



ガンマ関数と計算機

— Hölder の論文をめぐって —

吉川 敦

平成 18 年 5 月 14 日

目 次

1	はじめに	2
2	Hölder の論文を読む	3
2.1	ガンマ関数について	3
2.2	Hölder の論文. その 1	6
3	代数微分方程式の解の意義	8
3.1	微分解析機	8
3.2	汎用アナログ計算機と代数微分方程式	10
4	Hölder の議論の続き	12
4.1	Hölder について	13
4.2	Hölder の論文. その 2	13
4.3	Hölder の論文. その 3	20
5	ガンマ関数のデジタル計算可能性	27
5.1	関数の計算可能性	27
5.2	ガンマ関数の場合	27
6	若干の議論	30
A	Hausdorff の証明	32
B	Kelvin 卿のアナログ計算器	36
B.1	第一論文を読む	36
B.2	James の積分器	37
B.3	第一論文を読む (承前)	39
B.4	第二, 第三論文: 線形常微分方程式の機械による解法	42



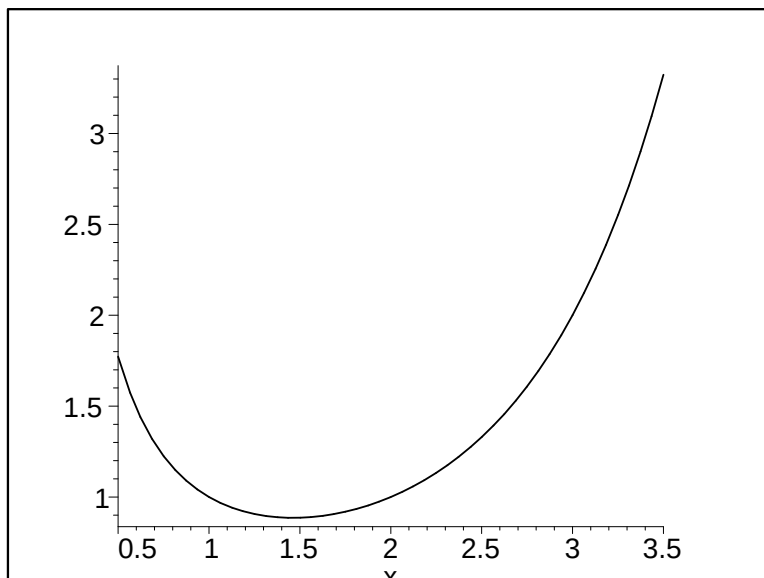


図 1: ガンマ関数 $\Gamma(x)$, $0.5 \leq x \leq 3.5$, のグラフ

1 はじめに

以下では、ガンマ関数を中心に据えて、計測型（アナログ）計算と計数型（デジタル）計算の違いに思いを及ぼしてみたい。大雑把に言って、計測型計算によって得られる関数は何らかの微分方程式を満たすものに他ならない。しかし、微分方程式の解としては得られないような関数でも計数型計算によって求められる場合がある。ガンマ関数は、多項式関数、三角関数、指数関数、あるいは、これらの逆関数に続く、極めて基本的な関数であるが、これらの関数と違って、微分方程式の解になることはない。

しかし、ガンマ関数は、計算ソフト¹によってグラフ（図 1）が描けるように、計数型計算によって生成されるのである。

最近、Otto Ludwig Hölder の論文 [8]：

ガンマ関数のいかなる代数微分方程式をも満たさないという特性
について （1886）

を読む機会があった²。いろいろな点で面白いと感じられ、丁寧に紹介してみたいと思うようになった。しかし、120 年も昔の論文である。面白いと主張す

¹ここでは、Maple を用いた。Maple は Waterloo Maple, Inc. の商標である。

² Whittaker-Watson[37] p.236 には、

Proofs have been published by Hölder, Moore, and Barnes of a theorem known to Weierstrass that the Gamma-function does not satisfy any differential equation with rational coefficients.

とある（Hölder 以下への脚注記号省略。斜体は筆者。[35] には Hölder が苦勞していたことは述べられているが、この文脈での Weierstrass への言及はない。）。Hölder を含め、これらの著者の論文データは省略した脚注に示されていたが、最近まで筆者もわざわざ参照しようとする動機

るだけでなく、今日的意義を含めて、若干の釈明が欠かせないであろう。簡潔な釈明は常に難しい。キーワードとして、代数微分方程式の解の意義、計数型（デジタル）計算可能性と計測型（アナログ）計算可能性、ガンマ関数の場合、Hölder の経歴を挙げて当座の釈明の代わりとしたい。

2 Hölder の論文を読む

2.1 ガンマ関数について

物事には順序があるので、まず、ガンマ関数について復習をする。

Euler のガンマ関数 $\Gamma(x)$ は、 $x > 0$ のとき、周知のように、広義積分

$$(1) \quad \Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = \lim_{\substack{\epsilon \downarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \int_{\epsilon}^R e^{-t} t^{x-1} dt$$

で定義される。例えば、

$$\Gamma(1) = \lim_{\substack{\epsilon \downarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \int_{\epsilon}^R e^{-t} dt = \lim_{\substack{\epsilon \downarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} (e^{-\epsilon} - e^{-R}) = 1$$

である（なお、(1) の収束については必要上 §5 で改めて論ずる）。(1) 右辺の被積分関数は

$$\frac{d}{dt} (e^{-t} t^x) = -e^{-t} t^x + x e^{-t} t^{x-1}$$

を満足する。この両辺を ϵ から R まで積分し、 $\epsilon \rightarrow 0$ および $R \rightarrow +\infty$ とすれば、直ちに差分方程式

$$(2) \quad \Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$$

が従う。これを利用すると、

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(2) = 1, \quad \Gamma(3) = 2, \quad \Gamma(4) = 3 \cdot 2 = 6, \quad \dots$$

一般に、自然数 n に対して

$$\Gamma(n+1) = n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \quad (\text{階乗})$$

が得られる。また、

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

も比較的容易な計算で確かめられる。

はなかったわけである。証明自体は他にも上記 Barnes[2], Ostrowski [18], [19], Hausdorff[7] など多数ある。[8] は冗長な感もあるが魅力に富んでいる。訳出してみたいという誘惑に駆られたゆえんである。なお、[7] は簡潔簡明であり、これも魅力的である。付録として訳出してみた。

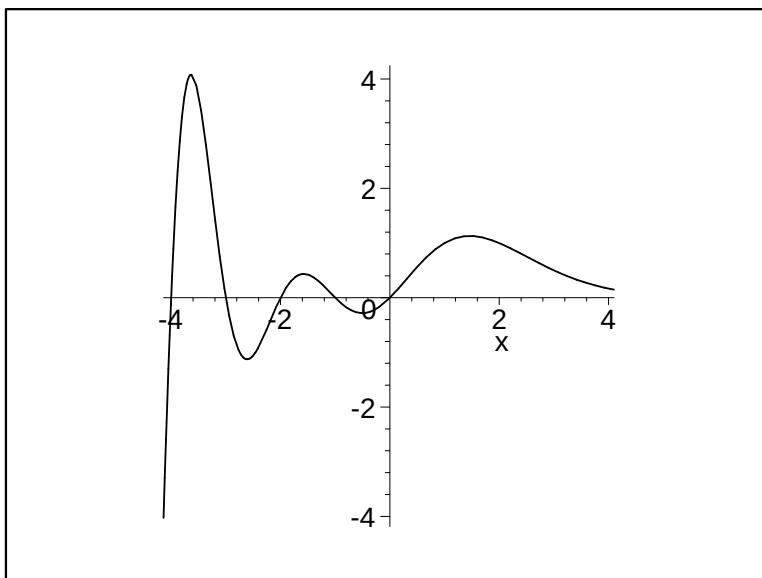


図 2: $\frac{1}{\Gamma(x)}$, $-4.1 \leq x \leq 4.1$, のグラフ.

さらに, (2) を利用すると, $\Gamma(x)$ を $x < 0$, ただし, $x \neq 0, -1, -2, \dots$, にまで拡張することができるのである. 実は, このとき, (2) を

$$(2\text{bis}) \quad \frac{1}{\Gamma(x)} = \frac{x}{\Gamma(x+1)}$$

と捉えれば, (記法上の抵抗感はあるかも知れないが) $\frac{1}{\Gamma(x)}$ の方を $-\infty < x < +\infty$ のなめらかな関数で $x = 0, -1, -2, \dots$ において消える (値が 0 になる) ものと考えるべきことがわかるであろう. $\frac{1}{\Gamma(x)}$ のグラフを図 2 に掲げておく.

特に, 等式

$$\sin \pi x = \frac{\pi}{\Gamma(x) \Gamma(1-x)}$$

はすべての x に対して成立する.

ガンマ関数の挙動では, Stirling の公式

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi} e^{-x} x^{x-1/2}, \quad x \rightarrow +\infty,$$

がよく利用される (非常に詳しい導出が [37] にある).

なお, x が複素数であっても $\Re x > 0$ ならば (1) は収束し, したがって, $\Gamma(x)$ は, このような x に対して定義され, (2) によって, さらに, 非正整数 $0, -1, -2, -3, \dots$ を除いた複素数 x に対して意味を持つことがわかる. (2bis) に基づくと, $\frac{1}{\Gamma(x)}$ は, すべての複素数 x に対して定義され (た正則

関数, つまり, 整関数であって), $x = 0, -1, -2, -3, \dots$ では消えるものになる.

$x > 0$ ならば $\Gamma(x)$ は正値のなめらかな関数であるから, 対数微分 $\varphi(x)$ が計算できる. 実際, 積分記号下の微分が遂行できて,

$$(3) \quad \varphi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \log t \, dt$$

となる. さらに, (2bis) を繰り返し利用すれば, 例えば,

$$(4) \quad \varphi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+n)}$$

と表すことができる. ここで, γ は Euler の定数である³. (4) の右辺は複素変数 x に対しては有理型関数と解釈され, したがって, $\varphi(x)$ も複素変数 x の有理型関数に拡張される. (4) を改めて積分すれば,

$$(5) \quad \frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x/n} \right\}$$

が得られる⁴.

なお, (3) から, $x > 0$ の場合,

$$\frac{d}{dx} \varphi(x) = \frac{\Gamma''(x)}{\Gamma(x)} - \left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \right)^2 \geq 0$$

となること⁵, すなわち,

$$(6) \quad \log |\Gamma(x)| \quad \text{は} \quad x > 0 \quad \text{の凸関数である}$$

ことがわかる.

ガンマ関数は, 以上が示唆するように, 極めて重要な基本的な関数であり, 特殊関数の筆頭に位置するものとして, 古くから詳細に研究されている. 実際, Gauss の超幾何関数はガンマ関数なしには記述できないし, 近年でも, 例えば (常) 微分方程式系の大域解の研究, 特に, 接続公式の導出はガンマ関数に深く依存している (河野 [11], [12] 参照).

³すなわち,

$$\gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} - \log m \right\} = 0.5772157 \dots$$

⁴(5) については文献 [1], [28], [37] などをご覧ください.

⁵実際,

$$\Gamma''(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} (\log t)^2 \, dt$$

であり, また, Cauchy-Schwarz の不等式によって,

$$\left(\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} |\log t| \, dt \right)^2 \leq \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \, dt \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} (\log t)^2 \, dt$$

が得られるからである.

当然、ガンマ関数を扱った書物は多い。二三挙げておこう。アルティン [1]、高木 [28], pp. 248–263, Whittaker-Watson[37], pp. 235–264, Erdelyi [5], pp.1–55, 森口・宇田川・一松 [16], など。特に, [37] は, 詳細な計算を含んでおり, やや, 立ち入った結果を知るには便利である。

しかし, ガンマ関数は, 微分方程式の解にはならないという難しい関数でもある。つまり, ガンマ関数を局所的にせよ解に持つような代数微分方程式は存在しないのである。このことは筆者よりも大分年輩の方たちには常識であったことなのであろう。ガンマ関数（やゼータ関数）が微分方程式を満たさないことが数論の難しさに関わっているということは, さる大先達から聞いたことがある。

Hölder の論文は, 筆者から見ても大先輩の方たちが一度は目に（少なくとも耳に）されたものであろうとは思われるが, ガンマ関数の性質としては否定的なものを扱っており, 他の重要な諸性質を論じた研究と違い, どれほどの人から丹念に読まれたであろうか。

2.2 Hölder の論文. その1

上掲の論文 [8] の末尾に, ゲッティンゲン, 1886 年 6 月 26 日とある。著者 Otto Ludwig Hölder は 1859 年 12 月 22 日のシュトゥットガルト生まれだから, 実質概ね 25 歳ころの仕事であろう。とまれ, 論文冒頭の文章は, 雰囲気伝えるために, これだけは敢えて原文（当時のドイツ語）のままで示すが,

Während nahezu alle die Functionen einer Veränderlichen, welche in der Analysis eingebürgert sind, die Eigenschaft haben, dass zwischen der unabhängigen Veränderlichen, der Function und einer Anzahl von Ableitungen der Function eine algebraische Gleichung besteht, ist für die Gammafunction eine solche Gleichung nicht möglich. [解析学に通例現れるほとんどすべての 1 変数関数は, 独立変数と, 関数およびその導関数若干との間に代数的な等式（方程式）が成り立つという性質を持っているが, ガンマ関数に対してはこのような等式はあり得ない。]

である。ここで, 「独立変数と関数およびその導関数若干との間に成り立つ代数的な等式（方程式）」が代数微分方程式に他ならない。上の表現では曖昧なので, やや詳しく述べると, まず, 適当な自然数 n に対し, $n+1$ 個の不定元 $X_0, X_1, \dots, X_n$ に対する多項式で x の有理式を係数とするもの

$$P(x; X_0, X_1, \dots, X_n) = \sum_{|\alpha| \leq M} c_\alpha(x) X_0^{\alpha_0} X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$$

を考える。 $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ は, $\alpha_0 = 0, 1, \dots, \dots, \alpha_n = 0, 1, 2, \dots$, を成分とする「多重指標」で, $|\alpha| = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ が α の「長さ」で

ある。Hölder の時代の記法ではないが、今日では便利なものとして普及していると思う。 $\max\{|\alpha|; c_\alpha(x) \neq 0\}$ を P の「次数」と言おう⁶。

なお、係数のいずれかを 1 として正規化する必要がなければ、係数 $c_\alpha(x)$ を x の多項式とする方が自然である。さて、(未知) 関数 $u(x)$ に対する (区間 I における) 方程式

$$P(x; u(x), u'(x), \dots, u^{(n)}(x)) = 0, \quad x \in I,$$

が「代数微分方程式」であり、 $u(x)$ が実際に上の等式を成り立たせているならば、この代数微分方程式の「解」である。

さて、上の文章で Hölder が述べているのは、当時彼が主に研究していたという Fourier 級数に現れる $\sin nx, \cos nx$, あるいは、指数関数 e^{ax} は簡単な (線形) 常微分方程式を満たしており、他にも、Bessel 関数や Legendre 関数など多くの直交関数系が線形常微分方程式系の解として得られるのに、ガンマ関数と言えば、その基本性にもかかわらず、微分方程式の解になることは、代数微分方程式にまで条件を緩めても、決してない、ということである。

