幾何学の拡がりについて

吉川　敦

2006 年 9 月 30 日

1　小竹武先生の葉書

これから 500 年前のニュルンベルクの画家アルブレヒト・デューラー[1]の幾何学の一部を紹介しようと思う．デューラーと言えば，有名な版画[2]「メランコリア I」は示唆に富んでいると思うが，このまま小竹武先生と結びつけるのには無理がある．理由についての相当の説明が要るであろう．

さて，筆者にとり，小竹先生からの最後の消息は 3 年前の春であった．前年の暮れに父を亡くし，賀状を失礼して寒中見舞いを差し上げたところ,「思い出なつかしい．私脳．言語ダメ.」と鉛筆で書かれた葉書をいただいた．驚愕して，すぐに高木泉さんに電話をし，先生のご様子を伺ったことを覚えている．

小竹先生は 1950 年代の末をフランスで過ごされ，パリ大学都市の日本館に滞在しておられたが，当時館長をしていたのが亡父であった．この頃の日本館には斉藤正彦先生もおられたが，概して日本からの留学生は眉目秀麗な秀才が多かったようである．当時の日本館の事務長だったジョーム女史から，Ces garçons-là, ils étaient beaux！と聞いたことがある．この方も亡くなられて久しい．とまれ，亡父は小竹ご夫妻の極めて若い頃を知っていたわけである．実際，昨年小竹先生の思い出に捧げた論文[3] を奥様に差し上げたところ，亡父への言及もある礼状をいただき恐縮した．

ところで，亡父はフランス中世ロマネスク美術の代表的作品，ヴィエンヌのサン・サヴァン教会堂の黙示録壁画の研究に文字通り人生のすべてを賭けた．日本館の館長になるに際しても相当の犠牲を払ったのだが，それは偏に現地調査の便宜のためだったはずで，館長としてはどうだったのだろう．その上，この頃のフランスは第 4 共和制下であり，アルジェリア戦争も絡み，世

[1] Albrecht Dürer (1471–1528).

[2] 添付の図版は，芸術新潮，**54-5** (2003),「特集：前川誠郎のデューラー講義」所収のものである（p.54）．なお，一松信京大名誉教授から，小川泰：かたちの万華鏡，11．デューラーの立体．数学セミナー，**485** (2002), pp.2–3．をご教示いただいた．版画「メランコリア I」だけからも多くのヒントが得られるようである．後述の「測定法教則」も精査すれば何らかの新機軸を産み出すものもまだまだ潜んでいよう．

[3] 後に，出版された．Atsushi Yoshikawa : On higher dimensional analogues of Slepian's operator in his bandwidth arguments, Kyushu J. Math. **60** (2006), 79-100.

情は騒然としていたであろう．それだけに亡父は当時の在館者の人格に強い印象を受けたようで，彼らがいかに優れていたかを何度も聞かされた記憶がある．中でも小竹先生の秀才振りには感服していたようで,「何しろ小竹君は20ページ余りの論文で学位をとっているんだから」とよく言っていたことを思い出す．小竹先生からはこの論文で衝撃波を論じたと伺った記憶があるが，時期的にも非常に先駆的であったに違いない（ただし，筆者自身は論文を確認していない）．

2　なぜデューラーか

筆者はその後曲がりなりにも数学者になった．小竹先生の数学的な名声は早くから知ってはいたが，丁寧に読んだ先生の論文が多いわけではない．講義では，北海道大学における集中講義が印象に残っている．ナッシュ・モーザーの陰関数定理を援用しつつ，コンパクトなリーマン多様体がユークリッド空間に等距離的に埋め込まれることを証明するという話であったが，まさに，簡にして要を得るということの見本のようであった．先生の洞察に富んだ最終講義も多くの方が覚えておられるだろう．

