

Dürer の「幾何学世界」について

Ueber die "geometrischen Weld" von Herrn Albrecht Dürer

吉川 敦

NEET*

yoshikaw@math.kyushu-u.ac.jp

平成 18 年 8 月 23 日

目 次

1	始めに	2
2	Dürer とその時代	4
2.1	Dürer の生涯	4
2.2	Dürer の学問	6
2.3	Dürer とわれわれ	7
3	遠近法について	8
3.1	ルネッサンスの遠近法の数学的背景	9
3.2	技法としての遠近法	12
3.3	二つのピラミッド	13
4	Underweysung der messung の「幾何学」 — その抜粋若干	15
4.1	同書の構成, 第一書	15
4.2	第二書	17
4.3	第三書	19
4.4	第四書	20
4.5	Dürer と遠近法 — 第四書後半	21
A	付録. Dürer の角の三等分法	23
A.1	Dürer による角の三等分法	23
A.2	近似の精度	29

*No Education, Employment & Training (無学・無職・無能)

1 始めに

デューラー Albrecht Dürer は近世ドイツの高名な画家であり、数多くの有名な作品が残されている。研究書の数も膨大である。筆者のようなずぶの素人¹が今更何をと反省するところである。

まず、若干の釈明から。概ね 10 年前パリ中心部の Petit Palais で開催中の Dürer の版画展を観覧する機会があり、その折、売店で、Dürer の幾何学講義（「測定法教則²」 *Underweysung der messung*）の仏訳を見つけた。このときは購入しなかったけれど、以来、気になってはいた。数年前、数学史家 Peiffer 女史による注釈付き訳本（[3]）の存在に気づいた。[3] は、現在、九大数理に蔵書として収められている。

ところで、Dürer の幾何の理解や空間の認識に関しては、美術史家アイヴィンズ Ivins が、その著 *Art & Geometry* [5] で手厳しいことを言っている。すなわち、

Pelrin の後では Dürer がもっともよく知られた遠近法の著作者であった。かれの本は 1525 年に出版され、わずかな変更を伴って 1538 年に再版された。16 世紀の大半を通じて、同書は恐らく遠近法に関してもっともよく読まれ、多数の外国語にも翻訳された。Dürer は Alberti および Pelrin の作図法を承知はしていたが、いずれについても真に理解することは決してなかった。Dürer の書物が重要なのは、遠近法の理論に関して、何らかの寄与がかれにあったからというのではなく、多数の人々を何世代にもわたってかれがいかに誤らせてきたかを探り、明らかにできるからである。かれの誤解の結果は、かれ自身の作品の多くで明瞭に見て取れる。それは空間の等質性の組織的な否定にまで近づいていた。これはこれで興味深い、本書の探索の埒外ではある³。

Dürer は実際の絵画や彫刻に携わった一流と目される人間である。このような人が、誤解があると後世に評されるほど、今日ならいわば知的な約束事に過ぎないとさえも言える幾何学の「世界構成」に、それを自らの直覚に優先させるほど、振り回されていたとは、とても俄かに信じがたいことようではある。ここは実際に作品にあたって判断すべきことであろう（Ivins 自身がそうしたようではあるが⁴）。

¹ 西欧数学史、日本数学史などを含め。なお、「裸の王様」の謂いもあるし、というくらいの不遜な態度で始めた本稿の準備だが、その過程で痛感しているのは、実はとんでもなく大変な作業だということである。専門研究者が師弟何代にもわたり、しかも、広大な関連分野に目配りしつつの、一生ものの仕事とみるのがふさわしいようだ。— まことに忸怩たるところではある（§2.3 も見てください）。

² 邦題は [8] に拠る。[13] は「画法教本」と訳している。下村耕史教授による同書の邦訳がある（[11]）。

³ After Pelrin, Dürer was for long the best known writer on perspective. His book was published in 1525, and again, with slight changes, in 1538. During much of the sixteenth century it was probably the most popular text on its subject, and was translated into several different languages. Dürer was acquainted with the constructions of both Alberti and Pelrin, but he never really understood either of them. The importance of Dürer's text is to be sought not in any contribution that he made to the theory of perspective but in the way he misled many people for several generations. The effect of his misunderstanding is clearly visible in much of his own work. It came close to being a systematic denial of the homogeneity of space. Interesting as this is, it is aside from the point of the present inquiry. ([5], pp.76–77)

⁴ Ivins は Metropolitan 美術館の版画部長であった。収集品の銅版画を同美術館に寄贈したのが機縁で、美術館入りをしたようである。もともとは弁護士であった。合衆国で学業を修えた後、19 世紀末から 20 世紀初頭の欧州で法律を学んでいる。[5] の序章冒頭で、Dürer の版画に違和感を覚え、古今の幾何学書をいろいろと調

いずれにせよ、本稿では Dürer の幾何学観を論うことはできない。その話題の正しい理解には、恐らく、単に幾何学だけではなく、神学、美術史学、西欧近世史学、技術史学などが関係するかわかれ、とても素人が口を出せるようなことではないだろう⁵。

素人（アマチュア・好事家）としての筆者の今の目標は、Dürer が活動した 15 世紀後半から 16 世紀前半の数学に関する雰囲気の一端を Dürer の教則本を通じて見てみようということである⁶。