上の文章に引き続いて (同じ段落内で) Hölder は述べる：

この事実は私がこのような方程式を見つけ出すための不毛な探索を繰り返した挙句辿り着いたことであるが、その初等的な証明が本論文において詳述される。相当に広範な、ガンマ関数に関連する文献についてはここでは立ち入らない⁷。それに、また、私の知る限り、提起された問題はどこにも論ぜられてはいない。他方、今ようやく聞き知ったことだが、Weierstrass 氏がかつてガンマ関数はいかなる代数微分方程式も満足しないことを証明せよという問題を口頭発表で提起したそうである。

以上が、この論文の本当の前書きで、以下段落を改めて、数学的な内容に入ってくる。

以下において、上述の性質が、まず、ガンマ関数の対数導関数について確かめられる。すると、これからガンマ関数についての帰納的推論が自然に従う。このようなわけで、以降の証明は二部に分けられる。ガンマ関数の対数導関数に対しては、記号

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \frac{d\Gamma(x)}{dx} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

が利用される。Gauss の記号もある：

$$\varphi(x) = \Psi(x-1) = \frac{\Pi'(x-1)}{\Pi(x-1)}.$$

⁶Hölder は $|\alpha| = M$ を満たす項 $c_\alpha(x) X_0^{\alpha_0} X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$ を Glied der M^{ten} Dimension (第 M 位の大きさの項) と言っている。

⁷なお、本稿では、ガンマ関数の初歩的な文献を §1 でいくつか挙げておいた。

関数 $\varphi(x)$ は一価で、有限なところではどこでも有理関数の性格を持つような解析関数であって、等式

$$(7) \quad \varphi(x+1) = \frac{1}{x} + \varphi(x)$$

を満たす。関数はこの性質だけから決して確定はしない。しかし、関数 $\varphi(x)$ を知っていることは証明を導くためには不可欠なことではない。従って、この証明は他の関数についても通用するものである。

この後、論文は第一部に移行し、 $\varphi(x)$ が代数微分方程式を満たすとして矛盾を導き、引き続き、第二部として、第一部の結果を利用して、 $\Gamma(x)$ が満たすべき代数微分方程式が存在しないことを示す⁸。これらの紹介は後回しにしよう。

なお、「一価で、有限なところではどこでも有理関数の性格を持つような解析関数」は直訳であるが「複素平面内の有理型関数」のことである。また、差分等式 (7) は対数微分 $\varphi(x)$ の定義と (2) から直ちに従う。差分等式 (7) は $0 < \Re x < 1$ に対する $\varphi(x)$ の知識から整数点を除いたすべての x に対する $\varphi(x)$ が決められることを意味しているが、 $0 < \Re x < 1$ における $\varphi(x)$ の与え方については (7) 自体は何も示唆してはいない。直線 $\Re x = 0$ 上での $\varphi(x)$ についても同様である。ただし、論文で必要とされているのは変数 x が実数の場合だけである。

3 代数微分方程式の解の意義

3.1 微分解析機



代数微分方程式の解を求めるために Kelvin 卿のアイデア [31] を生かして Vannebar Bush が実現したのが微分解析機 (Differential Analyzer) (1931 年) であった ([3])。Claude Shannon [25] は微分解析機の数学的理論を開発し、汎用アナログ計算機 (General Purpose Analog Computer. G.P.A.C.) という概念を導入した (1941 年)。後に、Marian B. Pour-El [21] が Shannon の議論を補正している (1974 年)。さらに、近年、汎用アナログ計算機で生成される実変数関数の族と自然数内の帰納的関数との類比や差異を検証する

⁸ Moore [14] は一般的なこととして次のように述べる：

If $f(x)$ satisfies an algebraic differential equation where coefficients are rational functions of x , so does its logarithmic derivative

$$g(x) = \frac{df(x)}{dx} / f(x).$$

確かにその通りであるが、Hölder 自身がこのことを承知であったかどうかは明らかにしてはいない (本稿 §4.3 脚注 22 参照)。第二部で詳しく論じているのは意図があつてのことのようではある。

という話題に関連して, Rubel [24], Moore [15], Kawamura[10] らによる Shannon や Pour-El の論述の拡張や補足もある.

微分解析機は今日使われてはいないが, 貴重な現物⁹が一台東京理科大学の近代科学資料館 [40] に展示されている.

現代はデジタル計算機の時代であるが, アナログ機も広く使われている. また, 脳など生体の活動はアナログ的と考えるべきだとする立場もある. アナログ機の基礎理論については, しかし, デジタル計算機における Turing 機に相当するものがなく, また, アナログ機による計算可能な対象の特徴づけはアナログ機の定義に依存しており, 全体的な整理は課題のままというのが現状のようである. ^A

以下で述べることは, ある関数が代数微分方程式の解であることと汎用アナログ計算機によって生成されることとが (ほぼ) 同等であるということである.

汎用アナログ計算機とは何か. その数学的表現を Shannon[25], Pour-El[21] に従って¹⁰述べれば, 有限個の (理念的・理想的) 計算単位器 (ユニット) を若干の制限のもとで接続したものとなる. ただし, 計算単位器としては, 次の 5 種を考える.

1. 積分器: 初期条件指定のもとでの 2 入力 1 出力の単位器. 入力 $u(x), v(x)$ に対し $\int_a^x u(t)dv(t) + C$ (Riemann-Stieltjes 積分¹¹) を出力する. C は $x = a$ における初期条件に依存する定数である.
2. 定数乗算器: 各実数 k について, 1 入力 1 出力の単位器. 入力 $u(x)$ に対し, $ku(x)$ を出力する.
3. 加算器: 2 入力 1 出力の単位器. 入力 $u(x), v(x)$ に対し $u(x) + v(x)$ を出力する.
4. 変数乗算器: 2 入力 1 出力の単位器. 入力 $u(x), v(x)$ に対し $u(x) \cdot v(x)$ を出力する.
5. 定数器: 1 入力 1 出力の単位器. 入力 $u(x)$ に対し定数関数 $C_1(x) \equiv 1$ を出力する.

これら計算単位器の接続にあたっては, 2 個の入力と 2 個の出力を決して相互接続しないものとする. 汎用アナログ計算機とは, 有限個の計算単位器

⁹解説は, [9] にある. 同機は動かない. しかし, Bush らのものは今日でも動くらしい. 往時のわが国の精密機器の部品は, 鋼鉄の質に問題があった上に十分な規格化ができていなかったから, 機器の稼動には組み立ててからの職人的微調整が不可欠であった. 一旦解体してしまえば部品の相互位置の関係がすべて狂い, 再調整は絶望的であつたろう ([27] 参照). なお, (ごく最近の組み立て式玩具から作られた) 微分解析機を載せているウェブサイトもある ([42]). なお, 計数型計算機開発で Bush の果たした役割については [23] に記述がある.

¹⁰添え数の付け方など若干の点で変えてある.

¹¹したがって, 入力できる関数は Riemann-Stieltjes 積分が可能なものでなければならない. 例えば, 入力を 1 回連続微分可能な関数に限定して考える. 実際は, 解析的な関数を対象にしていると考えてよい.

$U_1, \dots, U_n$ が、各入力が多くとも1個の出力と相互接続するように接続された連なり $\mathfrak{U}$ を指す¹²。フィードバックが禁止されていないことに注意したい。

計算単位器 U_i の出力を y_i とする。 $u(x)$ が区間 I において $\mathfrak{U}$ によって生成可能であるということを、 $a \in I$ は区間 I の適当な点として、 $x = a$ における初期条件が $\mathfrak{U}$ のすべての積分器に対して（つまり、 $x = a$ のとき $y_i(a) = y_i^*, i = 1, \dots, n$, のように）指定されると、 $\mathfrak{U}$ の計算単位器の空いている（他の単位器の出力に接続されていない）入力すべてに x を充てたとき、いずれかの i について¹³、 $y_i(x) \equiv u(x), x \in I$, が成り立つことであるとしよう。

例 1 出力 y の積分器の第一入力（被積分関数）を定数関数 $C_1(x) \equiv 1$, 第二入力（積分変数）を $u(x)$ とし、 a における初期条件を $y = u(a)$ とすると、 $y = \int_a^x du(t) + u(a) = u(x)$ が出力される。

例 2 変数乗算器を他の計算単位器を組み合わせて実現しよう。 x はすでにどこかで入力されたとする。積分器 U_1 には第一入力 $u(x)$ （被積分関数）、第二入力 $v(x)$ （積分変数）に対し、初期条件（ a において） $C = 0$ として、 $y_1 = \int_a^x u(x) dv(x)$ を出力させる。積分器 U_2 には第一入力を $v(x)$, 第二入力を $u(x)$ として、初期条件 $C = 0$ のもとで、 U_2 は $y_2 = \int_a^x v(x) du(x)$ を出力させる。加算器 U_3 が入力 y_1, y_2 に対し、 $y_3 = y_1 + y_2$ を出力する。他方、定数器 U_4 の（入力 $u(x)$ に対する）出力 $y_4 = 1$ し、定数乗算器 U_5 はそれに初期値 $u(a)$ を乗じて $y_5 = u(a) y_4$ を出力する。さらに、定数乗算器 U_6 が初期値 $v(a)$ を乗じて $y_7 = v(a) y_5$ を出力する。上の y_3 と y_6 を加算器 U_7 に入力すると、

$$y_7 = \int_a^x u(x) dv(x) + \int_a^x v(x) du(x) + u(a)v(a) = u(x) \cdot v(x)$$

が出力される。ここで、部分積分を利用した。

3.2 汎用アナログ計算機と代数微分方程式

次のことが言える：

命題 1 汎用アナログ計算機 $\mathfrak{U}$ は、積分器、定数乗算器、加算器、定数器からなるものとしよう。 $u(x)$ が区間 I において $\mathfrak{U}$ によって生成可能であるとする。このとき、 $x = a$ において初期条件 $y_i(a) = y_i^*, i = 1, \dots, n$, を満たす1階常微分方程式系

$$(8) \quad A(x, \vec{y}) \frac{d}{dx} \vec{y} = b(x, \vec{y})$$

¹² $\mathfrak{U}$ は $\mathfrak{U}$ のいわゆるドイツ花文字体である。

¹³例 1 に注意すると、理論上は積分器以外の計算単位器に積分器を接続できるので、この U_i は積分器であるとしてよい。

の解 $\vec{y}(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$ が区間 I において一意的に存在し、しかも $u(x)$ は $\vec{y}(x)$ のある成分と一致する。ただし、ここで

$$A(x, \vec{y}) = A_0 x + \sum_{i=1}^n A_i y_i + A_{n+1}, \quad \text{各 } A_k \text{ は } n \times n \text{ (定数) 行列,}$$

$$b(x, \vec{y}) = b_0 x + \sum_{i=1}^n b_i y_i + b_{n+1} \quad \text{各 } b_k \text{ は } n\text{- (定数) ベクトル,}$$

とする ($k = 0, 1, \dots, n, n+1$)。さらに、初期値 $a, y_1^*, \dots, y_n^*$ をそれぞれ内部に含む適当な (小さな) 閉区間 $I', J_1, \dots, J_n$ が存在し、任意の $(a', y_1^{**}, \dots, y_n^{**}) \in I' \times J_1 \times \dots \times J_n$ について、 a' を含む区間 I'' において初期条件 $y_i(a') = y_i^{**} \in J_i, i = 1, \dots, n$, を満足する常微分方程式系 (8) の解が (局所) 一意的に存在する。

注意 1 実は、上の例 1, 例 2 をこの立場からそのまま単純に汎用アナログ計算機として見直すと、話はかなりややこしくなる。どう対処すべきかを論ずるのはこの稿の趣旨から外れる。別の機会にしたい。

命題 1 の証明の概略を示しておく。u は n 個の積分器 $U_1, \dots, U_n$ を含むとし、それぞれの出力を $y_1, \dots, y_n$ とする。 U_k の入力は、各積分器の出力と加算器、定数乗算器、定数器の出力であるか、あるいは変数 x だから

$$u = c_{0k} x + \sum_{i=1}^n c_{ik} y_i + c_{n+1,k} \quad \text{または} \quad v = c'_{0k} x + \sum_{j=1}^n c'_{jk} y_j + c'_{n+1,k}$$

の形である。第一入力 (被積分関数) を u , 第二入力 (積分変数) を v とし、 a における初期値を y_k^0 とすると、 U_k の出力は

$$\begin{aligned} y_k &= \int_a^x u \, dv + y_k^0 = c'_{0k} \int_a^x (c_{0k} t + \sum_{i=1}^n c_{ik} y_i + c_{n+1,k}) \, dt \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ik} c'_{jk} \int_a^x y_i \, dy_j + y_k^0 \end{aligned}$$

あるいは、

$$\frac{dy_k}{dx} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ik} c'_{jk} y_i \frac{dy_j}{dx} = c'_{0,k} c_{n+1,k} + c'_{0,k} c_{0,k} x + \sum_{i=1}^n c'_{0,k} c_{ik} y_i,$$

すなわち、 $b(x, \vec{y})$ の第 k 成分 $= c'_{0,k} c_{n+1,k} + c'_{0,k} c_{0,k} x + \sum_{i=1}^n c'_{0,k} c_{ik} y_i$ とし、行列 $A(x, \vec{y})$ の第 (i, j) -成分を

$$A_{ij}(x, \vec{y}) = \delta_{ik} \delta_{jk} - \sum_{i=1}^n c_{ik} c'_{jk} y_i, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

とおくと、微分方程式系 (8) が得られる。この命題の最後の部分は汎用アナログ計算機のデータに対する安定性と常微分方程式系のパラメーターに関する依存性の関係を示すもので大切なところではあるが、省略する。以上についての詳細は Shannon[25], Pour-El[21] (特に Pour-El) を見られたい。

定理 1 命題 1 の汎用アナログ計算機 $\mathfrak{U}$ によって生成可能な $u(x)$ は代数微分方程式を満たす。すなわち、 x の有理式を係数とする適当な多項式 $P(X_1, \dots, X_{n+1})$ があって、 $u(x)$ は

$$(9) \quad P\left(x; \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right) = 0$$