さて，たまたま8月末に京都大学数理解析研究所における研究集会「数学史の研究」においてデューラーの「測定法教則」（画法教程）[4]について講演する機会があった．画家デューラーを数学者として分類することが適当かどうかは当然議論の対象になることであるが，筆者はパイファー女史の意見に賛同したい．女史は三つ理由を挙げている．すなわち，第一に，デューラー自身による幾つかの曲線類の提起や立体の断面図を用いての扱い，特に，この方法での円錐曲線の描き方などの数学的貢献が認められること，第二に，ドイツ文化圏に遠近法を最初に紹介したこと，第三に，形に対する悦びの感覚が著しいことである[5]．

なお，核心に直截切り込んでいくという小竹先生の精神とは遠くなるように思われるかも知れないが，筆者がデューラーの数学に関心を持ったきっかけになった「美術と幾何」という小さな書物[6]に触れておきたい．著者アイヴィ

[4]Albrecht Dürer : Underweysung der messung, Nürnberg (1525, 1537). 邦訳は，下村耕史：九州産業大学芸術学部研究報告 **31** (2000), pp.57–73; **32** (2001), pp.65–80; **33** (2002), pp. 63–78; **34** (2003), pp. 55–71; **35** (2004), pp. 53–70; **36** (2005), pp. 55-68. （三浦伸夫神戸大学教授による数学的補充とともに）中央公論美術出版から刊行される予定．なお，筆者が利用したのは，Albrecht Dürer : Géométrie, Présentation, Traduction de l'allemand et notes par Jeanne Peiffer, Sources de Savoir, Seuil (1995) であった．講演予稿は，数研の講究録原稿として代表者に手交済みであるが，規定の倍の長文であり，どうなるかはわからない．

[5]例えば，曲線 $4(x^2+y^2)^3-4(x^2+y^2)^2+y^2=0$ はデューラーの葉型曲線といわれる．Maple による作図（図1）を示す（Maple は Waterloo Maple, Inc. の商標である）．立体の断面図を用いるのは職人の技法の反映ではないかとパイファーは言う．事実，デューラーは職人であって，厳格な意味では数学者とは言えない．Underweysung der messung で展開している議論も不正確なものが多く，特に，遠近法の部分はよくない．しかし，これはデューラーに遠近法の手ほどきをした人たちの問題でもあっただろう．

[6]Willam M. Ivins, Jr. : Art & Geometry. A study in space intuitions. Dover Publications, Inc. (1964).

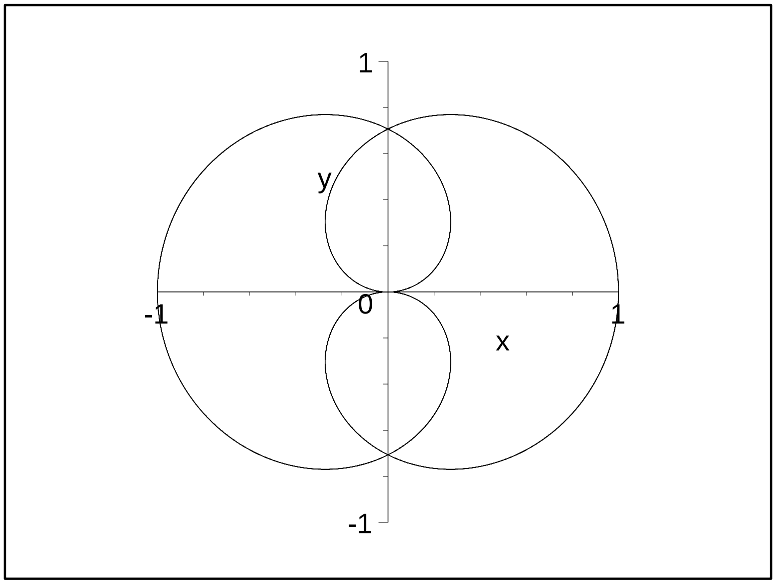

図 1: デューラーの葉型曲線.