数学史の目的が、広義の学説史として数学的思想の発生・伝承・展開を証拠を提示しつつ跡付けることにあるとすると、この稿は、したがって全く見当がずれていると予め言うておかなければならない。かと言って、より広大な数学的知見の社会的伝播を描くことを密かに目指しているわけでもない。そもそもそんなことが簡単にできるはずがない。西欧近世の数学が、軍事や土木技術など広範な社会活動と密着していたことは容易に想像できるが、一方で、神学や人文学とも深く関わっていたはずである。世俗と神聖の狭間という意味では、美術も似たような位置づけであったかも知れないが、数学の方がはるかに現実には密着しており、他方、美術はより精神性の高さが要求されていたかのようでもある⁷。そのような時代を今日しかも異国で総合的に感知することが、まず、容易ではあるまい。古い建物や街並みが維持されているというドイツの場合でも、今日も目にできる記念建造物だけで往時の世界が成り立っていたわけではないのだから、そこに行き交う人々や車馬の姿まで窺って、万人が納得できる描像の追求は大体が簡単にはできない相談なのではある。

謝辞 前川誠郎教授は拙稿に関心を示され、下村耕史教授をご紹介いただいた。拙稿の主要部完成後であったが、下村教授とは大変有益な討論ができた。両教授に深甚なる謝意を表するものである。なお、辻佐保子教授からも拙稿へのコメントをいただき、特に長崎オランダ商館関連の文献調査（後述 §2.3）につき問い合わせ先のご紹介を得たが、まだ行動を起こしてはいない。

べたと述べ、特に、Federigo Enriques の書物で空間認識についての見識を深めたと言っているのは、いかにも、相対性理論の衝撃を受けた世代らしい。[5] は入手の経緯も思い出せないほど昔、多分学生時代から、実は、筆者の手下にある。著者の深く広範な古典的な教養と見識、既成概念に囚われない実証的な筆致は大変印象的であった。Ivins の自信、矜持、勇氣に一種の感動を覚えていなかったら、Dürer の版画展を覗いてみようとは思わなかったかもしれない。

⁵例えば、Peiffer の見解については、[3], Conclusion, pp.121-128, を見られたい。上掲 Ivins の文言に一見直接に対応しそうな表現もある (p.121)：

Dürer の空間は等質的でも等方的でもない。特別な方向、垂直方向がある。他のすべての方向、水平方向、斜め方向は、絶対不動と考えられている垂直方向との関係により定まる。水平方向は縦断的である。左から右に向かう特別な方向性がある。垂直線の左にある点は前方にあるものであり、右のものが後方となる。

[L'espace de Dürer n'est ni homogène ni isotrope. Il y a une direction privilégiée, la verticale. Toutes les autres, les horizontales et les obliques, se définissent par rapport à une verticale considérée comme absolue. Les horizontales sont des transversales. Elles ont un sens privilégié, de gauche à droite. Les points situés à gauche de la verticale sont considérés comme situés devant, ceux de droite comme derrière. ([3], p.121)]

視覚的効果を論ずる文脈で、上記 Ivins の指摘とは違う意味での検討も必要かも知れない。実際、辻 [13], pp.108-112, には Leonardo が「マギの礼拝」(Uffizi 所蔵)において遠近法を意図的に操作したことの検証がある。

⁶上の Ivins の引用文中の Alberti, Pelrin [Viator] らについては遠近法の解説ともども以下で触れる。なお、[5], pp.75-76, 脚注 5。

⁷また、美術には工房が不可欠であるが、数学の場合、個々の成果の背後に膨大な計算技術者がいたという話は寡聞にして不承知である — 後年の例から、いたかも知れないと思うが ([12])。

2 Dürer とその時代

Albrecht Dürer (1471–1528) の生涯と絵画作品については前川誠郎教授の記事 [8] がわかり易い。また, [3] の解説 “Dürer Géomètre” (pp. 17–128) には時代的社会的背景も窺って Dürer を巡る世界の詳細な記述がある。これらをもとにして概略を述べたい。

その前に時代を感じるために, 思いつくままに人の名を挙げておく。Dürer と生年が近いのはコペルニクス Nicolaus Copernicus (1473–1543) である。また, ミケランジェロ Michelangelo Buonarroti (1475–1564) やガマ Vasco da Gama (1469?–1524), マゼラン Ferdinand Magellan (1480–1521?) も近い。グーテンベルク Johannes Gutenberg (1394/99–1468) やレギオモンタヌス Regiomontanus, Johannes Müller von Königsberg (1436–1474) ははるかに古く, レオナルド Leonardo Da Vinci (1452–1519) やコロンブス⁸ Cristoforo Colombo (1446/51–1506) は概ね 20 年の年長になる。一方, ティコ・ブラーエ Tycho Brahe (1546–1601) はもちろん, カルダーノ Girolamo Cardano (1501–1576) も大分若い。ガリレオ Galileo Galilei (1564–1642), ケプラー Johannes Kepler (1571–1630) は大体 1 世紀後の人である。デカルト René Descartes (1596–1650) やデザルグ Gérard Desargues (1593–1662), レンブラント Rembrandt van Rijn (1606–1669) はもっと後であり, ニュートン Isaac Newton (1642/43–1727) はさらに後世の人である。

同時代人で重要なのは, ルター Martin Luther (1483–1546) であろう。実際, 後述のようにある意味で交叉する。エラスムス Desiderius Erasmus Roterodamus (1466–1536) と接触があった。カルヴァン Jean Calvin (1509–1564) は大分若い。前川 [8] には, 雪舟 (1420–1506?) と重なった時代があることの注意がある。重なるといえば, 北条早雲 (1432–1519) など重なるが, 画家という意味である。なお, 神聖ローマ皇帝マクシミリアン Maximilian I 世 (1459–1519) [在位 (1509–1519)] の宮廷画家でもあった。

