体験授業案[*] ：（数学）
画家デューラーの数学から．

校長：　吉川　敦[†]

アルブレヒト・デューラー（Albrecht Dürer, 1471–1528) は近世ドイツを代表する画家であり，15 世紀末から 16 世紀前半のニュルンベルクを中心に活躍した[1]．

わが国にも前川誠郎先生（東京大学名誉教授）やそのお弟子である下村耕史先生（九州産業大学教授）を始め，多くの研究者がおられる．また，前川先生が館長を勤められた新潟県立美術館にはデューラーの版画が多数収められていると聞くが，わたくしはまだ訪ねたことがない．ただし，本稿を用意する過程で，前川先生や下村先生のお世話になったことは特記したい．

デューラーは神聖ローマ帝国皇帝マキシミリアン一世の宮廷画家でもあり，世俗的にも成功を収めたようである．デューラーの後半生の時代は，ルターによる宗教改革の影響があり，宗教戦争，特に，ドイツ農民戦争など陰惨な激動の時代でもあった．デューラーは，カール五世の即位後，前帝との契約の確認などのために行なったオランダ方面の旅行で健康を害して，やがて世を去った（オランダはスペインの領地であったが，神聖ローマ帝国の一部であったわけではないと記憶しているが，どうか）．

『測定法教則』（*Underweysung der messung*, 1525, 1538）は，デューラーが，画家を含む職人階層のドイツ社会における地位向上を目指して，絵を描くということを理論的に記述しようと試みた書物である．幾何学（数学）を基礎に置いているのは，そのためである．しかし，古典的な学術伝統には必ずしも従っておらず，重要な話題で投影図が多用されるのは技術者としての経験や知恵の反映であろう．この書物は後年のガリレオやケプラーなどにも影響を与えたと信じられる点がある．さらに，平面幾何，特に，円弧の扱いでデューラーが描いた図が，ユークリッドの「原論」のある注釈書に利用された．イエズス会士によるその漢訳版が残っており，当然，16 世紀末の日本にもデューラーの何らかの名残が到来していた可能性は高く，和算にも影響

---

[*] 本稿はもともと学園祭のデモンストレーションとして依頼された「体験授業」のために準備した話題に基づく．ただし，現実には生徒の意見も汲んで，いくらか初等的な別の題材を採用した．なお，ここで扱っている話題は，かつて Jeanne Peiffer 教授（[2] 参照）に，教授も気づいていなかったということだったから，一緒に論文化しようと提案したことがあるが，諸般の事情でそれっきりになっている．以下の脚注 9 を見られよ．

[†]（平成 20 年 4 月赴任）．数学者．理学博士．

[1] 体験授業そのものでは，まず，若干の作品を図版としてお示しするつもりである．

を及ぼしていたかも知れないのである．

最近『測定法教則』の邦訳が刊行された[2]．『測定法教則』は四書から成るが，第一書の後半では，さまざまな曲線の描き方を紹介している．特に，第一書第 17 図は（「数学　」において）正弦関数あるいは余弦関数のグラフと円弧との関係を示すためによく利用される図に非常に近い（デューラーは，現代の習慣とは異なり，角が増大する向きを時計の針の進む向きにとっている）．

ここでは，微積分学が成立する以前に，いわば，職人の知恵で，後年の積分曲線と同種のアイデアで曲線を描く例を紹介しよう．第一書第 28 図の曲線である（邦訳書 36–37 ページ[3]）．

> 次に特別な仕方で曲がる有用な線の描き方を教えよう。最初に水平線 cd を引き、9 点で 10 等分する。中心点 5 から垂線 ab を立てる[4]。この線 ab を 19 点で 20 等分し，下から上に **1**、**2**、**3** 等々と数字をつける[5]。定規をとり、それに長さ bd を刻んで ef とする。ここで作ろうとする曲線の全ての点はこの長さで示される。bd の１部分[6]を３等分し、その３分の１だけ前記の１部分に加えて、コンパスでこの長さをとり、一方の脚を点 d におき、他方の脚で上方に円弧を描く。次に定規に刻まれた長さ ef をとり、一方の端 e を線 ab 上の点 **1** に、他方の端 f を前記の円弧との**接点**[7]におく。そこも点 **1** とする[8]。次に定規の一方の端 e を線 ab 上の点 **2** におく。コンパスの一方の端を新しい方の点 **1** におき、他方の脚で前と同じ半径で上方に円弧を描く。定規の端 f と円弧との接点を点 **2** とする。全ての数字についてこのようにする。数字の順に点から点を湾曲状に線で結ぶ。