ンズはメトロポリタン美術館の版画部長を長く務めた人である．この本で，著者は，古典ギリシア人とルネッサンス以降の近世西欧人の空間認識の差異が芸術や幾何に及ぼした影響を論じている．著者は，古典ギリシア人の空間認識の基本は筋肉感覚[7]であり，近世西欧人は視覚的であることを指摘し，したがって，古典ギリシア人には本質的に無限や運動の把握ができなかったと主張している．フェデリゴ・エンリケスの相対性理論の解説書の影響があるらしいが，古典ギリシア文化というものを相対化してしまったわけである．著者の考察の重要な動機になったのは，遠近法[8]であり，特に，デューラーの版画の遠近法の狂いであったという．

3　デューラーと三大作図問題

デューラーの「測定法教則」は 4 部からなり，さまざまな図形の説明や作成法が論じられている．当時の絵画や建築で必要とされた基本的な図形や装飾用の曲線や立体の目録ともなっている．デューラー自身の社会的な階層意識を背景に，これら職人の技法の集積を数学の基礎の上に整理しようと試みたものであり，画家の数学者としての認知がデューラーのこのような営為の

[7]晩年の亡父から，いわば夕食後の雑談として，ギリシアからルネッサンスに至る西欧美術史の通史を聞いたことがある．古典ギリシアの筋肉感覚から視覚的な空間認識への変遷は，キリスト教神学による光や無限の導入という形で説明されるということだったように思う．ロマネスク絵画は象徴的で遠近法とは無縁のように見えるが，そういう意義もあったのであろうか．なお，古典ギリシア人の筋肉感覚的空間認識については，ギリシア壷絵の専門家からも今日では定説になっていると聞いた．

[8]正しくは，アルベルティの正統作図法 construzione leggitimata を指す．

目標であったと理解される．ユークリッドを始めとする各種の数学古典に準拠しつつ，また，多数の学者の協力も得て,「測定法教則」は準備されたようであるが，数学的命題として提示されている話題は極めて少ない．ほとんどの話題は，具体的な手順を明確に示す形で各種図形の構成法や近似作成法の紹介として，明晰に述べられている．しかし，遠近法の説明や倍積立方体の構成法の一部については，デューラーが恐らく直観的に把握できなかったためであろう，記述が明晰ではない．

このような事情から「測定法教則」の話題は，当時の職人技術の数学的内容を反映したものが多い．例えば,「三大作図問題」，すなわち，与えられた円と等積の正方形の作図，与えられた角の三等分の作図，与えられた立方体の倍積立方体の作図について詳細に論じられている．今日では周知のこととなったが，これらは目盛りのない定規とコンパスだけでは作図できない．すなわち，目盛りのない定規，つまり，与えられた 2 点を結ぶ線分を引くこと，及び，コンパス，つまり，与えられた点を中心とし与えられた長さを半径とする円を描くこと，という二つの操作の有限回の組み合わせだけでは，三大作図問題の解には決して到達できないのである．一方，三大作図問題は，作画や設計上，あるいは鋳造用の予備設計の段階で直面する問題でもあった．したがって，優先すべきは方法論上の純度ではなく，優れた近似解法で作業現場でも利用できるものを示すことである．デューラーが行ったのは，まさにそれであった．

3.1 角の三等分

「測定法教則」第二部（第二書）第 20 図の内容である．与えられた角を中心角とする円弧 $\widehat{AB}$ を近似的に三等分する．このために，この円弧に張った弦 AB を三等分し，その三等分点 P, Q に立てた垂線ともとの円弧 $\widehat{AB}$ との交点 C, D を求める．次いで，中心 A, B，半径 AC, BD の円周を描き，弦 AB との交点 R, S を求める．線分 PR, BS の三等分点（で，それぞれ R, S に近いもの）を T, U とする．中心 A, B，半径 AT, BU の円周が円弧 $\widehat{AB}$ と交わる点を E, F とすると，E, F が円弧 $\widehat{AB}$ の三等分点の近似を与える．念のために，本来の三等分線（円弧と直交する線分として示してある）と比較した図を示す（図 2）．近似の誤差のグラフも併せて示す（図 3）．これらの図は Maple で作成した．