2.1 Dürer の生涯

さて, Albrecht Dürer は名の通った金細工職人 Albrecht Dürer の次男として 1471 年 Nürnberg に生まれた ([8], [3])。この頃の Nürnberg は商業都市として栄え, 手工業も盛んで, 実際の気風があり, 大学はなかったが知的水準は非常に高く, Köln や Augsburg と並んで神聖ローマ帝国でもっとも人口の多い都市の一つであったという⁹。少年 Albrecht が育った環境は, この都市の最上層の有力者の居住区とも近く, 政治的にも文化的にも申し分なかった。名付け親の印刷業者 Anton Koberger や, その協力者であり, 少年 Dürer の修行先の画家 Michael Wolgemut は, いずれも都市富裕層の支持が厚い人たちであったという。当時 Nürnberg は書物の中心都市というべきところでもあり, Wolgemut の工房で準備され, Koberger によって印刷されたという世界史や百科全書の手書物は今日でも実に

⁸Regiomontanus 編纂の天文暦を航海に利用した。なお, Regiomontanus は Nürnberg の知的習慣を特徴付けるといえる大学者で, 実験や観測を伴う実証的研究を重視するとともに古今の数学書を筆写による誤謬から解放するため印刷公刊したという ([3], p.23)。

⁹16 世紀初頭の人口 5 万人。この都市の当時の支配構造を含め, [3] に解説がある。それによると, 42 家の貴族による寡占支配であったという。その下に, 200 から 250 人の富裕市民が構成する参議会があり, 晩年の Dürer も議員であった。

精緻で美しい姿を留めているという ([3], [8]. 複製が出版されていると思われるが、調査が行き届かない). Dürer が関わったものもあったであろう.

Dürer は、1490 年春に修業の旅に発ち、1494 年の初夏に戻り、結婚し、秋に最初のイタリア旅行に旅立っている. Dürer 夫人は裕福有力な上層市民の娘であり、Dürer が Nürnberg の階層社会の中で、職人階層の出身としては例外的な位置を占める始まりでもあったようである¹⁰. 翌年には Nürnberg に戻っており、この頃に、やはりイタリアから帰郷したプリックハイマー Willibald Prickheimer (1470–1530) の知遇を得、親しく交際するようになったのであろうという. Prickheimer は Nürnberg 最古の貴族の出身であり、7 年の間イタリアで学び、市の最有力者でもあった. 皇帝 Maximilian I 世の代理人であり、Underweysung der messung の献呈先でもある. Prickheimer は、当時のドイツの文化的状況で重要な位置を占めていた. 蔵書家として知られ、ギリシア・ラテンの古典の翻訳を行った. イタリア・ルネッサンスの代表的文化人やドイツの人文学者の多くと交流があった. また、Dürer の絵画技法の理論化の試みは Prickheimer の強い影響下で進められたという ([3], [8]).

Dürer は 1505 年夏か秋から再度イタリアに旅行しており、1507 年 2 月に戻った. Venezia では、「原論」の翻訳 (Baltolomeo Zamberti) (現存) を購入している. ドイツとイタリアの文化的落差もあったのであろうが、Nürnberg では、画家の社会的地位は一般に低く、Venezia では立派な紳士として遇されてきたのに故郷では寄生虫扱いだと Prickheimer に訴えた手紙が残されているという¹¹.

帰国後は、市の拡大参議会の議員になり、Maximilian I 世に仕え、皇帝からは (口先だけの) 年金が与えられた. 公務の旅行も何回かしている. 1520 年、前年の Maximilian I 世の没に伴い、その孫 カール Karl V 世 (1500–1558) [在位¹² (1519–1556)] の戴冠式を機会に皇帝からの終身年金の確認のためにオランダに旅行し、1 年後に帰国している¹³.

1523 年には、Regiomontanus の旧蔵の書物で絵画技法に関わるものを購入した. そのうちには Regiomontanus の注釈付きの「原論」の翻訳 (Campanus) もあった.

Dürer の 40 歳代後半は Luther の宗教改革の時代 (1518～) でもあった. Nürnberg は公式に宗教改革を受け入れた (1525). Dürer が Luther を尊敬し、宗教改革に共感するところが強かったことは確かなようであるが、偶像崇拜否定を旗印とした多数の宗教画の破壊は画家としての Dürer に微妙な葛藤を齎しており、その跡が Underweysung der messung (1525) の序文などに伺えるという. ドイツ農民戦争 (1524–1525) 後の記念塔設計図 (第三書 15–17 図) など Dürer の置かれた複雑な状況を表しているようである¹⁴.

晩年の Dürer は絵画技法の理論化に取り組み、Underweysung der messung (1525. 増

¹⁰[3], p.23 右欄下部. なお, [8], p.15. [8] には随所に Dürer 自身の肉声が紹介されており、臨場感に溢れる.

¹¹[3], p.27. 該当する手紙は邦訳された Dürer 手紙集にある ([7]). [8], p.47, には、「おお、この陽をあとにして如何に寒からん. 当地で私は紳士、国へ帰れば居候」というくだりが引かれている. この滞在全体については, [8], pp.34–47 が詳しい. ただし, [3] によると、ドイツ系以外の現地の人たち、特に、Giovanni Bellini (1430?–1516) などごくわずかを除くと、画家から歓迎されたというわけでもなかったらしい. 筆者としては、そもそも異郷で満足以言葉が通じたのかという疑問も覚える. 数学古典を理解するときと同様、実物に即しての洞察があったから十分だったのだろうか. それとも職人の間には一種の *Lingua franca* があったのだろうか. いずれにせよ専門家に聞けばわかることであろう.