を ($x = a$ を内部に含む (適当な) 区間 I において) 満たす。

Pour-El[21] による粗筋を述べる。命題 1 の後半の主張、すなわち、解の局所一意性を利用すると、実は、(8) の左辺に現れる $A(x, \vec{y})$ は非退化でなければならないことが示される。したがって、(8) の両辺に逆行列 $A(x, \vec{y})^{-1}$ を施せば

$$\frac{dy_k}{dx} = \tilde{b}_k(x, \vec{y}), \quad k = 1, \dots, n,$$

となる。右辺の $\tilde{b}_k(x, \vec{y})$ は $x, y_1, \dots, y_n$ の有理式である。これから、

$$\frac{d^k y_1}{dx^k} = r_k(x, y_1, \dots, y_n), \quad k = 1, \dots, n+1,$$

を導くことができる ($r_1 = \tilde{b}_1$)。 $r_k(x, Y_1, \dots, Y_n)$ は $x, Y_1, \dots, Y_n$ の有理式である。ここで、実は、多項式 $P(x; X_1, \dots, X_{n+1})$ を

$$P(x; r_1(x, Y_1, \dots, Y_n), \dots, r_{n+1}(x, Y_1, \dots, Y_n)) = 0$$

を満たすように選ぶことができる (永田 [17], 高木 [29] 参照)。 y_1 を y に改めれば、この P について (9) が成り立っていることがわかる。

定理 1 のある意味での逆も成り立つ。

定理 2 $u(x)$ は区間 I において代数微分方程式を満たしているとする。このとき、 I の適当な部分区間 $I' \subset I$ において、 $u(x)$ を生成する汎用アナログ計算機がある。

詳細は Pour-El[21] をご覧いただきたい。

4 Hölder の議論の続き

以下で、論文の数学的内容を紹介する。第一部の続きの前に、Hölder について述べておこう。



4.1 Hölder について

Hölder というとき、筆者は Hölder 連続や Hölder の不等式を思い起こす。いずれも数学解析において基本的、かつ、重要なものではあるが、類似の Lipschitz 連続や Cauchy-Schwarz の不等式よりは、やや進んだとされる事柄である¹⁴。

Hölder は既述のように 1859 年生まれ、1877 年から Berlin 大学で学び、Weierstrass, Kronecker, Kummer などの講義を聴いている。その後、1882 年に Tübingen 大学の Du Bois-Reymond からポテンシャル論の研究で学位を得ている。また、このころは、Fourier 級数の収束問題を主に研究していた。上述の連続性の条件や不等式はこれらの研究の過程で創出されたものである。以後、Leipzig, Göttingen, Tübingen, Königsberg を経て、1899 年以降、Leipzig に移り、主に、Galois 理論や群論の研究をした。Emil Artin の学位請求論文の審査をしている。群論や環論に関する関心は後に紹介するこの論文第二部にも現れている。Tübingen に赴任する前後の時期（1889 年頃）は発表論文が途絶えており深刻な精神状態にあったとのことではあるが、Tübingen の関係者の厚い信頼に支えられて回復したのだそうである。1937 年 8 月 29 日に 77 歳で亡くなっており、追悼記事が van der Waerden によって書かれている（[35]。業績の概略と業績目録とが含まれているが、最晩年に至るまで論文の出版があることがわかる）¹⁵。

4.2 Hölder の論文. その 2

Hölder の論文の第一部 (Erster Theil¹⁶) を訳出しよう。長文でもあり、議論の要点を説明しておく：関数 $\varphi(x)$ は関係式 (7) を満たすものであった。関数 $\varphi(x)$ がある代数微分方程式を満たすとすると、実は、(7) を利用した論法により、 $\varphi(x)$ が x の有理関数を非同次項に持つ適当な階数の定数係数の線形微分方程式を満たさなければならないことが従い、さらに、同じ論法で、この方程式から $\varphi(x)$ とその導関数を消去できて、その結果、成立し得ない関係式に到達するのである。

¹⁴例えば、1 変数の関数 $h(t)$ がある区間 I で (指数 θ の) Hölder 連続であるとは

$$|h(t) - h(s)| \leq C |t - s|^\theta, \quad t, s \in I, \quad C \text{ は定数 } > 0,$$

が成り立つことをいう（ただし、Hölder は高次元のときを扱っている）。通例 $0 < \theta \leq 1$ とするが、 $\theta = 1$ の場合は Lipschitz 連続といわれる。また、(I 上の) 関数 $f(t), g(t)$ に関する不等式

$$\left| \int_I f(t) g(t) dt \right| \leq \left(\int_I |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_I |g(t)|^q dt \right)^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad 1 < p < +\infty,$$

は Hölder の不等式と呼ばれる。 $p = q = 2$ のときが Cauchy-Schwarz の不等式である。

¹⁵St. Andrews 大学の記事 [41] も参照した。

¹⁶h に注意！今は Teil と綴る。このような綴りだけでなく、現在とは違う用法の語彙も多いようだが、いちいち断らない。なお、式番号、脚注の番号は、本稿全体で通したので、Hölder の論文のものとはずれている。(訳注)

第一部

関数 $\varphi(x)$ に対して代数微分方程式が存在するという仮定の下で、この方程式を

$$(10) \quad G(x; \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$$

の形におく．ここで、 G は

$$\varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)$$

の多項式を意味し、その係数は x の有理関数でなければならない．方程式 (10) は x のすべての値に対して成り立たなければならないが、その際、当然の仮定は、この方程式が恒等式ではない、すなわち、関数 G は、 $\varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)$ の箇所に、互いに、また、 x とも、独立な任意の変数が代入されると、0 に等しくはならないことである．特に、関数 G の m 次の項は実際に出現するが、これに対し、より高次の項は現れないこと、つまり、関数 G は m 次であり、かつ、 $m \geq 1$ であることが仮定できるだろう．さて、証明が依存するのは、方程式 (10) が等式 (7) によってどんどん簡約されて、その結果、ついには矛盾に行き当たるということである．

今の仮定のもとでは G の係数がさらに有理関数で割られたものでもよいから、ある m 次の項の係数が 1 と等しいという想定に到ることができる．方程式 (10) はすでにそうなっているものとする．方程式 (10) から

$$(11) \quad \begin{aligned} &G(x+1; \varphi(x+1), \varphi'(x+1), \dots, \varphi^{(n)}(x+1)) \\ &- G(x; \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0. \end{aligned}$$

が従う¹⁷．

さて、等式 (7)：

$$\varphi(x+1) = \frac{1}{x} + \varphi(x)$$

が κ 回微分されると

$$(12) \quad \varphi^{(\kappa)}(x+1) = \frac{(-1)^\kappa \kappa!}{x^{\kappa+1}} + \varphi^{(\kappa)}(x)$$

が得られる．等式 (7) (12) を援用して (11) の左辺から

$$\varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)$$

¹⁷言うまでもないこととは思いますが、ここで左辺の 2 項は実はいずれも 0 である．(訳注)

の多項式で、 x の有理関数を係数に持つもの、すなわち、

$$(13) \quad H(x; \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0.$$

を導くことができる。ここで、 m 次の項が現れるのは、方程式 (10) の m 次の項だけに由来する。これらの [つまり (10) の] 項からなる和を

$$P_{1m}(x) + R_2(x)P_{2m}(x) + \dots + R_s(x)P_{sm}(x)$$

とせよ。ここで、 $R_2 \dots R_s$ は x の有理関数とし、

$$P_{1m}(x), P_{2m}(x), \dots, P_{sm}(x)$$

は $\varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)$ の冪からなる m -次の積を意味する。これら s 個の量 $P_{\nu m}(x)$ ($\nu = 1, 2, \dots, s$) は当然ながら相異なっていないなければならない。さて、 $P_{\nu m}(x+1)$ に方程式 (7) (12) に基づいて $\varphi(x+1), \varphi'(x+1), \dots, \varphi^{(n)}(x+1)$ に対して量 $\varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)$ を挿入すると、ただ 1 個の m -次の項、すなわち $P_{\nu m}(x)$ が得られる。それゆえ、

$$\{R_2(x+1) - R_2(x)\}P_{2m}(x) + \dots + \{R_s(x+1) - R_s(x)\}P_{sm}(x)$$

が方程式 (13) の m -次の項からなる和である。

x の各値に対して

$$R_\nu(x+1) - R_\nu(x) = 0$$

となるとすれば、直ちに等式の連鎖

$$R_\nu(x) = R_\nu(x+1) = R_\nu(x+2) = \dots$$

が導かれるが、これから、 $R_\nu(x)$ が有理関数を意味しているので、これらがある定数の値をとらなければならないことが従う。

また、関数

$$R_2(x), R_3(x), \dots, R_s(x)$$

のうちに定数ではないものがあると、等式 (13) は恒等式ではなく、実は、 m -次であるが、 m -次の項は、しかし、(10) よりも最低 1 項は少ないのである。

(13) の左辺を x の有理関数で割れば、 m -次の項の係数のいずれかが 1 に等しいという場合になる。そこで、今の式を方程式 (10) から導いたような取り扱いを改めて行えば同様の方程式が得られる。必要ならばこの手順は何回でも繰り返される。

いずれにせよ遂に得られる方程式は、 m -次の項がただ 1 項だけからなるようなものであるか、そうでなければ、 m -次の項の係数がどの 2 係数間の比も定数 — ゆえに、これら係数は定数であると仮定することができる — になるようなものである¹⁸。なぜなら、こうなっていない限り、以前の観察は有効なので既述の手順により m -次の項の数をまだ減らせるはずである。

以上により次が示された：**もし m -次の方程式が成り立つならば、 m -次の項の係数がすべて定数であるような同様の方程式も成り立つ。**

さて、今述べたばかりの性質を満たす方程式

$$(14) \quad G_0(x; \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$$

を考えて、

$$\begin{aligned} G_0(x+1; \varphi(x+1), \varphi'(x+1), \dots, \varphi^{(n)}(x+1)) \\ - G_0(x; \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0 \end{aligned}$$

の展開から得られる方程式

$$(15) \quad H_0(x; \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$$

は m より低次である。この際、示すことは方程式 (15) が恒等式にはなり得ないことだけである。

この目的のため、方程式 (15) 左辺がどのような $m-1$ 次の項から生ずるのか考慮する。これら $m-1$ 次の項は (14) の $m-1$ 次の項から来るものか、あるいは、(14) の最高次の項を集めた式

$$(16) \quad P_{1m}(x) + c_2 P_{2m}(x) + \dots + c_s P_{sm}(x),$$

から来るものだけである。ここで、 $c_2, \dots, c_s$ は定数の量を意味し、 $P_{1m}(x), P_{2m}(x), \dots, P_{sm}(x)$ の意味は上述の通りである。係数の一つはここでも 1 に等しくとる。

まず最初に式 (16) から出る項について考察する。

$$P_{1m}(x) = (\varphi^{(\kappa_1)}(x))^{\alpha_1} (\varphi^{(\kappa_2)}(x))^{\alpha_2} \dots (\varphi^{(\kappa_r)}(x))^{\alpha_r},$$

をとる。ここで、和

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r = m$$

¹⁸このような係数の項は (11) から (12) に至る過程で同時に消えてしまうので、最終的に m -次の項が残らない場合である。(訳注)

であり、整数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ は正で、0 にならないものである。
 $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_r$ は相異なり、このうち 1 個は 0 に等しくてもよい。
 このとき、 $\varphi^{(0)}(x)$ は $\varphi(x)$ を表す。差 $P_{1m}(x+1) - P_{1m}(x)$ からは、 $\varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)$ による展開の後、特に、

$$\frac{(-1)^{\kappa_1} \kappa_1! \alpha_1}{x^{\kappa_1+1}} (\varphi^{(\kappa_1)}(x))^{\alpha_1-1} (\varphi^{(\kappa_2)}(x))^{\alpha_2} \dots (\varphi^{(\kappa_r)}(x))^{\alpha_r},$$

という項¹⁹が出る。この項は 0 とは異なるが、方程式 (15) においては他の項と一緒にすることもあり得る。

式 (16) からは他にも積

$$(17) \quad (\varphi^{(\kappa_1)}(x))^{\alpha_1-1} (\varphi^{(\kappa_2)}(x))^{\alpha_2} \dots (\varphi^{(\kappa_r)}(x))^{\alpha_r}$$

を含む項が現れ得るが、そのとき積

$$P_{\nu m}(x) \quad (\nu = 2, 3, \dots, s)$$

の少なくとも一つは

$$P_{\nu m}(x) = (\varphi^{(l)}(x)) (\varphi^{(\kappa_1)}(x))^{\alpha_1-1} (\varphi^{(\kappa_2)}(x))^{\alpha_2} \dots (\varphi^{(\kappa_r)}(x))^{\alpha_r}$$

の形で占められている。ここで l は列 $0, 1, 2, \dots, n$ の数である。
 $P_{\nu m}(x)$ はここでは $P_{1m}(x)$ とは異なるとの前提があるから、 l は必然的に κ_1 とは異なり、一方、 l は整数 $\kappa_2, \dots, \kappa_r$ のいずれかと一致する。すると、

$$c_\nu P_{\nu m}(x+1) - c_\nu P_{\nu m}(x)$$

の展開に、項

$$\frac{\text{const.}}{x^{l+1}} (\varphi^{(\kappa_1)}(x))^{\alpha_1-1} (\varphi^{(\kappa_2)}(x))^{\alpha_2} \dots (\varphi^{(\kappa_r)}(x))^{\alpha_r}.$$

が見出される。このような項は、式 (16) から現れてくるが、 $m-1$ 次の項にまとめられる。いずれにせよ、この場合、 l は κ_1 と異なるものである。

こうして言えることは、式 (16) から出てくる項で、積 (17) を含むものをまとめると、この積に係数

$$\sum_{\mu=0}^n \frac{A_\mu}{x^{\mu+1}}.$$

を付したものになる。ここで、定数 $A_0, A_1, \dots, A_n$ のうち、

$$A_{\kappa_1} = (-1)^{\kappa_1} \kappa_1! \alpha_1$$

¹⁹ $\kappa_1 = 0$ の場合は $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \kappa_1$ を形式的に 1 で置き換える。(原注)

は、いずれにせよ 0 と異なる。

まだ、(14) の $m-1$ 次の項で

$$x \text{ の有理関数} \times (\varphi^{(\kappa_1)}(x))^{\alpha_1-1} (\varphi^{(\kappa_2)}(x))^{\alpha_2} \cdots (\varphi^{(\kappa_r)}(x))^{\alpha_r}$$

の形のもの方程式 (15) への寄与がある。これは、(14) の $m-1$ 次の項のうちの

$$R(x) \cdot (\varphi^{(\kappa_1)}(x))^{\alpha_1-1} (\varphi^{(\kappa_2)}(x))^{\alpha_2} \cdots (\varphi^{(\kappa_r)}(x))^{\alpha_r}$$

の形のものであって、その上、これから方程式 (15) への寄与は

$$\{R(x+1) - R(x)\} (\varphi^{(\kappa_1)}(x))^{\alpha_1-1} (\varphi^{(\kappa_2)}(x))^{\alpha_2} \cdots (\varphi^{(\kappa_r)}(x))^{\alpha_r}.$$