実際の手順を今日の言葉で追ってみよう[9]．平面内に直交（xy-）座標を入れる．水平線 cd を x-軸内にとる．点 c，d をそれぞれ $(-L,0)$，$(L,0)$ で表そう（$L>0$）．点 b は原点 $(0,0)$ になり，L は bd の長さである．b に立てる垂線とは y-軸になり，$\Lambda>0$ として[10]，点 a の座標を $(0,\Lambda)$ とおくことがで

[2] [1]．すなわち，中央公論美術出版．2008．訳及び注，解説：下村耕史．数学史上の解説：三浦伸夫（神戸大学教授）．

[3] ゴチック部分および脚注は引用者（＝筆者）による．

[4] 中心点 5 を点 b とする．

[5] cd が 10 等分，ab が 20 等分というのは，図 28 から想像すると，等分した部分の長さが共通になるようにしたいということのようである．

[6] bd は 5 等分される．その等分として得られた部分の一を指す．

[7] 今日の言葉では，交点と理解することにする．接点とすると条件がきつくなり過ぎる．

[8] 以下の解説では $\mathbf{1}'$ とする．以下，$\mathbf{2}'$, $\mathbf{3}'$ なども同様．

[9] このような試みは，まず，[3], [4] によって行なわれたようで，これらの先行研究に従った解説が [1]，[2] にある．しかし，[3] や [4] では不正確な導出がされているらしく，筆者としてははなはだ困惑極まりないことであるが，[1] も [2] も，後述の方程式 (1) の左辺の $g'(x)$ とあるべきところが，その代わりに $g(x)$ が現れる形で引用されていることを指摘しておかなければならない．当然，方程式 (2) を導出することができなかったので，デューラーが描きたかったであろう曲線 (3) を求められなかったのである．実は，『測定法教則』でデューラーが提案したさまざまな曲線に近代的な解釈を与えたのは（現物を見ていないので想像でしかないが）[3] のようである．ギムナジウム（ドイツの中学・高等学校）の気鋭の若手数学教師が授業教材として準備したものであろうか．しかし，他の曲線の場合でも，導出の際の論証については再検討が必要のようである．

[10] 脚注 5 に従うならば，$\Lambda=4L$ である．

きる．すると，$\lambda = \dfrac{\Lambda}{20}$ として，座標 $(0, \lambda)$, $(0, 2\lambda)$, $(0, 3\lambda)$, $\cdots$ の点が，線分 ab 上の点 $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$, $\cdots$ に他ならない．

さて，bd の 1 部分とは，bd を 5 等分した 1 部分のことであり，したがって，その長さ $l = \dfrac{1}{5}L$ である[11]．コンパスの径として採用すべき長さは，$r = k\, l$, $k = \dfrac{4}{3}$ である．

したがって，点 $\mathbf{1}'$ は，点 $\mathbf{1}$ を中心とする半径 L の（右半）円周と点 d を中心とする半径 r の（上半）円周の交点になり[12]，点 $\mathbf{2}'$ は，点 $\mathbf{2}$ を中心とする半径 L の（右半）円周と点 $\mathbf{1}'$ を中心とする半径 r の（上半）円周の交点になる．同様に，$\mathbf{3}'$ や，さらに，一般に，$\mathbf{n}'$ も求められる．

ここで重要なことは，線分 cd，ab の長さは一定でありながら，細分の数を増大させることが許されるような議論がされていることである．今の場合なら，ab を 20 等分ではなく，例えば 100 等分し，また，cd を 10 等分ではなく 50 等分してみても成り立つような議論が展開されている．もっとも，デューラー自身は，実際家である以上，細分の数を限りなく大きくしたいとは恐らく決して思わなかったであろうが，一方，ある程度以上細かくしないと実用上十分な近似が得られないことも知っていたであろう．この意味は，L や Λ は定数であるが，λ や l は実は（いくらでも）小さいものとして扱うことができるはずだということである．

点 $(\mathbf{n-1})'$ の座標を (x_{n-1}, y_{n-1}) として，点 $\mathbf{n}'$ の座標 (x_n, y_n) を求めてみる．点 $\mathbf{n}$ の座標は $(0, n\lambda)$ である．構成法から $x_n > 0, y_n > y_{n-1}$ のはずであり，点 $\mathbf{n}$ と $\mathbf{n}'$ の距離が L，点 $\mathbf{n}'$ と $(\mathbf{n-1})'$ の距離は r である．したがって[13]，

$$(x_n - x_{n-1})^2 + (y_n - y_{n-1})^2 = r^2 = k^2\, l^2, \quad x_n^2 + (y_n - n\lambda)^2 = L^2$$