¹²スペイン皇帝としては 1516 年から.

¹³より詳しくは, [8], pp.64–74.

¹⁴[3], pp.28–32. なお、ここまで触れた Dürer に関わる時系列を眺め、人脈を考慮し、さらに、職業的社会的環境を考えると、そういう時代だったのだろうか、混乱の極みで、筆者のような素人には、実際のところはどうだったのか全くわからない.

補再版 1538 (没後)) もそうであるが、書物として公刊している。

Dürer の没年は 57 歳であった。Nürnberg の最富裕層 100 家に数えられるほどの経済的成功を収めて世を去ったという¹⁵。

2.2 Dürer の学問

Dürer は 基本的には職人であり、学者ではなかった。Nürnberg の上層社会と密着してはいたが、素養は上層のものとは一致していなかった。Dürer のラテン語の知識は貧しかったようである。したがって、原論 (のラテン語訳) などの古典は人助けがなければ読むことができなかった。しかし、内容の本質を洞察する力には長けていたようである。Prickheimer がラテン語の古典を口頭でドイツ語に訳し、それを Dürer が筆記したという証拠を示す史料もあるという。Dürer が数学的課題、例えば、長方形を同面積の正方形に変換するための作図法に関わっているときにも、必要な専門的支援を周辺から受けることができたようである。幾何学や自然科学的な事柄に対する Dürer の理解の深さは、学者側からも高く評価されていたらしい。Dürer が Prickheimer を始めとする有力な文人や学者たちとよい関係にあったことが偲ばれる¹⁶。

Dürer の本来の素養は前述の通り職人のものであつたはずである。しかし、当時、詳細な技術の多くは秘伝口伝の形で伝承されており、内容を正確に知ることは、もはや今日では難しいという。正多角形、正多面体等は、職人等には親しいものであり、各種の幾何学的図形に対する感覚は鋭いものであったろう。15 世紀半ば以降には実用的な幾何学的知識の文書化の試みが確認でき、その影響は Dürer の *Underweysung* (や他にも例えば Leonardo の著作) にも見られるという ([3], p.56)。Underweysung には数学的証明はほぼ皆無と言ってよいが、一方、古典的な幾何学的命題に職人の現場の知恵を反映させた解釈や便法が施されているものも多く、古人の名を引用していても Dürer 独自の工夫に基づくと考えるのが自然な場合がかなりあるという¹⁷。

しかし、Underweysung には、ユークリッドやプラトンの名は挙げられているし、アルキメデス螺旋や円錐曲線など古典的な数学書を広く漁った形跡が数多く残されている。Dürer がラテン語をほとんど解さなかったためか Dürer 自身の手によって注釈が加えられたラテン語書物は残っていないという。Dürer の各種手稿に見られるドイツ語に訳された古典的な数学の命題や Underweysung の下書きに残る用語の選択などから、Dürer が見たであろう書物の推察はある程度付くそうではある ([3], pp. 63–87)。

遠近法については後述する (§4.5)。イタリアの理論家の影響を Dürer なりに咀嚼して、Underweysung で論じている (が既述の通り誤解があった)。

¹⁵[3], p.27 注 44.

¹⁶Peiffer は次のように総括している ([3], p.36) :

要するに、彼は Nürnberg という富裕な都市が提供するすべての資源を、数学的情報に到達するために、使い切るのである。[Bref, il utilise, pour accéder à l'information mathématique, toutes les ressources que lui offre la riche ville de Nuremberg.]

¹⁷[3], pp.53–62. 特に、立体図形の平面図と側面図の二重射影による把握が著しい。これは円錐曲線の扱いでも多用される。

なお、Peiffer は Dürer が幾何学者（数学者）と呼ばれるのにふさわしい理由を三つ挙げている¹⁸。第一に、いくつかの曲線の提案や円錐曲線の二重射影による扱いなどの数学の発展への独創的な寄与、第二に、遠近法のドイツ文化圏への最初の紹介者であること、第三に、形に対する悦びの感覚である。第三の点は、実際に、Underweysung で確認することができる。

ちなみに、ルネッサンスの数学者とは、まず、四学、すなわち、算術、幾何、天文学、音楽をもっぱらに研鑽する学者、あるいは、また、数学的知識に基盤を置く職業に従事する人、例えば、建築家を指していたという ([3], p.122)。Dürer は絵画を幾何学に従って理論的に基礎付けることにより、後者の意味で、画家が建築家のように数学者として遇されることを目指していたと考えられるわけである。

2.3 Dürer とわれわれ

Dürer は指導的な数学者ではなかったし、数学の主流に後世まで残る何がしかの足跡を残したとも言えない。高名な画家に当時の数学に準拠した技術書があるという以上の意味が、特に、われわれ日本の数学者にあるのだろうか。Dürer は当然さまざまな幾何学的図形を論じているが、学問的素養の不足もあって、それらは不正確な点も多く、Kepler などでは批判的引用がされているという。Dürer が生きていた時代は日本へのキリシタン伝来とは概ね半世紀ずれている。しかも、Dürer は北欧・中欧系である。Dürer が、たとえ、宗教的にプロテスタントではなかったとしても、そのころ日本に伝来したかもしれない技術や知見の大部分は南欧系であったから、Dürer の影響が 16 世紀の日本に間接的に及んでいた場合でも、その証拠は、キリシタン弾圧もあり、なかなか見つかるまい。