となる。

これまでに述べた展開をすべてまとめると、方程式 (15) における積 (17) に係数

$$(18) \quad \sum_{\mu=0}^n \frac{A_\mu}{x^{\mu+1}} + R(x+1) - R(x)$$

を付したものである。ここで、 $R(x)$ は x のある有理関数である。今の場合がそうであるが、定数 $A_0, A_1, \dots, A_n$ のうちに 0 と異なる値をとるものがあれば、(18) の形の表現は x のすべての値に対しては 0 に等しくなることができない。これで、先の主張の証明が補足され、前もって目論んでいた通りの結論が達成されることになる。

かくて次のことが示された：**量 $\varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)$ の間に、 x のすべての値に対して定義され、恒等的ではない方程式で、係数が x の有理関数であるような m -次のものが成り立つならば、これらの量の間では、同様の $m-1$ 次のものが成り立つ²⁰。**したがって、 $m-2$ 次、 $m-3$ 次、 $\dots$ 次の方程式が成り立つ。そうすると、 $\varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)$ の**線形**の間に方程式がなければならぬ。方程式

$$\sum_{\mu=0}^n R_\mu(x) \varphi^{(\mu)}(x) + R(x) = 0,$$

からは、有理関数

$$R_\mu(x) \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots, n)$$

²⁰ 普通の発想ならば、当初の代数微分方程式を想定しうるもののうちの最小次数のものという仮定をしておいて、今示したと組み合わせて所要の矛盾が生じたとするだろう。しかし、Hölder はこの観察をさらに推し進め、結局、どんな代数微分方程式から出発しても身動きできなくなることを導く。(訳注)

はどんな時でも x のすべての値に対して全部が消えることはない
 とすると、前述のように、方程式

$$\sum_{\mu=0}^n c_{\mu} \varphi^{(\mu)}(x) + \bar{R}(x) = 0$$

の存在が結論できる．ここで、係数 $c_0, c_1, \dots, c_n$ の少なくとも
 一つは 0 とは異なる．このことから、しかし、

$$\sum_{\mu=0}^n c_{\mu} \{ \varphi^{(\mu)}(x+1) - \varphi^{(\mu)}(x) \} + \bar{R}(x+1) - \bar{R}(x) = 0,$$

が従うが、直ちに、

$$\sum_{\mu=0}^n \frac{c_{\mu}(-1)^{\mu} \mu!}{x^{\mu+1}} + \bar{R}(x+1) - \bar{R}(x) = 0$$

に移行する．この方程式の左辺は (18) の形をしており、すなわ
 ち、この方程式は矛盾である．ゆえに、 $\varphi(x)$ はいかなる代数微分
 方程式も満たすことができない．

完全性のために、なお、

$$\sum_{\mu=0}^n \frac{A_{\mu}}{x^{\mu+1}} + R(x+1) - R(x) = 0$$

の形の方程式が、定数 $A_0, A_1, \dots, A_n$ のうちに 0 と異なるもの
 があれば、不可能であることの導き方を述べる．

前述の総和は $x = 0$ で有限にはならないが、方程式が成り立つ
 という要請のもとでは、差

$$R(x+1) - R(x)$$

も同じ点において有限にはならない．有理関数 $R(x)$ は、だから、
 二点 $x = 0$ と $x = 1$ のいずれか一方で確かに有限にはならない．
 さて、数列

$$\dots - 3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots$$

において、 $R(x)$ が有限にならないもののうち、代数的最大を p 、
 代数的最小を q とせよ．すると、 $p \geq q$ である．差

$$R(x+1) - R(x)$$

は点 $x = p$ と $x = q - 1$ において確実に有限にはならない．す
 なわち、この差は互いに異なる 2 点において有限にはならないが、
 一方、和

$$\sum_{\mu=0}^n \frac{A_{\mu}}{x^{\mu+1}}$$

はただ 1 点で有限ではない。直ちに、考察中の形の方程式が不可能であることとなる。

以上を振り返って見ると、この証明は実は代数的であると判断できる。基本は、関係式 (7) であるが、ここを、適当な変換 T に対して

$$\varphi(Tx) - \varphi(x) = g(x)$$

が成り立つ、と改めたときに、なお有効な議論を追って行くことにより、微分多項式の「最高次の項を集めた部分」の変換に対する安定性が重要な役割を果たしていることがわかるのである²¹。最後に、関数値の発散を利用して矛盾を導く箇所があるが、ここもよく考えてみると、相当に形式的、代数的である。この点は、例えば、Polya [20] が代数微分方程式の解となるべき関数を増大度で特徴付けたことと対比してみれば明らかであろう（したがって、 $\varphi(x)$ の増大度を評価すれば、この節の結論はいわば定量的に導けるのである）。一世紀以上の昔の仕事ではあるが、基本的な概念だけに基づいており、丁寧に読んで、それなりの面白さが感じられると思う。つまり、古典と考えてよいであろう。

4.3 Hölder の論文. その 3

Hölder は、第二部において、 $\Gamma(x)$ が代数微分方程式を満たさないことを（脚注 8 の注意に依らずに）丁寧に論ずる。

その要点は次の通り： $\Gamma(x)$ とその導関数の間に x の有理関数を係数とする代数微分方程式が成り立つならば、この方程式を x について微分したのも同種の代数微分方程式になるが、実は、これら両者が矛盾することを示す。このために、これら代数微分方程式の左辺が第一部の結果を援用すれば（多変数の有理関数体を係数体とする）1 変数の扱いやすい多項式に書き換えられることを注意し、両多項式の最大公約数を論ずるのである。

第二部

関数 $\Gamma(x)$ もどんな代数微分方程式も満たさないことが、なお、示されなければならない²²。この目的のために、関係式

$$(19) \quad \Gamma'(x) = \Gamma(x)\varphi(x)$$

²¹ 事実、Hausdorff [7] は、 $Tx = x + 1$ のとき $g(x)$ が無限遠で消える有理関数で、かつ、任意の二つの極の差が整数にならないならば、 $g(x) \equiv 0$ でない限り、 $\varphi(x)$ は決して代数微分方程式を満たすことがないことを証明している。

²² ある関数の対数微分が代数微分方程式を満たすならば関数自身に対しても直ちに同種の方程式の存在が言える。したがって、ある関数に対する代数微分方程式の成立の不可能性から対数微分に対する同種の微分方程式の不可能性を直接に結論できる。逆の主張は、瞬時の考察で正しさが明らかになるものでも、検証は要る。以下の証明はこのような考察に異論のない結論という体裁を施すものに他ならない。（原注）

を利用する．これを何回も微分して以下の等式を得る：

$$(20) \quad \begin{cases} \Gamma''(x) &= \Gamma'(x)\varphi(x) + \Gamma(x)\varphi'(x) \\ &= \Gamma(x)\{(\varphi(x))^2 + \varphi'(x)\}, \\ \Gamma'''(x) &= \Gamma'(x)\{(\varphi(x))^2 + \varphi'(x)\} \\ &\quad + \Gamma(x)\{2\varphi(x)\varphi'(x) + \varphi''(x)\} \\ &= \Gamma(x)\{(\varphi(x))^3 + 3\varphi(x)\varphi'(x) + \varphi''(x)\}. \\ \dots\dots &\dots\dots \end{cases}$$

$\Gamma(x)$ の κ 階導関数は $\Gamma(x)$ と

$$\varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(\kappa-1)}(x).$$

の多項式の積である．

さて，ガンマ関数に対して代数微分方程式があるとし，それを

$$(21) \quad \mathfrak{G}(x; \Gamma(x), \Gamma'(x), \dots, \Gamma^{(n)}(x)) = 0,$$

の形にする²³．ここで， $\mathfrak{G}$ は

$$\Gamma(x), \Gamma'(x), \dots, \Gamma^{(n)}(x)$$

の多項式を意味する．その係数は x の有理関数である．この方程式 (21) は関係式 (19) (20) によって

$$x; \Gamma(x), \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)$$

の間に成り立つ代数方程式に変形され，(13) 同様

$$(22) \quad \mathfrak{H}(x; \Gamma(x), \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) = 0$$

の形にできる．この方程式 (22) は，明らかに仮定できることであるが，方程式 (21) が恒等的でなければ，恒等式ではない．方程式 (19) と (20) において

$$\begin{aligned} &\Gamma(x), \Gamma'(x), \dots, \Gamma^{(n)}(x), \\ &\varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

の代わりに，それぞれ，

$$y, y_1, \dots, y_n,$$

$$z, z_1, \dots, z_{n-1}$$

²³ $\mathfrak{G}$ は G のドイツ花文字体である．(22) に現れる $\mathfrak{H}$ は H の，(27) に現れる $\mathfrak{Q}$ は Q の花文字体である．(訳注)

を代入すると、これらの方程式は

$$\begin{aligned} y_1 &= yz, \\ y_2 &= y(z^2 + z_1), \\ y_3 &= y(z^3 + 3zz_1 + z_2), \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots, \end{aligned}$$

と変わり、これは逆向きに解いて

$$\begin{aligned} z &= \frac{y_1}{y}, \\ z_1 &= \frac{y_2}{y} - \frac{y_1^2}{y^2}, \\ z_2 &= \frac{y_3}{y} + 2\frac{y_1^3}{y^3} - 3\frac{y_2y_1}{y^2}, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \end{aligned}$$

が従うので、これから $n+1$ 個の独立変数 $y, z, z_1, \cdots, z_{n-1}$ に従属する n 個の変数 $y_1, \cdots, y_n$ が決まる、あるいは、 $n+1$ 個の独立変数 $y, y_1, \cdots, y_n$ から $z, z_1, \cdots, z_{n-1}$ が決まることがわかる。すると、式

$$\mathfrak{H}(x; y, z, z_1, \cdots, z_{n-1})$$

が $y, z, z_1, \cdots, z_{n-1}$ と x のすべての値に対して消えるか、あるいは、式

$$\mathfrak{G}(x; y, y_1, \cdots, y_n)$$

が $y, y_1, \cdots, y_n$ と x のすべての値に対して消えなければならないことになる。

$y, z, z_1, \cdots, z_{n-1}$ の多項式

$$\mathfrak{H}(x; y, z, z_1, \cdots, z_{n-1})$$

の代わりに、これが既約ではない場合のことであるが、その既約因子を考えることができる。なぜなら、 $y, z, z_1, \cdots, z_{n-1}$ に量 $\Gamma(x), \varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n-1)}(x)$ を代入すると、すべての x の値に対して関数が消えるのは、そのある既約因子

$$\mathfrak{H}_1(x; y, z, z_1, \cdots, z_{n-1})$$

でそうならなければならないからである。

Hölder は、この後、Galois による代数方程式の取り扱いの根幹をなすアイデアに言及し、それが Kronecker によって拡張されて「体（有理域・原語

Rationalitätsbereich²⁴)」という概念が導入されたこと、目下の場合では、 x の有理関数体を考えることになるという（体については、例えば、永田 [17] 参照）。Hölder は、以下で、 $x, z, z_1, \dots, z_{n-1}$ の有理関数体を係数体とする y の多項式環と x の有理関数体を係数体とする $y, z, z_1, \dots, z_{n-1}$ の多項式環における割り算を考察する。

Hölder の論文に戻ろう。

多項式の可約性並びに既約性に関して言えば、いつでも約数として目下の課題に相応しい多項式がどのようなものか、つまり、約数の係数についてどのような仮定をすべきであるかが論じられなければならない。この事情は、すでに Galois により注意が喚起されていたが、特に、Kronecker 氏により改めて取り上げられた。氏はまず選択すべき立脚点の特徴づけを通じて有理域（＝体）の概念を導入したのである。Kronecker の有理域は、ここでは x の有理関数のなすものに相当する。考察中の因子は、 $y, z, z_1, \dots, z_{n-1}$ の多項式であって、係数が変数 x に関する有理式に組み合わされたものである。ただし、ここでは、これらの x の有理関数に入っている定数の状態については除いておく。

なお、注意しておくべきことであるが、この際、我々は

$$x, y, z, z_1, \dots, z_{n-1}$$

を独立な変数と見る。

さらに、関数

$$\mathfrak{H}_1(x; y, z, z_1, \dots, z_{n-1})$$

において量 y が実際に現れることを仮定しよう。実際、もしこれが成り立たないのなら、それは

$$x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)$$

の間に代数的関係の存在を意味するが、それが不可能であることはすでに示してある。

そこで、関数 $\mathfrak{H}_1$ を y の幂で整理すると、

$$\mathfrak{H}_1(x; y, z, z_1, \dots, z_{n-1}) = \sum_{\nu=0}^{\rho} \mathfrak{G}_{\nu}(x; z, z_1, \dots, z_{n-1}) \cdot y^{\nu}$$

となる。ここで、 $\rho \geq 1$ であり、式

$$\mathfrak{G}_{\rho}(x; z, z_1, \dots, z_{n-1}),$$

²⁴有理域が体であることは公田蔵先生（立教大学名誉教授）にご教示いただいた。

は, $z, z_1, \dots, z_{n-1}$ の多項式で, x の有理関数を係数とし, 恒等的には 0 になることはない. このことは

$$\mathfrak{G}_0(x; z, z_1, \dots, z_{n-1}),$$

についても成り立つ. なぜなら, 関数 $\mathfrak{H}_1$ は既約と仮定されているからである²⁵.

方程式

$$(23) \quad \sum_{\nu=0}^{\rho} \mathfrak{G}_{\nu}(x; \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) (\Gamma(x))^{\nu} = 0$$

を x で微分する. $\Gamma'(x)$ を再び $\Gamma(x)\varphi(x)$ で置き換えて,

$$\sum_{\nu=0}^{\rho} \left\{ \frac{d}{dx} \mathfrak{G}_{\nu}(x; \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) + \nu \varphi(x) \mathfrak{G}_{\nu}(x; \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) \right\} (\Gamma(x))^{\nu} = 0,$$

を得る. これは

$$(24) \quad \sum_{\nu=0}^{\rho} \overline{\mathfrak{G}}_{\nu}(x; \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) (\Gamma(x))^{\nu} = 0$$

の形に書くことができる. 式

$$\sum_{\nu=0}^{\rho} \overline{\mathfrak{G}}_{\nu}(x; z, z_1, \dots, z_n) y^{\nu}$$

を

$$\mathfrak{H}_2(x; y, z, z_1, \dots, z_n)$$

と表すことができる. ここで, z_n は $x, y, z, z_1, \dots, z_{n-1}$ とは独立な新しい変数である. また, 等式

$$(25) \quad \begin{aligned} \overline{\mathfrak{G}}_{\nu}(x; z, z_1, \dots, z_n) &= \frac{\partial \mathfrak{G}_{\nu}(x; z, z_1, \dots, z_{n-1})}{\partial x} \\ &+ \sum_{\alpha=0}^{n-1} z_{\alpha+1} \frac{\partial \mathfrak{G}_{\nu}(x; z, z_1, \dots, z_{n-1})}{\partial z_{\alpha}} \\ &+ \nu z \mathfrak{G}_{\nu}(x; z, z_1, \dots, z_{n-1}) \end{aligned}$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \dots, \rho, \quad z_0 = z)$$

が成り立つ.