この三等分法は，現場での施工による調整を考えると，極めて優れた方法と言える．

3.2 円と等積の正方形

「測定法教則」第二部（第二書）第 34 図の内容である．与えられた正方形の対角線の 5 分の 2 の長さを半径とする円を求めればよいと言っている．正

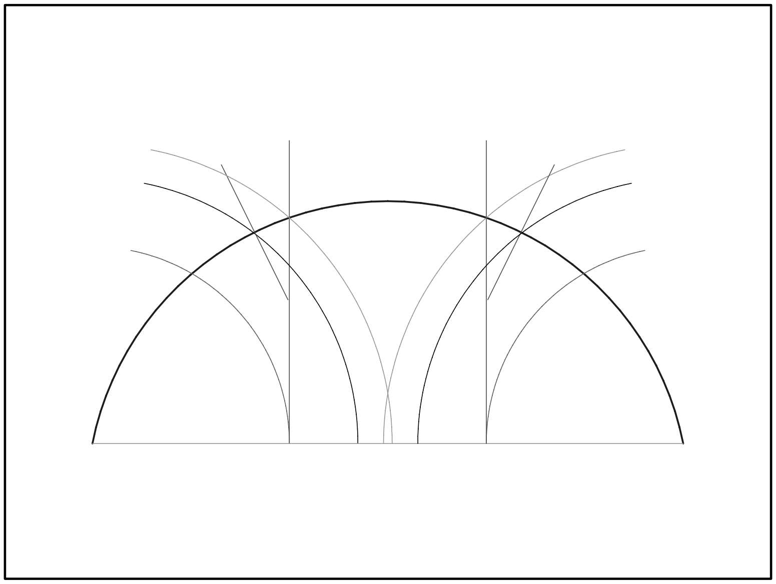

図 2: 中心角 $\frac{7}{8}\pi$ のときの角の三等分．点 A, B, $\cdots$, E, F はどこか.

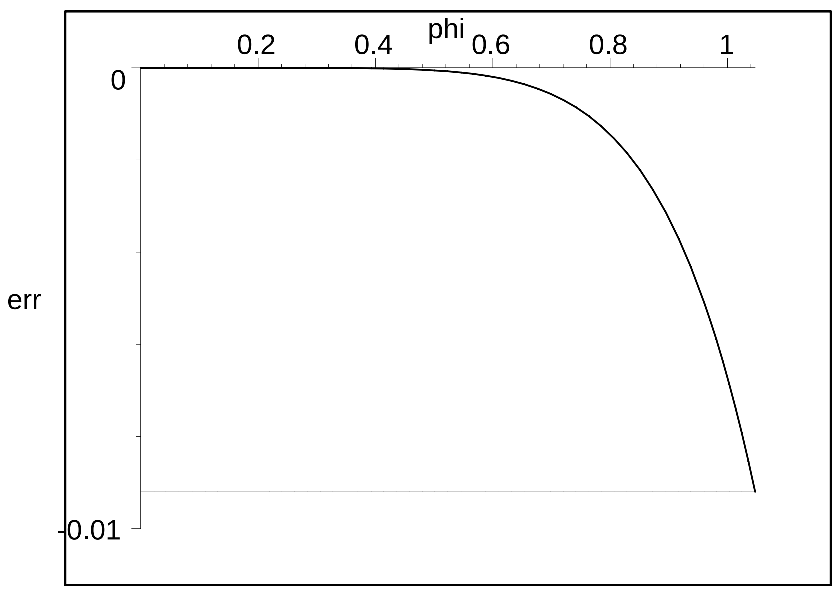

図 3: 三等分角 φ（ラディアン）の誤差 err．もとの角は 3φ ラディアン.