ところで、はるか後の欧風画やその影響を受けた浮世絵などに遠近法の影響が見られるという（例えば、[4]）。その受容の系統を調査していくと、あるいは、Dürer やさらにルネッサンスの大家たちに辿り着けるかもしれない。蘭学者から、興味深い技法として、浮世絵師に遠近法や遠近法を扱った書物の図版などが伝えられたことはありえたであろう。もちろん、以上は、恐らく、遠近法図版の原典などの特定も含め、美術史、特に、江戸期の欧風画や浮世絵研究に関する詳細な研究成果にまとめられているのだろう。数学者の関心は、欧風画の背後に西欧の数学的伝統まで意識されているのかどうかの探索であろう。いづれにせよ、専門家に尋ねるべきことである。

筆者は、しかし、長崎オランダ商館の蔵書目録を調べると日本の西欧文化受容の一端がわかるのではないと思う。商館に画家がいた時期があるかどうかはわからないが、外交官や医者ばかりではなかったろう¹⁹。Dürer の版画や著書もあったかも知れない。こういったことについては当然かなり研究が進んでいるのだろう。これも、まず専門家に相談するところから始めるべきことである。

近世西欧の文化思想を探るにあたり、われわれの関心はどうあるべきか。われわれが西欧文化だけしか背負っていないと考えるのなら悩むことはない。昔の人の事跡を探るのは

¹⁸[3], p.122.

¹⁹[9] の解説によると後年ながら画家がいた時期はある。出入りの日本人画家もいたようであるが、[9] 所収の図版に拠る限り遠近法の影響は希薄である。

自己確認に繋がるからである。しかし、われわれの場合、西欧文化はわれわれそのものではない。確かに、現代の産業社会は近代科学の上に成り立ち、そして近代科学は西欧文化に属している。しかし、近代科学という形に収束したのは、西欧文化の中でも内在的な普遍性の高い部分である。この部分は、まさしく、普遍性の高さという点で、西欧文化の文脈からも独立しているという性格がある。われわれにとって自然で重要な意義があるゆえンである。だが、西欧文化のすべてが内在的に普遍性が高いというわけではない。それでは、Dürer どうか。画家としては作品での評価が重要である。作品理解あるいは作品鑑賞がどうあるべきかがまず問われるべきこととしても、それは数学者としての関心ではない。では、Dürer の著作の数学的内容についてはどうか。ここは判断が難しい。ただ、Dürer は、ある時期の西欧の知的環境を体現しているようにも思われる。総合的な文化受容という観点を含めて、江戸期の欧風画や蘭学文献の調査や解釈が必要なのではないかと思う。また、こうして我々の文化における内在的な普遍性のある部分と固有の部分との関わりも明らかになってくるように思われる²⁰。

3 遠近法について

話の筋として、ルネッサンス期の遠近法の解説が必要である。もとより、現実の3次元の世界をできるだけ正確に壁面なりキャンバスなりの平面に描き出そうということであるから、本来の要素としては、視点を定めての比例関係のほかに色彩や明暗濃淡も不可欠であるべきだろうが、比例関係に関しても、後年、数学として射影幾何学に収束したとするのは一面的過ぎるようである。ここでは、辻茂教授によって整理された形 [13]²¹を参考に、[3] や [5] の記述を勘案しつつ、紹介する。

²⁰ わが国の西欧文化の導入は江戸時代後期からと考えると、すでに 200 年になる。組織的導入は江戸時代末期からとしても 150 年は超えている。しかし、組織的導入と言っても、見ている人の都合や素養だけに合わせて取り込んできたので、文化対文化の照合関係としては必ずしも体系化されて来たわけではないと思われる。数学史、科学史あるいは科学哲学や周辺領域に通じていない身としては断定的なことは言えないが、表面的にはともかく、異分野間の関連をも明らかにするような基幹部に関しては最近でも事情は余り変わっていないのではないだろうか。例えば、[5] に Desargues の定理の初出が銅版画家 Bosse の著書の付録であることが書かれている（脚注 17, p.94）が、数学辞典第三版では Desargues の扱い自体小さく、当然 Bosse への言及はない。なお、脱線であるが、Bosse の該当書 *Manière universelle de M. Desargues pour pratiquer la perspective* (Paris, 1648) とは若干標題を異にするものの付録に Desargues の定理を収めた書物が金沢美術工芸大学に所蔵されている。同大学美術工芸研究所上田恒夫教授から見せていただいたとき、数学辞典の扱いなどから美術史的に意義があるのなら別として、敢えて訳出されるには及ばないのではないか、と申上げたことがある。（[2] 参照。ただし、これは当該の書物ではない。同書解説の文献表を見られたい）。

²¹ [13] は非常によい書物であると思われるが、もともとの読者の想定は一般の画家や美術愛好家であったためだろうか、**数学者にさえもわかる**とは言いがたいものである。若干の基礎的な用語は（高校）数学の教科書とは異なる使われ方がされていて、その点も特に理系の読者には混乱のもとになりかねない（ただし、[13] の方が高校の数学用語よりも本来の語義に忠実であるということは想像できる）。記述対象自体は鮮明と思われるので、筆者が言葉遣いなどを改め、筆者なりに理解できたものを以下に掲げる。ただし、教授は