²⁵それ以外に, まだ, $\mathfrak{H}_1 = R(x) \cdot y$ が残っているが, これは $\Gamma(x)$ に対しては矛盾する方程式を示すことになる. (原注)

これら等式のうち最後のもの、 $\nu = \rho$ 、に注視しよう。関数

$$\overline{\mathfrak{G}}_\rho(x; z, z_1, \dots, z_n)$$

は二部から成り、第二部：

$$\rho z \mathfrak{G}_\rho(x; z, z_1, \dots, z_{n-1})$$

は恒等的に 0 になることはなく、 $z, z_1, \dots, z_{n-1}$ について

$$\mathfrak{G}_\rho(x; z, z_1, \dots, z_{n-1})$$

より次数が 1 だけ高い。他方、第一部は $z, z_1, \dots, z_n$ について $\mathfrak{G}_\rho$ より次数は高くない。したがって、

$$\overline{\mathfrak{G}}_\rho(x; z, z_1, \dots, z_n)$$

も恒等的に 0 にはならず、この関数の $z, z_1, \dots, z_n$ に関する次数は $\mathfrak{G}_\rho(x; z, z_1, \dots, z_{n-1})$ のものより 1 だけ大きい。それゆえ、

$$\mathfrak{H}_2(x; y, z, z_1, \dots, z_n)$$

も恒等的に 0 にはならず、その上、この関数の y に関する次数は丁度 ρ である。

方程式 (23) (24) の左辺を今は $\Gamma(x)$ だけの多項式関数と考える。これら双方の関数に最大公約数を見つけ出すための手順を応用する。この際、量 $x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)$ の間に代数的関係が存在できないので、これらの量の占める箇所に互いに独立な任意の量があるものとして適用する。方程式 (23) (24) は互いに矛盾はしていないので、公約数を求める手順での剰余は x のすべての値に対して消えなければならない。この剰余は、 $x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)$ から有理的に組み立てられているので、これ自身が**形式上** 0 に等しいことになる。言い換えれば、関数

$$\mathfrak{H}_1(x; y, z, z_1, \dots, z_{n-1}) \quad \text{および} \quad \mathfrak{H}_2(x; y, z, z_1, \dots, z_n)$$

には公約数がある。次に、最大公約数と、 $\mathfrak{H}_1$ と $\mathfrak{H}_2$ をこの最大公約数で除して得られる商も、 y の多項式関数で、係数は任意の変数 $x, z, z_1, \dots, z_n$ について有理的であるものと見られることがわかる。関数 $\mathfrak{H}_1$ は既約であり、 y の関数としてもそうだから、 $\mathfrak{H}_1$ は上述の意味で $\mathfrak{H}_2$ の因子になる。しかし、 $\mathfrak{H}_1$ も $\mathfrak{H}_2$ も y については ρ -次だから、商

$$\frac{\mathfrak{H}_2(x; y, z, z_1, \dots, z_n)}{\mathfrak{H}_1(x; y, z, z_1, \dots, z_{n-1})}$$

に量 y が入ることはできなくて、これは $x, z, z_1, \dots, z_n$ だけの有理関数である。ゆえに等式

$$(26) \quad \begin{aligned} & g(x; z, z_1, \dots, z_n) \mathfrak{H}_2(x; y, z, z_1, \dots, z_n) \\ &= g_1(x; z, z_1, \dots, z_n) \mathfrak{H}_1(x; y, z, z_1, \dots, z_{n-1}), \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、 g と g_1 は $z, z_1, \dots, z_n$ の**多項式**で、係数が x に関して有理的であるものを意味する。さて、 $\mathfrak{H}_1$ は既約であり、この関数は変数 y を実際に含んでいるから、 g と $\mathfrak{H}_1$ は公約数を持ち得ない。ここで、 $y, z, z_1, \dots, z_n$ の多項式関数の間で常に成り立つ関係を再度取り上げる。(26) から直ちに g が g_1 の因子でなければならないことが従う。ゆえに、

$$\begin{aligned} & \mathfrak{H}_2(x; y, z, z_1, \dots, z_n) \\ &= \Omega(x; z, z_1, \dots, z_n) \mathfrak{H}_1(x; y, z, z_1, \dots, z_{n-1}), \end{aligned}$$

の形の等式が得られる。ここで、 Ω は $z, z_1, \dots, z_n$ の多項式関数を表す。

この最後の等式は等式の列

$$(27) \quad \begin{aligned} & \overline{\mathfrak{G}}_\nu(x; z, z_1, \dots, z_n) \\ &= \Omega(x; z, z_1, \dots, z_n) \mathfrak{G}_\nu(x; z, z_1, \dots, z_{n-1}) \\ & \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots, \rho) \end{aligned}$$

と同値である。関数 Ω は明らかに恒等的に 0 に等しくはない。等式 (27) の最後のもの：

$$\overline{\mathfrak{G}}_\rho(x; z, z_1, \dots, z_n) = \Omega(x; z, z_1, \dots, z_n) \mathfrak{G}_\rho(x; z, z_1, \dots, z_{n-1})$$

は、しかし、 Ω が $z, z_1, \dots, z_n$ について丁度次数 1 でなければならないことを示す。なぜなら、 $\overline{\mathfrak{G}}_\rho$ の次数が $\mathfrak{G}_\rho$ のものよりも丁度 1 だけ大きいことがわかっていたからである。等式 (27) の第一のもの：

$$\overline{\mathfrak{G}}_0(x; z, z_1, \dots, z_n) = \Omega(x; z, z_1, \dots, z_n) \mathfrak{G}_0(x; z, z_1, \dots, z_{n-1})$$

からは、 $\mathfrak{G}_0$ が恒等的には消えないので（上記参照）、 $\overline{\mathfrak{G}}_0$ の次元が $\mathfrak{G}_0$ のものより大きくなければならないことが従う。しかし、これは等式 (25) の第一：

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{G}}_0(x; z, z_1, \dots, z_n) &= \frac{\partial \mathfrak{G}_0(x; z, z_1, \dots, z_{n-1})}{\partial x} \\ &+ \sum_{\alpha=0}^{n-1} z_{\alpha+1} \frac{\partial \mathfrak{G}_0(x; z, z_1, \dots, z_{n-1})}{\partial z_\alpha} \end{aligned}$$

に矛盾する.

これにより, 同時に, ガンマ関数が代数微分方程式を満足するという仮定が矛盾に帰着された.

Hölder の論文は, 場所 (ゲッティンゲン) と日付 (1886 年 6 月 26 日) を末尾に記して終わる.

5 ガンマ関数のデジタル計算可能性

5.1 関数の計算可能性

直線上の閉区間 $[a, b]$ で定義された実数値関数について, その計算可能性を汎用アナログ計算機によって生成可能であるとして定義する立場があることは, 上で述べた. しかし, 関数の計算可能性を原理的にデジタル計算機で計算可能なこととして定める立場もあり, むしろ今日では, **特に断らない限り**²⁶, こう解されるのが一般的であろう. このような計算可能性, つまり, デジタルな意味での計算可能性 Turing 機, つまり, デジタル計算機の理論モデル, によって計算できること (Turing[34], cf. Davis[4]. Weihrauch[36]), あるいは, 実は同等のことだが, 再帰的な手立てによって計算できること (Pour-El & Richards[22]), と把握して以下の議論を進めたい.

汎用アナログ計算機は, 基本的に, すべての実数が計算可能であるという想定から成り立っていた. ところで, 例えば, 実数 r の 2 進展開

$$(28) \quad r = 2^M \sum_{i=0}^{\infty} \rho(i) 2^{-i}$$

には, 係数を定める写像 $\rho: \mathbb{N} \ni i \mapsto \rho_i \in \{0, 1\} \subset \mathbb{N}$ および, 2 進展開の収束を $|r - 2^M \sum_{i=0}^{\delta(N)} \rho(i) 2^{-i}| < 2^{-N}$ となるよう管理する写像 $\delta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ が現れる. 汎用アナログ計算機は, 写像 ρ や δ がどのように定められているかは問題にしないのである. 一方, これに対し, 原理的にデジタル計算機によって計算できる実数 r は, 写像 ρ や δ が Turing 機によって計算できるようなものであり, デジタル計算可能な実数とは, このような実数のことである.

それでは, ρ や δ が Turing 機によって計算できるとはどのようなことか.

5.2 ガンマ関数の場合

Pour-El [21] は, $\Gamma(x)$ のデジタルな意味での計算可能性の検証は, 公式 (5) を用いてできるが, しかし, 手間が掛かり過ぎるので論文としての公

²⁶したがって, この節以降ではいちいちデジタルとは断らない.

表には馴染まないで、技術報告の形の資料が用意してあるだけであるという。ここでは (1) を検討しよう。

まず、 x を $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ とする。 x は（デジタルな意味で）計算可能な実数とするべきだが、この概念自体説明を要するので、とりあえず有理数としておこう。目指すのは、 $\Gamma(x)$ を「よい」多項式列によって（ $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ において一様に）「具合よく」近似できることである。

N を自然数とする。 $R(N) > 0$ を

$$R(N)^{1/2} e^{-R(N)} \leq 2^{-N-2}$$

を満たす最小の自然数とし、 $\epsilon(N)$ はその逆数が自然数 4^{N+3} となるように選ぶ。

注意 2 $N \mapsto R(N)$ および $N \mapsto \frac{1}{\epsilon(N)}$ は再帰的関数である。

すると、 $R > R(N)$ および $0 < \epsilon < \epsilon(N)$ に対し、

$$\int_{R(N)}^R e^{-t} t^{x-1} dt \leq \frac{1}{4} 2^{-N}, \quad \int_{\epsilon}^{\epsilon(N)} e^{-t} t^{x-1} dt \leq \frac{1}{4} 2^{-N}$$

が成り立つ。したがって、(1) によれば、

$$0 < \Gamma(x) - \int_{\epsilon(N)}^{R(N)} e^{-t} t^{x-1} dt \leq \frac{1}{2} 2^{-N}$$

である。区間 $[\epsilon(N), R(N)]$ において被積分関数 $e^{-t} t^{x-1}$ を t の「よい」多項式（のようにわかりやすいもの）で x に関して一様に近似したい。具体的にはここが難しい。ここでは、やや手を抜いて、まず、多項式

$$(29) \quad P_N(t) = \sum_{m=0}^{M(N)} c_{N,m} t^m$$

を

$$(30) \quad |e^{-t} - P_N(t)| \leq \frac{1}{16} R(N)^{-3/2} 2^{-N}, \quad \epsilon(N) \leq t \leq R(N),$$

を満たすように選ぶことにする。選び方は後述するが、(29) から、

$$(31) \quad G_N(x) = \int_{\epsilon(N)}^{R(N)} P_N(t) t^{x-1} dt = \sum_{m=0}^{M(N)} c_{N,m} \frac{R(N)^{x+m} - \epsilon(N)^{x+m}}{x+m}$$

が従い、さらに、(30) のもとで、

$$\int_{\epsilon(N)}^{R(N)} |e^{-t} - P_N(t)| t^{x-1} dt \leq \frac{1}{8} 2^{-N}, \quad \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2},$$

になることに注意しよう。したがって、

$$|\Gamma(x) - G_N(x)| \leq \frac{5}{8} 2^{-N}, \quad \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2},$$

が成り立つ。 $G_N(x)$ は x の関数としては $\Gamma(x)$ に比べれば格段にわかりやすい。これをさらに「よい」多項式 $Q_N(x)$ によって、

$$|G_N(x) - Q_N(x)| \leq \frac{1}{8} 2^{-N}, \quad \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2},$$

が成り立つように近似すれば、

$$(32) \quad |\Gamma(x) - Q_N(x)| < 2^{-N}, \quad \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2},$$

を満たすことになる。

そこで問題は $P_N(t)$, $Q_N(x)$ の構成である。これらは同様なので、(29) (30) を検証すればよい。このために、高木 [28], pp.284–286, を利用する。

$$|e^{-x'} - e^{-x''}| \leq |x' - x''|, \quad x', x'' > 0,$$

に注意しよう。 $M(N)$ を

$$M(N) \geq 32 R(N)^{3/2} 2^N$$

を満たす最小の自然数とする。二項定理に現れる多項式

$$\psi_\nu(s) = \binom{M(N)}{\nu} s^\nu (1-s)^{M(N)-\nu}, \quad 0 \leq s \leq 1, \quad \nu = 0, 1, \dots, M(N),$$

を利用して

$$\phi_\nu(t) = \psi_\nu\left(\frac{t - \epsilon(N)}{R(N) - \epsilon(N)}\right), \quad \nu = 0, 1, \dots, M(N), \quad \epsilon(N) \leq t \leq R(N),$$

とおく。 $\phi_\nu(t)$ は t の $M(N)$ -次の多項式である。このとき、

$$P_N(t) = \sum_{\nu=0}^{M(N)} \exp\left(-\left(R(N) - \epsilon(N)\right) \frac{\nu}{M(N)} - \epsilon(N)\right) \phi_\nu(t)$$

とおき、これを書き直せば (29) を得る。(30) の成立については上記 [28] を参照していただきたい。

ディジタルな計算可能性について立ち入っていないので、上の手続きの意味はわかり難いであろう。要点は、 $R(N)$, $\epsilon(N)$ が N から再帰的に定まること、したがって、 $M(N)$ もそうだということである。この際、関数 e^{-t} が（ディジタルに）「計算可能」であることが重要である。他方、多項式 $P_N(t)$ も（間に関数 e^{-t} や x を経由するが）手続きとしては再帰的に定まる。 $G_N(x)$ から $Q_N(x)$ に至る過程も同様である。かくして、 N を与えれば多項式 $Q_N(x)$ は再帰的な手順で定まる。(32) は、このような多項式列が $\Gamma(x)$ に「実効的に」収束していることを表しているが、これが関数 $\Gamma(x)$ がディジタルな意味で計算可能ということの意味である。 $\frac{1}{\Gamma(x)}$ が x の任意の区間において計算可能であることを示すためには $\Gamma(x)$ の差分関係式を利用すればよい。

6 若干の議論

整関数（複素平面全体において正則な関数）の（デジタルな）計算可能性の条件は一般論として知られており（[22]），他方，代数微分方程式の解関数の満たすべき条件も知られている（[20]）．両者を前提にすれば，ガンマ関数以外にも（デジタルに）計算可能ながら汎用アナログ計算機では生成できない例はいくらでも作ることができる（[21]）．しかし，汎用アナログ計算機に対する条件を緩めると事情は大幅に変わってしまう（[24]）．いずれにせよ，アナログ機で計算可能ということとデジタル的に計算可能ということとは違うようである．しかし，ガンマ関数の場合でも， $\Gamma(x)$ がデジタル的に計算可能であるといっても，そのときには， x がすでに計算可能であることが要求されており，アナログ的な問題では独立変数が計算可能であるかどうか自体は考慮の必要がないことと対比的である．