方形の 1 辺が単位長さであれば，対角線の長さは $\sqrt{2}$，したがって，こうして得られる円の面積は $\pi\,(\frac{2}{5}\sqrt{2})^2 = \pi\,\frac{8}{25}$ である．これが単位面積だとすると，円周率は $\pi = \frac{25}{8} = 3.125$ ということになる．この手法が応用される技術的な課題というのは想像が付かないが，断面が正方形の容器から断面が円の容器に内容物を移すような場合などには利用できそうである．

3.3 倍積立方体

与えられた長さの立方根の「作図」法である.「測定法教則」第四部（第四書）前半で扱っており，三種の方法が紹介されている．塑像などで小縮尺の模型を作成してから本体の構築をするが，その際，鋳造材料の量の評価が必要であり，倍積立方体の手法はこのときに不可欠な知識になる．しかし，学者は秘儀として来たので，ここで，始めて職人の言葉，つまり，ドイツ語で公開するとデューラーは強調している（ただし，先行するドイツ語文献はあったらしい）.

第 44–47 図の内容はスポールスに拠る方法という．少なくとも目盛り付きの定規を必要とする．与えられた長さを線分 AC で表し，AC 上に BC が単位長さとなるように点 B をとる（図 4). C を中心として，半径 AC の半円を描く．C で AC に直交する直径を DE とし，D, B を通る直線を引く．E を通る直線を次のように引く．この直線と直線 DB の交点を G，CA との交点を H，円弧 $\widehat{DAE}$ との交点を J として，線分 HG と HJ は同じ長さになるようにする[9]．すると，線分 CH の長さは AC の長さの二乗の立方根になる．最終的には，CH の長さの平方根を作図すればよい（図 5）[10].

第四書第 50 図の内容はプラトンに拠る方法という．与えられた長さの線分 BG と単位長さの線分 BE を点 B において直角をなすように配置する．EB, GB の延長上に，それぞれ，点 C, D を三角形 GCD，三角形 CDE が直角三角形となるようにとる（図 6）．すると，線分 DB の長さが BG の長さの立方根を与える．肝心の点 C, D を求めることは，定規とコンパスではできない．デューラーはこのために器具をいくつか提案しており，実際に使われたのはこの方法であったのだろう.

第四書第 51 図はヘロンに拠る方法という．長方形 $ADGB$ において，辺 AD が与えられた長さ，辺 DG は単位長さとする．対角線 AG の中点を E とする．B を通る直線と DA，DG の延長との交点 H，Z を，線分 EH と EZ が同じ長さになるようにとる．このとき，HA の長さは AD の長さの立方根である（図 7）．点 H, G を求めるには目盛りつきの定規で十分だとあるが，どうだろうか.「測定法教則」において唯一数学的証明が試みられているものであるが，手稿段階の筆跡はデューラーのものではないという．与えら

[9] デューラーは目盛りつき定規でこの操作が可能なように述べているが，そうだろうか.

[10] ただし，デューラーの与えている図は間違っている．第 44 図では正しい結果にはなるが，これは偶然である．デューラーがこの方法を実際に利用したかどうかには疑問がある.