遠近法を、数学の世界から、美術の世界に取り戻すことが必要と考えます。とはいえ、まさにそのためにも、最小限の数学的知識が必要です。その知識というのは、ルネッサンス当時の人たちが、なかでも画家たちが身につけていた程度の知識、というのはユークリッドの幾何学に少しを加えた程度の知識です。つまり、私どもが持ち合わせている中学・高校の数学に少し磨きをかけた程度のものであって、決して近代の高度の数学が必要なわけではありません。むしろ、高度の数学を用いると、それによって見失われてしまう歴史的真相が必ずあります。個々のケースに応じて、また個々人の関心の傾きと理解の度合いに応じて、必要最小限度の数学は、当然用意せねばならないということです。というのは、ルネッサンスの遠近法は、数学や言葉による理論としてより、実技として先行していて、だから、同時代の数学や言葉では、先行していた実技について、説明を、十分に尽くせなかったのだと判断されるからです（[13], pp.8-9）。

遠近法とは、基本的には、立体的であるべき世界を画家が観察して、眼前の壁面あるいはキャンヴァスという平面に描きうつすための技法とその理論を意味する。画家は水平面に垂直に立って、片目だけで世界を見、計測する。ただし、実際に観測するのは、眼前の立体のいくつかの基準点だけで、眼前の画面上での残りの位置関係は、計算によって定める。遠近法とは、この計算法の体系に他ならない（と考えてよいようである²²⁾。

もとより遠近法はルネッサンス期以前からそれなりの精緻さをもって使われてきた。ここで言うのは、フィレンツェの建築家ブルネレスキ Brunelleschi の暗箱画法に端を発し、建築家・画家アルベルティ Alberti²³⁾によって整理提唱されたという「正統作図法²⁴⁾」とその改良のことである。

3.1 ルネッサンスの遠近法の数学的背景

遠近法には、二つの要素がある。第一は、画家が対象を観測し、比例を定めることであり、第二は、比例に基づいて観測結果を画面に描き出すことである。

最初に、第一の要素を説明する。話を単純にするために、3次元空間に直交座標 (x, y, z) を入れて考えよう。画家の目は点 $E(d, 0, h)$, $d > 0$, $h > 0$, にあるとし、 yz -平面を透視面として、観察対象の世界を半空間 $x < 0$ とする。この内部にあって、点 $Q : (\xi, \eta, \zeta)$ を通る（半）直線²⁵⁾

$$\ell : x = \xi + \alpha t, \quad y = \eta + \beta t, \quad z = \zeta + \gamma t \quad (\alpha \leq 0) \quad (1)$$

を画家は、点 E と直線 ℓ 上の点を結ぶ線分と透視面 $x = 0$ との交点の集合として認識したい。したがって、 E が ℓ 上になければ、 E と ℓ とが定める平面と yz -平面との交線を ℓ' として、画家は ℓ を透視面上の直線 ℓ' として認識したいわけである。空間内の直線は透視面上に直線として描かれるというこの簡単な事実は、実は、技術的に根本的な意味を持っている²⁶⁾。しかし、それだけではなく、直線上の要所要所の点を的確に関連付けて描き出すことも重要である。今、 ℓ 上の点 $P(x, y, z)$ が ℓ' 上の点 $P'(x', y', z')$, $x' = 0$, として認識されるとすると、ベクトル $\overrightarrow{EP}$ と $\overrightarrow{EP'}$ は比例しているから、

$$y' = -\frac{d}{x-d} y, \quad z' = h - \frac{d}{x-d} (z - h) \quad (2)$$

と言っている。遠近法は、明確な数学的構造があるが、もともとは描画上の技法である。まさに、教授の言われる通りであろう。なお、Peiffer の遠近法の解説 ([3], pp.95–119) は数学的に、かつ、恐らく画法上も、明快かつ詳細である。Dürer の理解との関わりは、これらの他、[5] も参考に、§4.5 に示す。ところで、Piero della Francesca の遠近法の書物の評価について、[13] と [5] は意見を大きく異にしているなど、筆者のような素人 — つまり、長年の研鑽による見識というものを欠いている身としては困惑することも少なくない。

²²⁾ 画家が行うのは、現実の世界を画面上に表現するというものではなかった。現実の世界の「正確」な表現に適した世界認識の手法を用いて、理想世界を画像化しようとするものであったろう。さればこそ、宗教画においても、背景は抽象的な文様ではなく、正しい風景でなければいけなかったのではないか。

²³⁾ [1]。ただし、Dürer が見たものの底本の異同を筆者は知らない。

²⁴⁾ [13] の用語。construzione leggitima. cf. [3], p.99

²⁵⁾ $\alpha = 0$ ならば透視面に平行な直線、 $\alpha \neq 0$ なら透視面と角度のある、つまり、奥行きのある半直線を考えることになる。実際には、 $\alpha = 0, -1$ および $\beta, \gamma = 0, 1$ の場合に、 $t > 0$ に相当する半直線を想定すれば十分であろう。