適切な定義の選択自体にアナログ計算機の理論的基礎付けの困難があるようである．アナログ機が何であるかを問わずに．アナログ機で計算可能ということと離散的な再帰的関数の類比を念頭に定義する試みがある（Moore[15]）．しかし，アナログとデジタルのよい関係とはどんなことかが明らかになるわけではない．アナログ機のデジタル機によるシミュレーションができるのかどうか，特に，実験や測定による結果がアナログ的なものだとすると，デジタル機で制御するとはどういうことなのか，思わず考え込んでしまう．もとより，アナログ機に対する関心の主要な源泉は，まさに，自然がアナログ的ということにあるようではある（Moore [15]²⁷）．しかし，アナログ的ということと連続量を扱うことができると理解すると，そのことに対して，無理数とか連続性など信じない，という技術者の実感もあるようである．やや断片的な引用だが，通信工学者 Slepian は von Neumann 講演²⁸において次のように言う（[26], p.389）：

Our models of physical phenomena are merely games we play
with symbols on paper, manipulating them according to well-

²⁷ この論文の冒頭で Moore は言う：Classical computation theory deals with the sets of strings, or equivalently functions on the natural numbers $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$; it always discuss computation and complexity in a discrete, digital world. But to discuss the physical world (or at least its classical limit) in which the states of things are described by real numbers and processes that take place in continuous time, we need a different theory: a theory of analog computation, where states and processes are inherently continuous, and which treats real numbers not as sequences of digits but as quantities in themselves. [古典的な計算理論はビットの系列，同値のことであるが，自然数上の関数 $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ を扱う．この理論は離散的でデジタルな世界での計算や複雑性を論ずることに向いている．しかし，物理的世界（少なくとも，その古典的極限）を論ずるにあたっては，状態量は実数で記述され諸過程は連続的時間で生起するので，我々は異なる理論を要する．すなわち，アナログ計算の理論であり，それによれば，状態も過程も本来的に連続であり，しかも，実数は数字の系列としてではなく量そのものとして扱われるのである．] ただし，Moore の思想や意図はともかく技術的には必ずしも完成度の高くない議論が成されたようで，まあ，これは [25] と [21] の関係でも起きていたことではあるが，河村 [10] によって明晰にされたと言うか新たに問題提起された部分がある．

²⁸ Slepian は，通信工学の基本定理，帯域制限された信号の伝送と回復に関する，いわゆる 2WT 定理の厳格な数学的定式化と証明を与えた．この講演はその顕彰の機会でもあった．

defined rules. Certain quantities in our models will correspond, we hope, to observable measurable entities in the real-world situation we are attempting to describe. I call these *principal quantities* of the model. Almost always, however, there will be other quantities or constructs important to the model that have no counterpart in the real-world situation under study. I call these *secondary constructs* of the model. It is my contention that in useful, trustworthy models the principal quantities must be insensitive to small changes in the secondary constructs. [物理現象のモデルは正則な規則に従って記号を操作する紙の上のゲームに過ぎない。モデル中の量のうちには、記述を意図している現実世界の状況の観測可能測定可能な事象に対応するものがあることを期しているが、私はこれらを**主要量**とよぶ。しかし、ほとんどの場合、考察下の現象中に対応物はないながらも、モデルにとっては重要な量や想定がある。私はこれらを**副要請**とよぶ。私の信念として、有益で信頼できるモデルにおいては主要量は副要請の小さな変動に左右されないのである。]

引き続き、Slepian が言うのは、無理数は信じない、測定できない、かくて、

Rationality of quantities is a secondary construct of a model [量の有理数性はモデルの副要請]

であり、さらに、

Continuity is also always a secondary construct [連続性も常に副要請である]

と言う。これも測定技術上の問題が背後にあるのだが、要するに、

Continuity is not a verifiable notion in the real world [連続性は現実世界で検証可能な概念ではない]

からと言うのである。無限大や無限大の近傍での関数の詳細な挙動も同様に認識の限界を超えている、つまり、重要ではあるが検証ができない理念上のことと主張する。こうして、数学解析の貴重なアイデアが、必ずしも否定的な意味ではないとしても、すべて現実世界のものではないと決め付けられるのも奇妙な気もする。しかも、Slepian の議論そのものが実にこれら（副要請）を駆使しているのである。

とまれ、計算可能性という話題は数学と現実世界を繋ぐ部分に横たわるもので極めて重要である。しかし、ディジタル機にせよアナログ機にせよ、特に、後者は理論的には「個々の」と言うべきであろうが、固有の世界を持っている。問題は、相互の関係を適切正確に記述することである。量子計算可能性などを含め、しかし、話題は拡散気味のようなのである。

A Hausdorff の証明

F. Hausdorff の論文 Zum Hölderschen Satz über $\Gamma(x)$ [ガンマ関数についての Hölder の定理に寄せて]²⁹ を以下に翻訳する. Hölder の最初の証明から, ほぼ 40 年, この間多くの証明が発表されて来た. Hausdorff はこの論文の冒頭で次のように言う.

$\Gamma(x)$ はいかなる代数微分方程式をも満足しない. 以下の証明は今までのもの (O.Hölder 1887, E.H. Moore 1897, A. Ostrowski 1919; Math. Ann. **28**, **48**, **79**) よりも本質的に簡単であると信じる.

ここでは Mathematische Annalen 所収の証明だけが言及されているためか, Barnes による証明が落ちている. また, この論文の直ぐ後に, Ostrowski による同じ標題の論文が掲載されている. Hausdorff の論文を紹介するのは, 単に短いというだけでなく, Hölder のもともとの考察の本質だけを巧みに削りだしているように思えるからである. 両者を読み比べれば誰もがその感に打たれるのではないだろうか.

さて, Hausdorff は続いて次の定理を掲げる.

I. $\varphi(x)$ を, 有理関数であって, $x = \infty$ では消え, また, 相異なるどの二つの極の差も整数にはならないものとせよ. このとき, 関数 $y = y(x)$ が同時に代数微分方程式と差分方程式

$$(33) \quad y(x+1) - y(x) = \varphi(x)$$

を満たすことは, $\varphi(x)$ が恒等的に消える場合を除いて, ありえない.

ここには, $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ が含まれており, $\Gamma'(x) : \Gamma(x)$ はいかなる代数微分方程式も満たさない. — まず, 特別な場合を証明しよう:

補助定理. 有理関数 $y(x)$ が差分方程式 (33) を満足するのは $\varphi(x)$ が恒等的に消え, したがって, $y(x)$ が定数のときに限る.

証明. $y(x)$ には有限な極³⁰があるとする. 1 を法として合同な極の適当な列において, 第 1 項を α (最小の実数部分を持つもの), 最終項を $\beta = \alpha + m$ (m は ≥ 0 である整数) とおこう. (33) により, $\alpha - 1$ と β は $\varphi(x)$ の極となるが, これは仮定に反する. ゆえに, $y(x)$ も $\varphi(x)$ も有限な極を持たず, $\varphi(x)$ は消える.

²⁹文献 [7].

³⁰有限な極とは, $y(x)$ の極 (例えば, α) が ∞ ではない, つまり, $|\alpha| < +\infty$ となることを意味している.

この証明は Hölder の論文の第一部の最後の議論を髣髴させる．ほとんどそのままを補助定理の形に整理しなおしたと言ってもよいだろう．

Hausdorff はこの補助定理を利用して上掲の定理を証明する．

さて,

$$f(x, y, y_1, \dots, y_\nu) = 0$$

を, y が満たしている代数微分方程式とする ($y_1 = \frac{d}{dx}y$ など); 左辺の微分表現は, 簡約して $f(x, y)$ あるいは f とするが, これは, 整数指数 $n_k \geq 0$ および有理係数 $A(x)$ の項

$$A(x)Y = A(x)y^{n_0}y_1^{n_1}\cdots y_\nu^{n_\nu}$$

の和である．長さ

$$d = n_0 + n_1 + \cdots + n_\nu$$

に応じて

$$f = f_d + f_{d-1} + \cdots + f_0$$

と分解する．ここで, f_d は最高の長さ d の項の和を意味する． y が満足する方程式 $f = 0$ 全体の中で, 最高の長さ d が可能な限り小さいもので, f_d の異なる項の数が最小, さらに, これら項の係数の一つが 1 に等しいものを取り上げる:

$$f_d = Y_0 + A_1(x)Y_1 + \cdots$$

以下の Hausdorff の論法は, 着目点は共に差分方程式ながら, その扱い方において Hölder のものと若干相違を見せる．定理がガンマ関数の対数微分から独立の形に定式化されているためであろう．

さて, y が同時に差分方程式 (33) を満たすならば, 同じく微分方程式 $g = 0$ を満たす．ただし,

$$\begin{aligned} g &= f(x+1, y+\varphi, y_1+\varphi_1, \dots, y_\nu+\varphi_\nu) \\ &= \left(1 + \Delta + \frac{\Delta^2}{2!} + \cdots\right) f(x+1, y, y_1, \dots, y_\nu); \end{aligned}$$

であり, $\varphi_1 = \frac{d\varphi}{dx}, \dots$ および Δ は微分作用素

$$\Delta = \varphi \frac{\partial}{\partial y} + \varphi_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + \varphi_\nu \frac{\partial}{\partial y_\nu}$$

とする． Δ は明らかに [項の指数の] 長さを 1 だけ下げる．

ここで,

$$1 + \Delta + \frac{\Delta^2}{2!} + \cdots = \exp(\Delta)$$

は Taylor-Maclaurin 展開に対応する形式的な平行移動作用素である. しかし, f は $y, y_1, \dots$ の多項式なので, 実際は, 作用の効果は有限項で切れてしまう.

Hausdorff は続ける.

これより, $g = g_d + g_{d-1} + \cdots$ かつ

$$g_d = f_d(x+1, y) = Y_0 + A_1(x+1) Y_1 + \cdots$$

となる. このとき, しかし, 恒等的に $f = g$ でなければならぬ. なぜなら, そうでないときには $g - f$ は, 項 Y_0 を含んでおらず, したがって, 最高の長さ d の項が f より少ないか, あるいは, 長さが $< d$ の項しかないことになるが, これは f の選び方に矛盾する. それゆえ, 恒等的に

$$f(x, y) = \left(1 + \Delta + \frac{\Delta^2}{2!} + \cdots\right) f(x+1, y)$$

であって, 長さに応じて分解すれば

$$f_d(x, y) = f_d(x+1, y)$$

$$f_{d-1}(x, y) = f_{d-1}(x+1, y) + \Delta f_d(x+1, y)$$

となる. これらの等式の第一から言えるのは, f_d が定数係数であることであり, 第二から言えるのは, 項 Y が f_d において有理係数 $B(x)$ を持ち, $\frac{\partial f_d}{\partial y_k}$ において定数係数 a_k を持つとすれば,

$$(34) \quad B(x) - B(x+1) = a \varphi + a_1 \varphi_1 + \cdots + a_\nu \varphi_\nu$$

となることである. ここで, 右辺は φ 自身と同種である (無限遠で消え, 極の差が整数にならない). 補定理から, $B(x)$ は定数であり右辺が恒等的に 0 となることがわかる. しかし, $\varphi(x)$ が有限な極を持てば, その主要部への着目により, φ とその導関数らは 1 次独立であることがわかり, ゆえに (34) の右辺は $a = \cdots = a_\nu = 0$ のときにのみ恒等的に消える. したがって, それぞれの項 Y が $\frac{\partial f_d}{\partial y_k}$ において係数 0 となる. すなわち, f_d の $y, y_1, \dots, y_\nu$ に関する導関数のすべてが恒等的に消え, 最高の [項の] 長さは $d = 0$ となる. これは不合理である.

以上で, **I** は証明された.

f_d が定数係数になることは Hölder と同様だが, その後が見事である. 引き続き Hausdorff は I が若干拡張できることを注意している.

定理は (33) の右辺を $\varphi(x) + \pi(x)$ に置き換えてもやはり正しい. ここで, $\pi(x)$ は多項式とする. これは $y - \eta$ を観察することにより確かめられる. ここで, η は $\eta(x+1) - \eta(x) = \pi(x)$ の多項式解とする. この一般化を, また, つぎのように言い表す:

II. $\varphi(x)$ は有理関数であって, 有限な相異なる二極の対で整数差のものはないとする. このとき, 関数 $y(x)$ で, 同時に, 代数微分方程式と差分方程式

$$(1) \quad y(x+1) - y(x) = \varphi(x)$$

を同時に満たすものは, $\varphi(x)$ が多項式のときを除いて, ありえない.

最後に, Hausdorff は, 明晰な論法で, 代数微分方程式の解に関する重要な定理を示し, 論文の仕上げとする.

$\Gamma' : \Gamma$ から Γ 自身に移行する最後の詰めのためには, なお, y と共に対数微分 $z = \frac{y_1}{y}$ も代数微分方程式を満たすことを示さなければならない. これは極めて簡単で面倒な消去法は不要である. 周知のように³¹, z とその導関数 $z_1, \dots, z_{\nu-1}$ は $\frac{y_1}{y}, \dots, \frac{y_{\nu}}{y}$ の多項式であり, 逆の関係も成り立つので, 次を示せばよい:

III. 関数 y が代数微分方程式を満たすならば, (長さがすべて等しい項だけからなる) 同次方程式をも満たす.

微分方程式 $f = 0$ の左辺 $(x, y, \dots, y_{\nu})$ の多項式と仮定できる) を, 長さに応じてまとめると

$$f = f_D + f_{D-1} + \dots + f_d$$

となる. 式中の項の最高の長さが D , 最低の長さが d である. われわれは, **長さの距離** $D - d$ が最小になり, かつ, 階数 ν が最低になる微分表現を採る. さて, y は微分方程式 $g = \frac{df}{dx} = 0$ も満たす, ここで, 微分作用素

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{k=0}^{\nu} y_{k+1} \frac{\partial}{\partial y_k}$$

は項の長さを変えない. ゆえに, $g_k = \frac{df_k}{dx}$ として

$$g = g_D + g_{D-1} + \dots + g_d$$

である. 結合 $f_d g - f g_d$ は恒等的に消える. そうでなければ, その長さの距離が $< D - d$ となってしまうからである. これより,

³¹Hölder の論文第二部に詳細な計算結果がある.