が満たされるはずである．第 1 式から $x_n < x_{n-1}$ として

$$\sqrt{1 + \frac{(y_n - x_{n-1})^2}{(x_n - x_{n-1})^2}}\ (x_n - x_{n-1}) = -k\, l$$

が得られ，第 2 式からは（$y_n > n\lambda$ として）

$$y_n = n\lambda + \sqrt{L^2 - x_n^2} \quad \text{または} \quad n\lambda = y_n - \sqrt{L^2 - x_n^2}$$

[11]脚注 5 のもとでは，$l = \lambda$ である．

[12]すなわち，$\mathbf{1}'$ の座標 (x_1, y_1) は $(x_1 - L)^2 + y_1^2 = r^2$，$x_1^2 + (y_1 - \lambda)^2 = L^2$ を満たす．脚注 5 のもとでは，$r = k\lambda$，N を十分大きな整数として，$\lambda = \frac{4L}{N}$ と置ける．したがって，

$$x_1 = \frac{N(N^2 - 8(k^2 - 1)) + 16\sqrt{N^2k^2 - 4(k^2 - 1)^2}}{N(N^2 + 16)}L$$

$$y_1 = 4\frac{8(k^2 + 1)) + N\sqrt{N^2k^2 - 4(k^2 - 1)^2}}{N(N^2 + 16)}L$$

となる．幾何学的作図では見やすい操作だが，いちいち計算で追跡しようとすると煩雑になる．

[13] $\mathbf{0}' = d = (L, 0)$ とする．

が得られる．したがって，

$$\begin{aligned}\lambda &= y_n - y_{n-1} - \left(\sqrt{L^2 - x_n^2} - \sqrt{L^2 - x_{n-1}^2}\right) \\ &= \left\{\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} + \frac{x_n + x_{n-1}}{\sqrt{L^2 - x_n^2} + \sqrt{L^2 - x_{n-1}^2}}\right\}(x_n - x_{n-1})\end{aligned}$$

となる．$l = \lambda$ のもとでは，

$$\sqrt{1 + \frac{(y_n - x_{n-1})^2}{(x_n - x_{n-1})^2}} = -k\left\{\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} + \frac{x_n + x_{n-1}}{\sqrt{L^2 - x_n^2} + \sqrt{L^2 - x_{n-1}^2}}\right\}$$

が得られたことになる．

さて，われわれが描きたい曲線が $y = g(x)$ の形で表されるとすると，$\mathbf{n}'$ は曲線上の点だから，その座標は $y_n = g(x_n)$ を満たすはずである．特に，$\mathbf{0}'$ に対応するのは，$0 = g(L)$ である．

そこで，これからは**デューラーには想像し得なかった微積分学的な発想**に拠るのであるが，点 $(x, g(x))$ を $l = \lambda$ を**いくらでも**小さくするとき，それに応じて cd および ab の細分の数を大きくすることにより，上の形の x_n, y_n を x, $g(x)$ に**いくらでも**近いものとして得られるに違いない．したがって，$\dfrac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$ は $\dfrac{g(x_n) - g(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$ に**極めて**近いもののはずである．そして，x_n も x_{n-1} も x に**極めて**近いので，x_n，x_{n-1} を x で置き換え，$\dfrac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$ を微分係数 $g'(x)$ で置き換えた式

$$\sqrt{1 + g'(x)^2} = -k\left\{g'(x) + \frac{x}{\sqrt{L^2 - x^2}}\right\}, \quad k = \frac{4}{3} \tag{1}$$

が得られることになる[14]．これから，$g'(x)$ を解く[15]：

$$g'(x) = -\frac{k^2 x + \sqrt{(k^2 - 1)L^2 + x^2}}{(k^2 - 1)\sqrt{L^2 - x^2}}, \quad 0 < x < L. \tag{2}$$

したがって，$g(L) = 0$ によって，

$$\begin{aligned}g(x) &= -\int_L^x \frac{k^2 t + \sqrt{(k^2 - 1)L^2 + t^2}}{(k^2 - 1)\sqrt{L^2 - t^2}}\,dt \\ &= \frac{k^2}{k^2 - 1}\sqrt{L^2 - x^2} - \int_L^x \frac{\sqrt{(k^2 - 1)L^2 + t^2}}{(k^2 - 1)\sqrt{L^2 - t^2}}\,dt\end{aligned}$$

が得られる．右辺第 2 項の積分が定める関数は初等的でない．第 2 項の積分は，

$$\frac{L}{\sqrt{k^2 - 1}}\int_1^{x/L}\sqrt{\frac{1 - \kappa^2 t^2}{1 - t^2}}\,dt, \quad \kappa = \frac{i}{\sqrt{k^2 - 1}}$$