²⁶⁾ Alberti の「対角線法」の基礎原理である。§3.2 で利用する。なお、[13], 第 1 章参照。

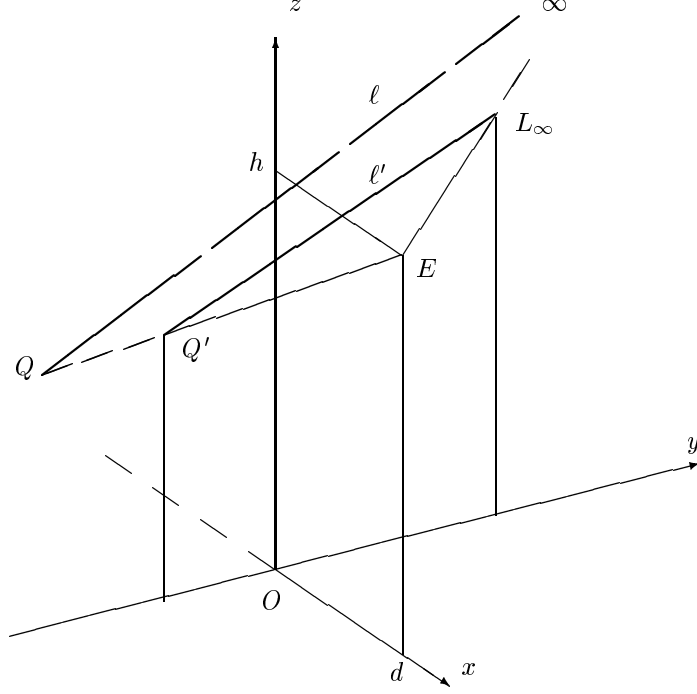


図 1: 遠近法の模式図. yz -平面が透視面である. 画家の眼は E にある.

となる. パラメータ表示 (1) のもとでは

$$y' = -d \frac{\eta + \beta t}{\xi + \alpha t - d}, \quad z' = h - d \frac{\zeta + \gamma t - h}{\xi + \alpha t - d} \quad (3)$$

である. したがって, $\alpha = 0$ ならば,

$$y' = \frac{\eta d}{d - \xi} + \frac{\beta d}{d - \xi} t, \quad z' = \frac{\zeta d - \xi h}{d - \xi} + \frac{\gamma d}{d - \xi} t \quad (4)$$

$\alpha \neq 0$ ならば

$$y' = -\frac{\beta d}{\alpha} + \frac{d}{\alpha} \frac{\beta \xi - \alpha \eta - \beta d}{\alpha t + \xi - d}, \quad z' = \frac{\alpha h - \gamma d}{\alpha} + \frac{d}{\alpha} \frac{\gamma \xi - \alpha \zeta + \alpha h - \gamma d}{\alpha t + \xi - d} \quad (5)$$

となり, $t \rightarrow \infty$ のときの極限点, すなわち, ℓ 上の無限遠点が透視面上の点

$$L_\infty : \left(0, -\frac{\beta d}{\alpha}, \frac{\alpha h - \gamma d}{\alpha} \right) \quad (6)$$

として表される (図 1).

例えば, 点 Q で直交する 3 直線 ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z を, それぞれ, $\alpha = -1, \beta = \gamma = 0; \beta = 1, \alpha =$

$\gamma = 0; \gamma = 1, \alpha = \beta = 0$ で定めたとすると、透視面上で、 $\ell'_x, \ell'_y, \ell'_z$ は、それぞれ、

$$\ell'_x \quad ; \quad y' = \frac{\eta d}{t - \xi + d}, \quad z' = h - \frac{(h - \zeta) d}{t - \xi + d} \quad (7)$$

$$\ell'_y \quad : \quad y' = \frac{\eta d}{d - \xi} + \frac{d}{d - \xi} t, \quad z' = \frac{\zeta d - \xi h}{d - \xi} \quad (8)$$

$$\ell'_z \quad : \quad y' = \frac{\eta d}{d - \xi}, \quad z' = \frac{\zeta d - \xi h}{d - \xi} + \frac{d}{d - \xi} t \quad (9)$$

となる。特に、頂点が

$$\begin{aligned} & Q_0(\xi, \eta, \zeta), Q_1(\xi, \eta + 1, \zeta), Q_2(\xi, \eta + 1, \zeta + 1), \\ & Q_3(\xi, \eta, \zeta + 1), Q_4(\xi - 1, \eta, \zeta), Q_5(\xi - 1, \eta + 1, \zeta), \\ & Q_6(\xi - 1, \eta + 1, \zeta + 1), Q_7(\xi - 1, \eta, \zeta + 1) \end{aligned}$$

の空間内の単位立方体 ($\xi < 0$ に選んである) は、透視面上の頂点

$$\begin{aligned} & Q'_0 \left(\frac{\eta d}{d - \xi}, h + \frac{(\zeta - h) d}{d - \xi} \right), Q'_1 \left(\frac{(\eta + 1) d}{d - \xi}, \frac{\zeta d - \xi h}{d - \xi} \right), \\ & Q'_2 \left(\frac{(\eta + 1) d}{d - \xi}, \frac{\zeta d - \xi h + d}{d - \xi} \right), Q'_3 \left(\frac{\eta d}{d - \xi}, \frac{\zeta d - \xi h + d}{d - \xi} \right), \\ & Q'_4 \left(\frac{\eta d}{d - \xi + 1}, h + \frac{(\zeta - h) d}{d - \xi + 1} \right), Q'_5 \left(\frac{(\eta + 1) d}{d - \xi + 1}, h + \frac{(\zeta - h) d}{d - \xi + 1} \right), \\ & Q'_6 \left(\frac{(\eta + 1) d}{d - \xi + 1}, h + \frac{(\zeta + 1 - h) d}{d - \xi + 1} \right), Q'_7 \left(\frac{\eta d}{d - \xi + 1}, h + \frac{(\zeta + 1 - h) d}{d - \xi + 1} \right) \end{aligned}$$