特に、（この導関数は g に 1 次の項として現れるだけの） $y_{\nu+1}$ の係数は恒等的に 0 である．すなわち、 $f_d \frac{\partial f}{\partial y_\nu} - f \frac{\partial f_d}{\partial y_\nu} = 0$ 、[つまり] $\frac{\partial}{\partial y_\nu} \left(\frac{f}{f_d} \right) = 0$ となり、ゆえに、有理関数 $\frac{f}{f_d} = \frac{\varphi}{\psi}$ と y_ν を含まない 2 個の多項式 φ, ψ の商として表せる． y は微分方程式 $\psi f = \varphi f_d = 0$ を満たすが、 $\varphi = 0$ は階数が $< \nu$ なので満足せず、ゆえに、同次微分方程式 $f_d = 0$ を満たす．

ほぼ同様に簡単な方法で、 y が（同次で、かつ）**等重**の（つまり、各項の**重さ** $n_1 + 2n_2 + \cdots + \nu n_\nu$ が等しい）微分方程式を満たすことを示すことができる．

論文は、場所と日付（ボン、1924 年 12 月 9 日）と受入日（1924 年 12 月 10 日）を記して終わる．

なお、末尾の等重の微分方程式に関する話題については、 $\frac{d}{dx}$ による効果が重さを 1 だけ増やすことに注意して、長さの代わりに重さによって方程式を管理した推論を行なえばよい．

ところで、最近、黒川・若山両氏は多重正弦関数が代数微分方程式を満たすことを示している ([13])．多重正弦関数に立ち入る必要はないが、例えば、関数 $\varphi_2(x) = \pi^2 \{(\cot \pi x)^2 + 1\}$ が代数微分方程式

$$(\varphi_2')^2 = 4\varphi_2^3 - 4\pi^2 \varphi_2^2$$

を満たすことが [13] に例示されている．Hausdorff に従うと、 φ_2 は同次の代数微分方程式も満たすはずである．それはどんなものか？

B Kelvin 卿のアナログ計算器

B.1 第一論文を読む

この機会に、William Thomson（Kelvin 卿）の論文（第一論文 [31]）

与えられた 2 関数の積分 $(\int \varphi(x)\psi(x)dx)$ を計算する機構について

を読んでみよう．書き出しとして論文発表の経緯が書かれているが、冒頭の Bristol における会議の議題がわからない．当時の関係者には明らかであったのであろう．しかし、ここで大切なのは、著者が苦勞しつつ遂行している Fourier 係数の計算を簡易化あるいは自動化したいという動機に基づいて機械的な計算器具の工夫に至るという姿勢を読み取ることであろうか．



関数を Fourier の方法に従って単純調和成分に分けて解析するために要する計算は算術的な重労働である．最近 Bristol であった大英連盟の集会の結果、わたくしは、このような計算を楽にこなすはずの器械を見出す努力を再開した．以前何年にもわたって、こ

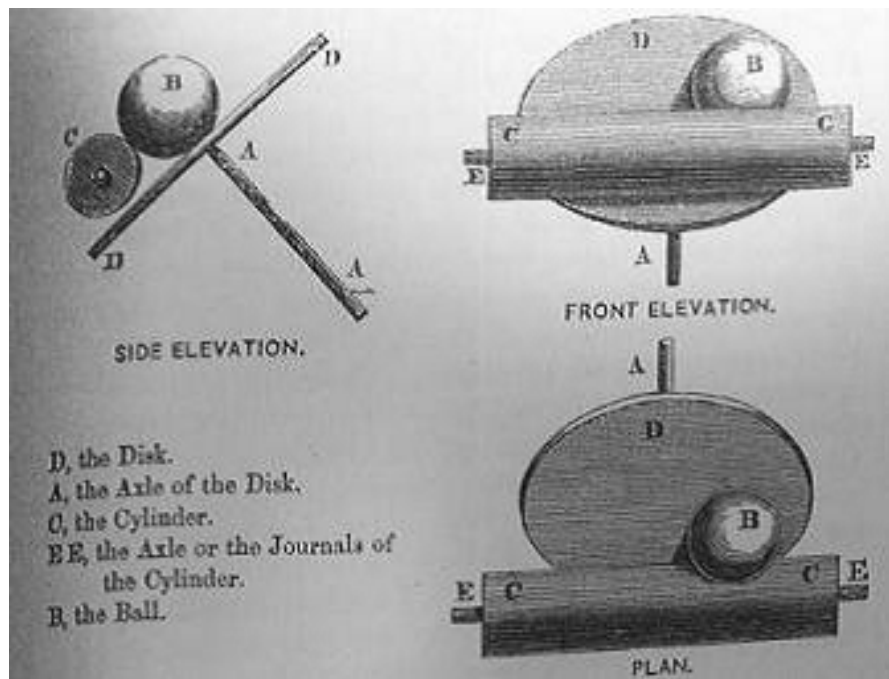


図 3: James の論文から

のような目的は何らかの単純な機械的手段で達成されるはずだとは思っていたのだが、実際に有用な結果を約束することができそうな十分に簡明な器械の工夫に成功したのは漸く最近になってであった。この段階に至ってから、数日前に、兄の James Thomson 教授に考案した器械について説明したところ、兄からは、何年も昔に思いついたが未発表のままという、ある種の積分器の説明があった。わたくしの特別な目的を達するためには兄の器械の方が今までわたくしが思いつくことができたものに比べて遥かに簡単なものであることがたちどころにわかった。兄の積分器についての論説は王立協会に本信とともに報告されている。

上述の兄 James Thomson の記事は、この記事に先行して掲載されている ([30])。James の積分器を前提にしている記述が続くので、第一論文を中断し、説明しよう。

B.2 James の積分器

J. Clerk Maxwell は、大英博覧会 (1851 年) に出展された Sang の面積器が機構的に回転運動と直線運動に基づき情報損失が著しいため正確性に欠ける

として、球の回転運動だけに伝達機構を単純化した提案を行った³²。Maxwell の積分器は、しかし、依然複雑なので、一層直截的で簡明な機構のものが、例えば、気象観測に伴う風力計算などで、望まれていたと、James は論文 ([30]) 中で書く。そこで、いろいろと工夫を重ね、そういう可能性を拓く機械的な原理に到達はしていた、と James は述べ、公表に至ったのは William の慫慂によると言っている。原理的には不満はあっても既成 (Sang または Amsler) の面積器の使いやすさが勝っていたのであろう。

James の提案の積分器は、円板、円筒、球の組み合わせと、円板、円筒、円錐の組み合わせの 2 種類あるが、Kelvin 卿は、円板、円筒、球の組み合わせのものを利用する。

図 3 は、James の論文所収の積分器の図である。45° の傾けられた周回する円板、輪転軸が円板面と平行に固定された自由に輪転する (断面の半径 r の) 円筒及び円板と円筒の両方に接する (半径 ρ の) 回転する球とから成り、さらに、円板には周回軸が取り付けられている³³。円板を傾けてあるのは重力を利用するためである。球の位置は小さな支持板、あるいは球を挟み込む枠の付いた円筒の軸と平行な棒を動かして制御する。球が円筒に接しながら円板面を動くとき、円板との接点の軌跡は、円板の中心を通る直線上にあるものとし、特に、このとき、球の中心の軌跡は円筒の輪転軸と平行である。James は、このときの球の中心の動きを経線方向と言っている。

円板の周回が摩擦によって球の回転を引き起こし、球の回転は摩擦によって円筒を輪転させ、円筒の輪転を目盛で読み取るというのが James による積分計算の工夫である。すなわち、円板の回転角が初期位置 (基準線) から x (ラジアン) のとき、球の中心が基準位置 (原点) から経線方向に y の位置にあるように設定して、円板を (例えば) 1 周回させたときの円筒の輪転軸の全輪転量が $\int y dx$ (の定数倍) を与える。実際、周回角 x 、経線位置 y のときの円筒の輪転量に対し、周回角 $x + dx$ 、経線位置 $y + dy$ となったときに新たに加わる輪転量 $d\gamma$ は $d\gamma = y dx$ である³⁴。すなわち、円板の周回 dx によって球は円板の中心と球と円板の接点を結ぶ半径に垂直方向に $\sqrt{\rho^2 + y^2} dx$ の回転を受けるが、その経線方向と垂直な成分は $\sqrt{\rho^2 + y^2} \cos x dx = y dx$ であり、これが円筒の輪転量の追加になるわけである。したがって、円板を 1 周回させれば、輪転量は

$$\int d\gamma = \int_0^{2\pi} y dx$$

となる。

³² 手元にある書物、後藤憲一 [6] は、学術的にも周到な伝記であるが、Maxwell の面積器への直接の言及はない。

³³ ここで、原著論文の語法を尊重して、以下、我々の日常語では、すべて「回転する」というのを使い分けて、耳慣れない用語かも知れないが、円板は周回し、円筒は輪転し、球は回転する、とすることにする。

³⁴ 球が円板の周回に引き起こされる回転面は円筒の輪転軸に対し dx だけ傾いているが、 $\cos(dx) \sim 1$, $\sin(dx) \sim dx$ である。

図3で見る限り、後世の微分解析機を構成する積分器とは原理は共通だが、やや様子が違う³⁵。

B.3 第一論文を読む（承前）

問題は、機構的にどう周回角や回転球の経線位置を入力し、かつ制御するか、また、出力をどう取り出すかであろうが、James は、これについても提案をしている。Willam はさらに工夫を加えて標題の積分計算にまで積分器の機能を拡張することを提案した。

$\int \varphi(x)\psi(x) dx$ を計算するためには³⁶、周回円板が 0 あるいは初期の位置から $\int_0^x \varphi(x)dx$ に等しい角に置かれ、他方、回転する球は、常に、その 0 位置から $\psi(x)$ の位置にあるように動かされる。このようにすると、円筒が、明らかに $\int_0^x \varphi(x)\psi(x)dx$ に等しい角だけ回って、かくて、問題を解決する。

次に、上の手続きの実現法を説明している。

必要な運動を周回する円板と回転する球に与えるためには、次のような方法がある：—

2 枚の紙に曲線

$$y = \int_0^x \varphi(x) dx, \quad \text{および} \quad y = \psi(x)$$

を描き、これらの紙を 2 個の円筒の円筒面、または、1 個の円筒の円筒面の異なる場所に、 x 軸が円筒の軸に垂直になるように、貼付する。2 個の円筒は（円筒が 2 個の場合）円筒面が同じ速度で動くように連結する。器構³⁷には装着させるものとして、各円筒の円筒面の十分近くに滑針、あるいは、誘導棒を付け、操作員は手動によって、円筒の回転中、常に可動端子が円筒面上の曲線に接触するよう誘導する。

³⁵後世のものは、例えば、例えば、東京理科大学近代科学資料館の展示品については、井上謙蔵の解説 [9] を参考にすると、円板を x における回転速度が $d\theta(x) = \varphi(x) dx$ になるよう周回するとき、円板中心から $\psi(x)$ の位置では $\varphi(x)\psi(x) dx$ の回転速度になるから、この位置で円板に接する単位球は円板の回転による摩擦により、動径方向の回転軸の周りで、速度

$$dv(x) = \psi(x) d\theta(x) = \psi(x) \varphi(x) dx$$

で回転する。したがって、累積した回転が

$$\int_0^x dv(x) = \int_0^x \psi(\xi) \varphi(\xi) d\xi$$

となるということになる。

³⁶脚注 35 参照。

³⁷機械工学辞典などを参照して正確な語法に努めるべきであるが、今その準備はない。

操作員は2名必要であろう。1名では、回転がよほど緩慢でもない限り、同時に2個の可動端子を条件を満たすように動かすことはできないであろう。可動端子の一方は固有の機構によって周回する円板の角運動を端子に線形運動として変換し、もう一方の端子には回転球の中心の運動を線形運動として変換する。

Kelvin 卿は続いて積分器の応用を論ずる。

今説明した器械は、関数 $\psi(x)$ の調和成分 $H_1, H_2, H_3, \&c$ を計算するために応用することが直ちにできる。これら調和成分は、Fourier 自らが球や円筒における熱伝導の解決の解決のために導入した Fourier の簡単な調和解析の素晴らしい一般化である。この一般化は、巧みにかつ美しく、Poisson³⁸ によって仕上げられ、また、Sturm と Liouville によってこの主題で著された Liouville 編集の "Journal des Mathématiques" 第1巻所収の記念すべき論文で展開されたのである。そこで、任意の関数 $\psi(x)$ に対して、表現

$$\psi(x) = H_1\phi_1(x) + H_2\phi_2(x) + H_3\phi_3(x) + \&c.$$

が、一般化された調和関数 $\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x), \&c.$, で、

$$\begin{aligned} \int_0^l \phi_1(x)\phi_2(x)dx &= 0, \int_0^l \phi_1(x)\phi_3(x)dx = 0, \\ \int_0^l \phi_2(x)\phi_3(x)dx &= 0, \&c., \end{aligned}$$

を満たすものによるものならば、

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{\int_0^l \phi_1(x)\psi(x)dx}{\int_0^l \{\phi_1(x)\}^2 dx}, \\ H_2 &= \frac{\int_0^l \phi_2(x)\psi(x)dx}{\int_0^l \{\phi_2(x)\}^2 dx}, \\ &\&c. \end{aligned}$$

である。

ここで、Kelvin 卿が一般化された調和関数と言っているのは、今日の言葉で言えば、自己共役な常微分作用素の固有関数系であり、詳細は、Sturm-Liouville の理論として纏められている³⁹。

卿は、続いて、 H_1, H_2 などの計算において、分子、分母の扱いを分け、分子に現れる積分値の計算が上掲の機器によって容易になることを述べる。

³⁸ この解析で本質的な超限的な方程式の根の実数値性の一般的な証明（すなわち、Fourier の立脚点からの極めて重要な前進）は、最初 1828 年の "Bulletin de la Société Philomatique" に発表され、"Théorie mathématiques de la Chaleur" の §90 に再録されている。[原注]

³⁹ 例えば、吉田耕作 [38] に解説がある。

この理論の物理的な応用では、式 $H_1, H_2, \&c$ の分母となる積分は Fourier による円筒問題の公式⁴⁰ $\int_0^x x u_i^2 dx$ を Liouville 雑誌第 1 巻 (1836) 所収の論文 "Mémoire sur une Classe d'Équations à différences partielles" §iv, 式 (10) で Sturm が行った拡張により常に有限項として評価される。分子の積分は上で述べたように作動する機器によって極めて容易に計算される。

Kelvin 卿は、積分器の主な利用目的として、潮汐、気象、あるいは天文の観測データの Fourier 解析を挙げている。

この機械の重要な実用的用途は、潮汐、気象、そして恐らく天文の観測のための単純な Fourier 式調和解析である。これは

$$\phi(x) = \frac{\sin}{\cos} (nx)$$

であり、積分は $\frac{2i\pi}{n}$ (i 任意の整数) の範囲で遂行して、このような応用が得られる場合である。この際、簡単なクランク機構を添加し、曲線 $y = \psi(x)$ が設定された円筒が一様に動くとして、周回円板に、固有の区間 $\frac{2\pi}{n}$ において調和角速度を与えることにすると、曲線 $y = \phi(x)$ が設定された円筒の必要がなくなり、1 名の操作員が上に述べたように可動点を曲線上に常に維持させていけばよい。かくて、過程を遂行する操作員は 1 名でよい；そして、わたくしの信じるところでは、潮汐の調和解析への応用で、操作員は機械を用いて通常の潮位計による潮位の年間記録の曲線から任意の調和成分を一二時間で取り出すことができるはずである — これまでのところは熟練した計算技術者によって少なくとも 20 時間は必要となる結果である。