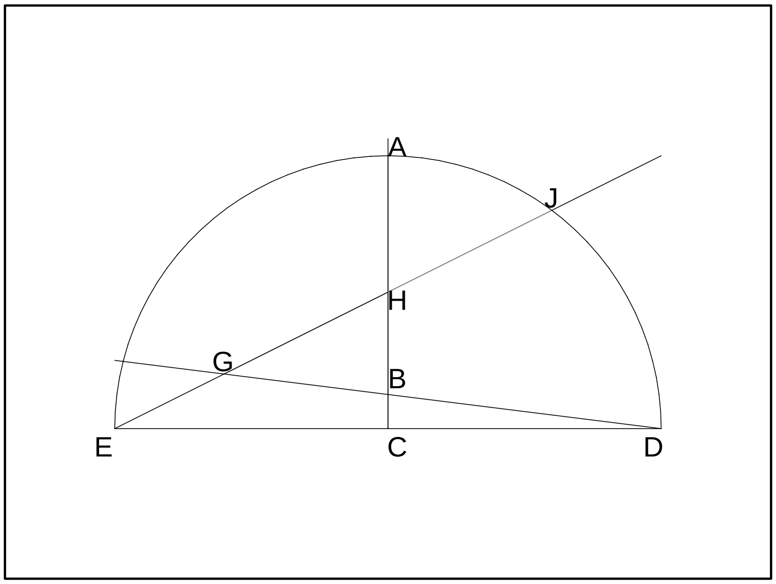

図 4: $\overline{CH} = \sqrt[3]{\overline{AC}^2}$

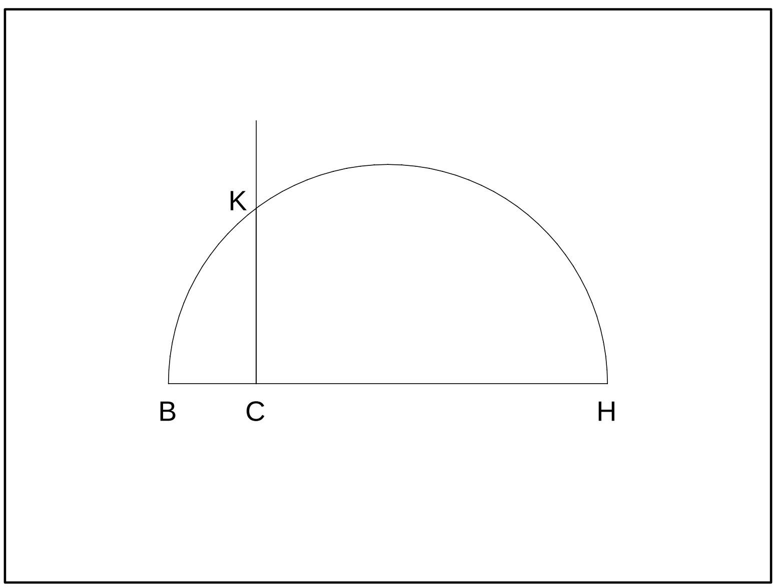

図 5: $\overline{CK} = \sqrt[3]{\overline{AC}}$

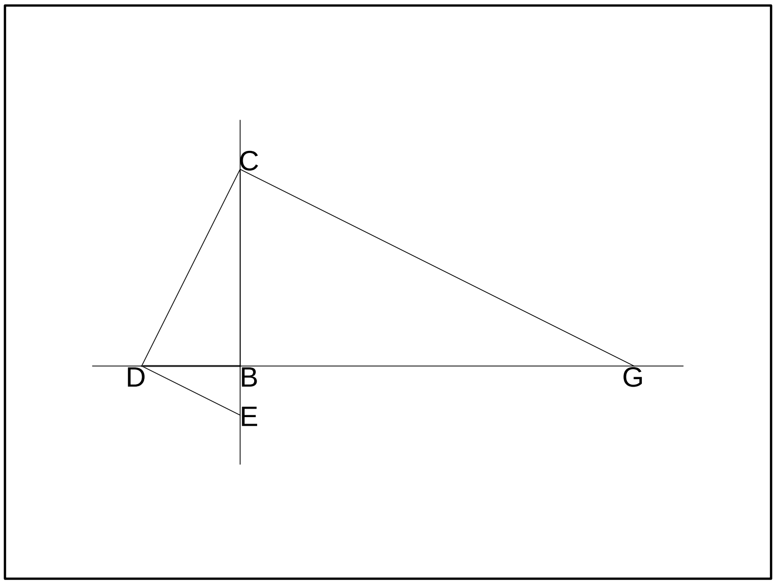

図 6: $\overline{BD} = \sqrt[3]{\overline{BG}}$

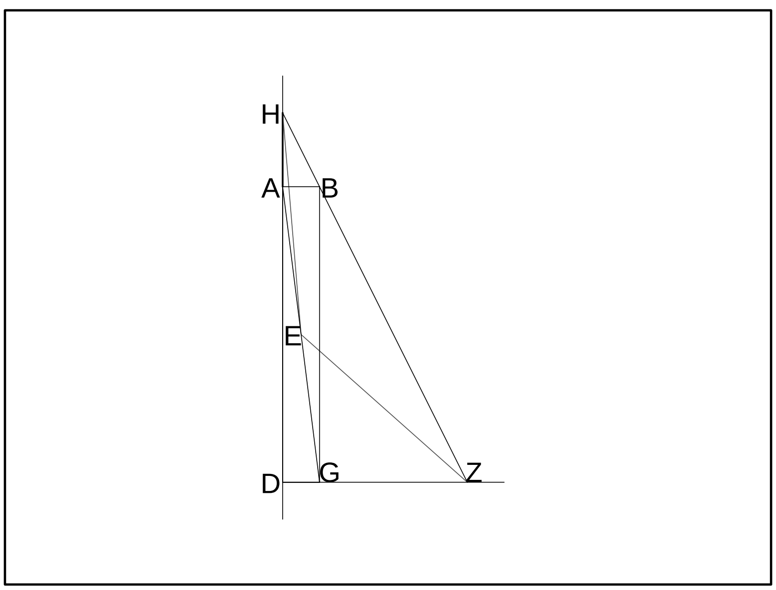

図 7: $\overline{AH} = \sqrt[3]{\overline{AD}}$

れた長さの立方根を与える線分が明示されているようでもなく，実際に用いられていたとは思いにくい．

4 最後に

奥様にも興味をお持ちいただける話題をと考え，デューラーの幾何学世界を論じてみた．この春，ある縁で，ケルヴィン卿ウィリアム・トムソンの積分器の論文に目を通し，一種の感動を覚えたので，そちらを主題にすることも考えたけれど，集会の趣旨は幾何をめぐるもののようであり，今回は見送った．

小竹先生は何とおっしゃるかは想像の彼方ではあるが，まずは，ご参集の皆様に拙稿をお楽しみいただけたら幸せである．

A 付記

参考のために，パイファー女史の比較的最近の講演記録[11]の抜粋を付す：「測定法教則」は職人を読者に想定していたが，刊行後間もなく人文学者エラスムスが目を通しており，ドイツ語で書かれているが，という留保を付しつつも高く評価したという.「測定法教則」のラテン語訳は，ニュルンベルクの古典学者カメラリウスによって作られ，デューラー没後パリで出版された．この訳本は，クリストフ・クラヴィウス，ガリレオ・ガリレイ，ティコ・ブラーエ，ヨハンネス・ケプラー，シモン・ステヴィンらによって断片的ながら読まれた．クラヴィウスのユークリッドの「原論」の注釈はデューラーの作図に言及しており，それは，さらに，マテオ・リッチらによる漢訳の「原論」にまで引き継がれているという．ケプラーはデューラーの方法に極めて批判的であったが，ティコ・ブラーエは同情的とも思われる要素を示していたようである．一方，デューラーのドイツ語原本の挿図は強い影響力を持っていたらしく，投影図を用いた挿画はモンジュの画法幾何のヒントになったという．

[11] http : //www2b.ac-lille.fr/apmep/les_conferences/Pieffer/Pieffer.htm
なお，同稿 Conclusions Provisoires の一節を引く：

> Par ailleurs, les savants ont découvert et lu l'*Underweysung* dans la traduction de Joachim Camerarius. Tout en rendant hommage à Dürer et en associant son nom à certaines constructions, ils ont confronté ses résultats au corpus existant, ils ont discutés et restreint la portée de certains, en ont complété, corrigé ou plongé d'autres. S'ils reprennent certaines constructions approchées, celles de polygones et polyèdres réguliers notamment, en soulignant leur aspect pratique, ils fustigent aussi leur fausseté et les pourvoient d'un calcul de l'erreur. Mais, tout en les critiquant, ils les intègrent définitivement dans le corpus mathématique, enrichissant ainsi la géométrie de connaissances pratiques provenant des ateliers. Dès le XVI^{e} siècle en Allemagne, puis au XVII^{e} siècle au-delà de l'Empire, un certain nombre de connaissances tirées de la géométrie de Dürer ont été enseignées jusque dans les universités.