 Γ の点 P において、場 F の接線方向、法線方向の成分はそれぞれ $F_t(P), F_n(P)$ とする (記号だけである。実際の計算法は省略)。

このとき、領域 Δ への流入量、巡回量は、それぞれ

$$\int_{\Gamma} F_n(P) d\sigma(P)$$

$$\int_{\Gamma} F_t(P) d\sigma(P)$$

と書くことができる(符牒ではあるが、周 Γ に沿っての「**線積分**」といわれる)。

これらは、実際に計算するなど、必要に応じて厳格に定義できるものである。

領域 Δ の点 Q のまわりの小さな領域 D についても、流入量や巡回量を考えることができる。これらの量を、領域 D の面積で割れば、領域あたりの流入量や巡回量が得られる。

D の周を C とし、 D の面積を $|D|$ で表せば、領域あたりの流入量、巡回量は、次のようになる(符牒では)：

$$\frac{1}{|D|} \int_C F_n(Q) d\sigma(Q),$$
$$\frac{1}{|D|} \int_C F_t(Q) d\sigma(Q)$$

ある点を含む小領域群について、領域あたりの流入量、巡回量を考えることにより、その点における流入率、巡回率を得ることができる。

そこで、仮想的な「点における領域の面積」を $dxdy$ とおくと、仮想的な量、「点における流入量」、「点における巡回量」は次のようになるであろう：

$$\text{点における流入量} = \text{点における流入率} \cdot dxdy$$

$$\text{点における巡回量} = \text{点における巡回率} \cdot dxdy$$

これらを領域 Δ の点について「集めた」ものが、領域 Δ における流入量、巡回量になるわけである。

ところで、場が $F(Q) = (u(Q), v(Q))$ で与えられているとき、 xy -座標のもとで、点 Q における流入率、巡回率は計算できる：

$$\text{点における流入率} = -u_x(Q) - v_y(Q)$$

$$\text{点における流入量} = -(u_x(Q) + v_y(Q)) \cdot dxdy$$

$$\text{点における巡回率} = v_x(Q) - u_y(Q)$$

$$\text{点における巡回量} = (v_x(Q) - u_y(Q)) \cdot dxdy$$

例によって符牒ではある(ただし、添え字は偏微分を意味する)。

領域の周を通過する場の流入量は、領域内の各点における流入率を集めたものである：

$$\int_{\Gamma} F_n(P) d\sigma(P) = - \int_{\Delta} (u_x(Q) + v_y(Q)) \cdot dxdy$$

領域の周を回る場の巡回量は、領域内の各点における巡回率を集めたものである：

$$\int_{\Gamma} F_t(P) d\sigma(P) = \int_{\Delta} (v_x(Q) - u_y(Q)) \cdot dxdy$$

Green-Stokes の定理という、微分積分学の基本原理(二次元版)。これ以上の説明は省略する。

5. 付録:理論と実際, 建前と本音

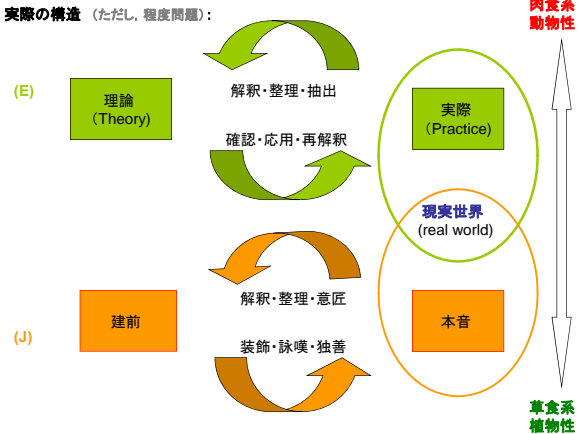
西欧知識人の発想: (政治家が(できても)この手の発言をする)



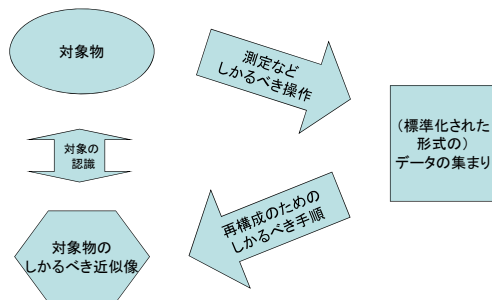
一見似ている(二元論的)二項関係:



実際の構造 (ただし, 程度問題):



ちなみに, ボルゲーゼ枢機脚のモザイク画などからは, 次のような図式が浮かび上がってくる:



多様な現実から少数原理を抽出し, それらを用いて, 現実の信頼できる描像を作り, 現実の再解釈を行う, そういう次第は, 西欧の古典的科学研究に明らかである.

フーリエ Jean Baptiste Joseph Fourier の「熱の解析的理論」の序章冒頭は荘重な響きの文章で始まる:

レコーズプリモルディアル・ヌヌーソソポアンコニユ,
メ・エルソソタシュジェッティ・アデロフ・セーンブルエコンスターント,
ク・ロンブーデクヴリール・パルロブセルヴァシオン・エ
ドソ・レテュド・エツ・ロブジェドラフィロソフィナチュレール

宇宙の働きは, その大元となると我々には全くわからなくても,
簡単に恒常的な法則に従って現われるので,
観察によって見出すことができる。
そして, 自然哲学の研究対象になるのである。

**Les causes primordiales ne nous sont point connues;
mais elles sont assujetties à des lois simples et constantes,
que l'on peut découvrir par l'observation, et
dont l'étude est l'objet de la philosophie naturelle.**

Fourier は, 上掲書で, みずから Archimedes, Galileo, Newton と並べ, 熱の数学的理論の解明が少数の原理に基づいてなされたことを挙げて, Newton の感慨を追体験できたと言う:

Quod tam paucis tam multa praestet geometria gloriatur

かくも少数の原理からかくも多様な結論が示せるとは幾何学 (= 数学) は偉大である

ただし, Newton はプリンチピア(「自然哲学の数学的原理」)の序文では

**Ac gloriatur Geometria quod tam paucis principiis
aliunde petitis tam multa praestet**

ああ, 幾何学は偉大である, 精選されたかくもわずかな原理からかくも多様な結論が示される

と言っている。

ルネッサンス期の医者はもちろんだが, 画家や彫刻家は, 詳細な人体計測や解剖学的知見に基づいて, 彫刻を作り, 絵を描いた。そして, 多数の暴君が人体を自由に切り刻んでもいた。

先行する時代, 中世もそれなりに血なまぐさい時代で, 特に, キリスト教の「聖人」たちは, 種々の凄惨極まりない刑罰の対象となって始めて天に迎えられている。

翻って, 日本の場合, 鎌倉期の彫刻には, 裸像に衣服を着せるものも少なからずあり, 人体の比例などへの関心はあったはずである。また, 凄惨な死闘は戦のならないであり, 切腹, 斬首なども稀ではなかった。さらに, 餓死者も日常的であって, 社会は死体に囲まれていたはずである。

どうして伝統的な日本では解剖学的知見の体系化がなされなかったのか, これも配布稿の冒頭の問いと同種のものではあるが...

参考: 辻惟雄, 岩佐又兵衛 浮世絵をつくった男の謎 文春新書 (2008)

(完)