[14] 以上は，いわゆる「**発見的推論**」（heuristic argument）であって，実際に，ここまでの操作が近似として成り立っているかどうかは，むしろここまでとは逆向きな，$y = g(x)$ の知見を利用した操作に基づいて検証される．なお，$1 < k < \sqrt{2}$ で以下の議論は成り立つ．

[15] 本質的に 2 次方程式の解を求めることになる．

と書き直すと，第 2 種楕円積分

$$E(\kappa,\theta)=\int_0^{\sin\theta}\sqrt{\frac{1-\kappa^2 t^2}{1-t^2}}\,dt=\int_0^{\theta}\sqrt{1-\kappa^2\,\sin^2\phi}\,d\phi,\quad 0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

によって，

$$\frac{L}{\sqrt{k^2-1}}\,E\left(\kappa,\arcsin\frac{x}{L}\right)-\frac{L}{\sqrt{k^2-1}}\,E\left(\kappa,\frac{\pi}{2}\right),\quad \kappa=\frac{i}{\sqrt{k^2-1}}$$

となる[16]．すなわち，

$$\begin{aligned} g(x)=\frac{k^2}{k^2-1}\sqrt{L^2-x^2}-\frac{L}{\sqrt{k^2-1}}\,E\left(\kappa,\arcsin\frac{x}{L}\right)\\ +\frac{L}{\sqrt{k^2-1}}\,E\left(\kappa,\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

である．デューラーが描こうとした曲線は，$y=g(x)$（$0<x<L$）のグラフとして与えられるものであった（図 1[17]）．

参考文献

[1] 下村耕史：デューラー『測定法教則』注解． 中央公論美術出版． (2008)

[2] Albrecht Dürer: *Géométrie.* Présentation, Traduction de l'allemand et notes par Jeanne Peiffer. Sources du Savoir. Seuil (1995)

[3] Hermann Staigmüller: Dürer als Mathematiker. *Programm des Königlichen Realgymnasiums in Stuttgart am Schlusse des Schuljahrs 1890/91.* K. Hofbuchdruckerei zu Gutenberg (Carl Grüninger), Stuttgart (1891).

[4] Josef E. Hofmann: Dürer als Mathematiker. Praxis der Mathematik **13**, 1–16. (1971)

[16] arcsin は逆正弦関数，すなわち，

$$\theta=\arcsin\tau\quad\Longleftrightarrow\quad\tau=\sin\theta\qquad -1<\tau<1,\ -\pi<\theta<\pi,$$

を満たすものである．

[17] ただし，デューラーに忠実に従うためには，図 1 の曲線をさらに左方に（中心 $(0,4)$，半径 1 の円周との交点まで）延長しなければならない．

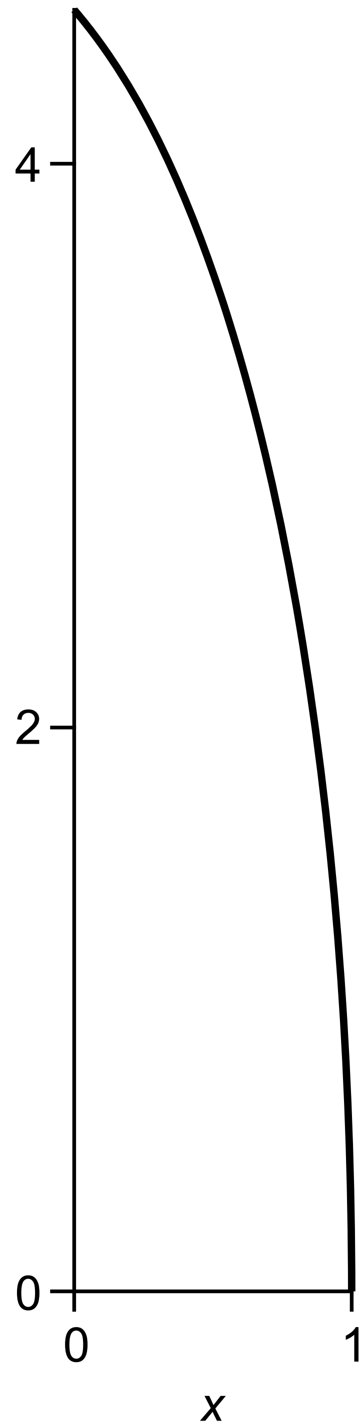

図 1: デューラーの曲線（$L = 1$, $k = \frac{4}{3}$ の場合）. 『測定法教則』第一書. 第 28 図相当.