卿は引き続き、この機械の応用可能性について構想を述べる。

わたくしが信ずるところでは、この機器は、同様に、温度、気圧、風速の東西成分、同じく南北成分の経日変動について、全日、半日、三分日、四半日の調和係数を決定する上でも大いに役立つであろう。同じく、地磁気の 3 成分の変動係数についても、また、空電計で水流が水滴に分化するときの空気の電気ポテンシャルについても、また、通常の気象あるいは磁気観測の他の量についても有用であろう。また、太陽黒点の 11 年周期における地磁気変動を正確に評価し、さらに、この周期の太陽黒点そのものの変動についても同様であり、黒点と惑星運動や惑星位置についての仮説の検証（あるいは否定）にも有効であろう。また、気圧、地磁

⁴⁰Fourier の "Théorie analytique de la Chaleur", §319, p.319 (Paris, 1822). [原注]

気の成分に対する月の運動の調査に役立ち、他の気象成分に月が影響を及ぼしているかどうかの探索と、もし、影響があるならば、その性格と程度との精密な決定にも役立つであろう。

最後に、機械の精度について言及している。

上で述べたことから明らかなように機器に要する機構は非常に簡単かつ容易なものである。機器の精度は、本質的に、機器に用いられる円筒、球および周回円板の精度に依存する。

本提案の機器の実用上の要請から察して、驚くべき精度の真の平面を実現した Joseph Whitworth 卿⁴¹の研磨法ほどの洗練さが要らないことは疑いのないところであろう。

以上で、第一論文（の翻訳）は終わる。

B.4 第二、第三論文：線形常微分方程式の機械による解法

Kelvin 卿は、この記事に続いて二本の記事

変数係数の 2 階線形常微分方程式の機械的な積分[32]

変数係数の任意階一般線形常微分方程式の機械的な積分[33]

を発表し、上述、積分器を複数個繋ぐことによる高階線形常微分方程式の解法を説明している。

まず、2 階の場合から説明する（第二論文 [32]）。Kelvin 卿は、方程式

$$(35) \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{P} \frac{d}{dx} u \right) = u, \quad 0 \leq x \leq \ell \quad (\ell > 0)$$

の初期値問題を考察する。卿は、ここで、 $P = P(x)$ を通常関数としているが、数学的概念が今日ほど精緻に分化していなかった時代のものであり、 P としては、 $0 < x < \ell$ で消えることのない解析関数を念頭に置いていたのであろうか。いずれにせよ、この方程式が実際上の諸問題で重要だから考察に値するということを卿は強調している。ここでは、取りあえず、 $P(x)$ は区間 $0 \leq x \leq \ell$ において正の値をとる連続関数とする。

Kelvin 卿は、まず、方程式 (35) の初期値問題が反復法で解けること、したがって、積分器を反復使用すれば、(35) の（実用的な）解が得られることを注意する。しかし、第二論文の眼目は、積分器 2 個の連結を工夫すると、理論上、(35) の解が直接得られることを示すことであった。

念のために、反復法による方程式 (35) の解法を紹介する。

初期条件を $x = 0$ において

$$(36) \quad u = 0, \quad \frac{1}{P} \frac{d}{dx} u = C$$

⁴¹ この人については、ウェブ [39] に記事がある。

とする。

このとき、任意の $u_1(x)$ ，例えば、 $u_1(x) = x$ から出発して、逐次⁴²

$$\begin{aligned} u_2(x) &= \int_0^x P(t) \left(C + \int_0^t u_1(s) ds \right) dt, \\ u_3(x) &= \int_0^x P(t) \left(C + \int_0^t u_2(s) ds \right) dt, \\ &\dots \end{aligned}$$

とおくと、 $u_k(x)$ は $k \rightarrow \infty$ のとき、(35) (36) の解 $u(x)$ に収束する。したがって、積分器に計算結果を繰り返し入力し、十分な反復の後に出力結果が区別できなくなったら、その出力を解と考えてよい、というのである⁴³。

しかし、Kelvin 卿は、引き続き、第二論文において、2 個の積分器を連結すれば反復によらずに (35) の解が得られることを示している。このことに気づいたのは嬉しい驚きであったと言ってから、円板、円筒、球からなる James の積分器 2 個を、第一の積分器の円筒の輪転が第二の積分器の球の位置を制御し、第二の積分器の円筒の輪転が第一の積分器の球の位置を制御することができるように連結させた上で、第一の積分器の円板が基線（基準となる半径）から x の角だけ周回するときに第二の積分器の円板が基線から $\int_0^x P dx$ の角だけ周回するように作動させることにより、方程式 (35) の解が得られる

⁴²第二論文の該当する式の符号にはおかしいところがある。

⁴³実際、 $k \geq 3$ ならば

$$\begin{aligned} u_k(x) - u_{k-1}(x) &= \int_0^x P(t) \left(\int_0^t \{u_{k-1}(s) - u_{k-2}(s)\} ds \right) dt \\ &= \int_0^x \left(\int_s^x P(t) dt \right) \{u_{k-1}(s) - u_{k-2}(s)\} ds \end{aligned}$$

だから、 $|P(t)| \leq M$, $0 \leq t \leq x \leq \ell$ とすると、 k が十分大きいとき、

$$\begin{aligned} |u_k(x) - u_{k-1}(x)| &\leq M \int_0^x (x-s) |u_{k-1}(s) - u_{k-2}(s)| ds \\ &\leq M^2 \int_0^x \frac{(x-s)^3}{3 \cdot 2 \cdot 1} |u_{k-2}(s) - u_{k-3}(s)| ds \\ &\leq M^3 \int_0^x \frac{(x-s)^5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} |u_{k-3}(s) - u_{k-4}(s)| ds \\ &\leq \dots \end{aligned}$$

となる。したがって、 $k = 1, 2, \dots$ に対し、

$$|u_{k+2}(x) - u_{k+1}(x)| \leq M^k \int_0^x \frac{(x-s)^{2k-1}}{(2k-1)!} |u_2(s) - u_1(s)| ds$$

となる。特に、

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \{u_{k+1}(x) - u_k(x)\} + u_1(x)$$

は（区間 $0 \leq x \leq \ell$ において一様に）収束し、

$$u(x) = \int_0^x P(t) \left(C + \int_0^t u(s) ds \right) dt$$

を満足する。すなわち、(35) (36) の解になる。

ことを示している．初期条件の設定方法も示している．

卿は次のように説明している．今，第一の積分器において，球と円板の接点は円板の基線からの周回角 x ，経線位置 g_1 にあり，第二の積分器において，球と円板の接点は円板の基線から周回角 $\int_0^x P, dx$ ，経線位置 g_2 にあるとする．したがって，無限小の変位によって，第一，第二の円筒の表面が受ける輪転量はそれぞれ

$$g_1 dx \quad \text{および} \quad g_2 P dx$$

である．ところが，第一円筒の輪転が第二の積分器の球の位置を制御し，したがって，第二球の位置の無限小変化と第一円筒の無限小輪転量は等しく，同様に，第二円筒の無限小輪転量と第一球の位置の無限小変化は等しい．したがって，

$$g_1 dx = dg_2 \quad \text{および} \quad g_2 P dx = dg_1$$

である．したがって， g_2 を消去すると

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{P} \frac{dg_1}{dx} \right) = g_1$$

となる．すなわち， $u = g_1$ は方程式 (35) を満たす．

初期条件に関しては，例えば， $x = 0$ において， $u = G_1$ ， $\frac{1}{P} \frac{d}{dx} u = G_2$ とすると，この処理は，2 個の積分器を接続する前に，第一の円板および第二の円板をあらかじめ G_1 ， G_2 だけ基線から周回させておくことになる．円板を指定の速度で周回させれば， g_1 ， g_2 が生成されて行くのである．

以上が第二論文の梗概である．

第三論文 ([33]) では，高階の線形微分方程式の場合も，積分器を階数個だけ接続することにより，接続法には注意が要るものの，解が機械的に得られるはずだと述べている．さらに，第三論文の付録で，機械的に積分するためには方程式が線形である必要はないことを注意している．

ところが，現実には，積分器 2 個を連結して一方の円筒の輪転を他方の球の位置の制御に反映させるということが困難であった．すなわち，積分器の連結で，一方の円筒の回転を他方の球の位置の制御に利用するのに十分なトルクを実現することが課題であって，Kelvin 卿の時代には実用に耐えるものは製作できなかった．Kelvin 卿の提案は，C. W. Niemann のトルク増幅器の開発によって，半世紀を経て漸く Vannebar Bush の微分解析機 [3] により実現されたのであった．

参考文献

- [1] アルティン (Artin) , E.: ガンマ関数入門．日本評論社 (2002).

- [2] Barnes, E. W.: The theory of the Gamma function. Messenger of Math. **29** (1900), 64–128.
- [3] Bush, V.: The differential analyzer. A new machine for solving differential equations, Journal of the Franklin Institute, **212** (1931), pp. 447–488.
- [4] Davis, Martin 編: *The undecidable Basic papers on undecidable propositions, unsolvable problems and computable functions*. Raven Press (1965).
- [5] Erdelyi, A. 編: *Higher transcendental functions*. Volume 1. Krieger (1985).
- [6] 後藤憲一. ファラデーとマクスウェル. 清水書院. (1993).
- [7] Hausdorff, F.: Zum Hölderschen Satz über $\Gamma(x)$. Math. Ann. **94** (1925), 244–247.
- [8] Hölder, Otto Ludwig: Ueber die Eigenschaft der Gammafunction keiner algebraischen Differentialgleichung zu genügen. Mathematische Annalen, **28**, (1886) pp. 1–13.
- [9] 井上謙蔵. 微分解析機. 理大科学フォーラム. **2004(6)** (2004), 6 – 10.
- [10] Kawamura, A.: Type-2 computability and Moore’s recursive functions. Electronic Notes in Theoretical Computer Science **120** (2005), pp.83–95.
- [11] Kohno, M.: *Global analysis in linear differential equations*. Kluwer Academic Publishers. (1999)
- [12] 河野實彦. e と $n!$ から — 微分方程式と差分方程式の世界を覗く —. 数学通信 **10** (2005), 20–54.
- [13] Kurokawa, N. & Wakayama, M. Differential algebraicity of multiple sine functions, Letters in Math. Phys. **71** (2005), 75–82.
- [14] Moore, Eliakim Hastings: Concerning transcendentially transcendental functions, Math. Ann., **48** (1897), pp. 49–74.
- [15] Moore, Cristopher : Recursion theory on the reals and continuous-time computation. Theoretical Computer Science **162** (1996), pp. 23–44.
- [16] 森口繁一・宇田川 久・一松信. 岩波数学公式 特殊函数. 岩波書店. (1987)
- [17] 永田雅宜. 可換体論 (新版). 掌華房. (1985)

- [18] Ostrowski, A.: Neuer Beweis der Hölderschen Satzes, dass die Gammafunktion keiner algebraischen Differentialgleichung genügt. *math. Ann.* **79** (1919), 286–288.
- [19] Ostrowski, A.: Zum Hölderschen Satz über $\Gamma(x)$. *Math. Ann.* **94** (1925), 248–251.
- [20] Pólya, G.: Zur Untersuchung der Grössenordnung ganzer Funktionen, die einer Differentialgleichung genügen. *Acta Math.* **42** (1920), pp. 309 – 316.
- [21] Pour-El, Marian B.: Abstract computability and its relation to the Genral Purpose Analog Computer (Some connections between logic, differential equations and analog computers), *Trans. Amer. Math. Soc.*, **199** (1974), pp. 1-28.
- [22] Pour-El, Marian B. & Richards, J. Ian : *Computability in analysis and physics*. Springer-Verlag. (1989).
- [23] ラインゴールド (Rheingold, Howard) . 思考のための道具. パーソナルメディア. (1987) .
- [24] Rubel, Lee A.: The extended analog computer. *Advances in Appl. Math.* **14** (1993) pp.39–50.
- [25] Shannon, Claude E.: Mathematical theory of differential analyzer, *J. Math. Phys. Mass. Inst. Tech.* , **20** (1941), pp. 337–354.
- [26] Slepian, David : Some comments on Fourier analysis, uncertainty and modeling, *SIAM Review* **25** (1983), pp. 379–393.
- [27] 鈴木孝. エンジンのロマン. プレジデント社. (1988).
- [28] 高木貞治. 解析概論 (改訂第三版). 岩波書店. (1961)
- [29] 高木貞治. 代数学講義 (改訂新版). 共立出版. (1983)
- [30] Thomson, James : On an Integrating Machine having a New Kinematic Principle. *Proc. Roy. Soc. London* **24** (1876), pp. 262–265.
- [31] Thomson, William: On an instrument for calculating $(\int \varphi(x)\psi(x)dx)$, the integral of the product of two given functions. *Proc. Roy. Soc. London* **24** (1876), pp. 266–268.
- [32] Thomson, William: Mechanical Integration of the Linear Differential Equations of the Second Order with Variable Coefficients. *Proc. Royal Soc. London* **24** (1876). pp. 269–271.

- [33] Thomson, William: Mechanical Integration of the general Linear Differential Equation of any Order with Variable Coefficients. Proc. Royal Soc. London **24** (1876). pp. 271–275.
- [34] Turing, A. M.: On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. Proc. London math. Soc. **43** (1937), pp. 230–265.
- [35] van der Waerden, B. L.: Nachruf auf Otto Hölder, Mathematische Annalen, **116** (1939), pp. 157–165.
- [36] Weihrauch, K.: *Computable analysis*. Springer (2000).
- [37] Whittaker, E. T. & Watson, G. N.: *A course of modern analysis*, Fourth Edition, Cambridge University Press (1965).
- [38] 吉田耕作. 積分方程式論 (第2版). 岩波書店. (1978)
- [39] [http : //www.pioneers.historians.co.uk/whitworth.html](http://www.pioneers.historians.co.uk/whitworth.html)
- [40] 東京理科大学. :
[http : //www.sut.ac.jp/info/setubi/museum/kannai/museum-yama/si/bibun.html](http://www.sut.ac.jp/info/setubi/museum/kannai/museum-yama/si/bibun.html)
- [41] University of St. Andrews, Scotland. :
[http : //www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Holder.html](http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Holder.html)
- [42] Tim Robinson.
 Computing machinery website. <http://www.meccano.us/>