の図形として表される。距離 $\overline{Q'_0 Q'_1}, \overline{Q'_0 Q'_3}, \overline{Q'_0 Q'_7}$ は、それぞれ、

$$\overline{Q'_0 Q'_1} = \overline{Q'_0 Q'_3} = \frac{d}{d - \xi}, \quad \overline{Q'_0 Q'_7} = \frac{d \sqrt{\eta^2 + (\zeta - h)^2}}{(d - \xi)(d - \xi + 1)} \quad (10)$$

となる。ここで、 $d - \xi$ は視点 E から、透視面に平行な面 $Q_0 Q_1 Q_2 Q_3$ までの距離である。 $\overline{Q'_0 Q'_7}$ が $d - \xi$ の増大に関して逆二乗で減衰することは辻によって初めて指摘されたのだそうである ([13], 特に、第二章参照)。一方、 $\overline{Q'_0 Q'_7}$ は、 η, ζ に関して 1 次の増大を示すが、このことはルネッサンスの遠近法の当初から知られていたという ([13], p.64)。

なお、(1) において、 $t = 0, 1, 2, \dots$ と表される点を P_t とおこう。各 P_t は透視面上の (3) で与えられる点 P'_t として描かれる。距離 $\overline{P_t P_{t+1}}$ と $\overline{P_{t+1} P_{t+2}}$ の比 r_t を計算すると

$$r_t = \frac{\overline{P_{t+1} P_{t+2}}}{\overline{P_t P_{t+1}}} = \frac{d - \xi - \alpha t}{d - \xi - \alpha(t + 2)} \quad (11)$$

となり、したがって、 t が十分に大きければ、

$$\overline{P_t P_{t+1}} = \frac{(d - \xi)(d - \xi - \alpha)}{(d - \xi - \alpha t)(d - \xi - \alpha(t + 1))} \overline{P_0 P_1}, \quad t = 2, 3, 4, \dots, \quad (12)$$

である。 $\alpha = 0$ ならば、もちろん $\overline{P_t P_{t+1}} \equiv \overline{P_0 P_1}$ であるが、 $\alpha < 0$ ならば、 t の逆二乗関数になる。

3.2 技法としての遠近法

本来の問題は、(7) や (8) などの計算を、画家が、必要とする状況下で、しかも、実用に適した道具や手段で実現することである。

§3.1 の結果を実際利用に適した形に整理しよう。水平面に平行な平面 ζ 上に、等間隔な平行直線群 $\ell_1, \ell_2, \dots$ が透視面に横断的にあるものとする。これらを

$$\ell_k; x = \alpha t, y = \beta t + k, z = \zeta \quad (\alpha < 0), \quad k = 1, 2, \dots$$

とする ($\alpha = -1, \beta = 0$ で十分なのであるが²⁷)。この平面上に、透視面と平行な直線群 $m_1, m_2, \dots$ が等間隔にあるもの²⁷とし、これらを

$$m_j : x = -j, y = s, z = \zeta, \quad j = 1, 2, \dots$$

とする。パラメータ ζ を $\zeta = 1, 2, \dots$ と動かすことにより、空間内にこれらの直線群による格子が張り巡らされたことになる。空間内の物体を、この直線格子との関係で指定し、その結果を透視面に転写することにより、絵画化のための重要な段階が成就される。

平行直線群 ℓ_k を透視面に転写した直線群 ℓ'_k を得るのは難しくない。実際、すべての ℓ_k の無限遠点は、透視面上の（消失点に相当する）点

$$L_\infty : \left(0, -\frac{\beta d}{\alpha}, h\right)$$

として表されるから ((6) 参照)、直線 ℓ'_k は透視面上で点 L_∞ と透視面と ℓ_k との交点 $(0, k, \zeta)$ を結ぶ直線として定められる。

問題は、直線群 m_j を透視面上に直線群 m'_j として表現するにはどうしたらよいかということである。このために「対角線法」(脚注 26 参照) が使われる。すなわち、直線 ℓ_k, ℓ_{k+1} と m_j, m_{j+1} の交点を頂点とする平行四辺形 Π_{kj} を考える。 ℓ_k, m_j の交点を C_{kj} とすれば、

$$C_{kj} : \left(-j, k - \frac{\beta}{\alpha} j, \zeta\right)$$

となる。 Π_{jk} の頂点は $C_{kj}, C_{k+1,j}, C_{k+1,j+1}, C_{k,j+1}$ である。 Π_{jk} には二本の対角線がある。頂点 $C_{kj}, C_{k+1,j+1}$ を結ぶものを f_{kj} , $C_{k+1,j}, C_{k,j+1}$ を結ぶものを $g_{k+1,j}$ としよう。重要なことは、 f_{jk} の延長上に点 $C_{j+n,k+n}$ が載り、 $g_{k+1,j}$ の延長上に点 $C_{k+1-n,j+n}$ がすべて載ることである。しかも、 $f_{kj}, g_{k+1,j}$ はそれぞれ平行直線群を定める。式で表せば、

$$f_{kj} : x = -\tau - j, y = \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) \tau + k - \frac{\beta}{\alpha} j, z = \zeta,$$

$$g_{k+1,j} : x = -\sigma - j, y = -\sigma \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) + k + 1 - \frac{\beta}{\alpha} j, z = \zeta$$

²⁷ 実際の立体を描く際は、このような形式的な直線群よりも、対象の特徴的な位置を示すような直線を選ぶという意思が見えることが望ましい。歴史的にはそのような工夫、すなわち、透写が先行しており、その結果を透視面に転写する技法として、「二つのピラミッド」が用いられた。これについては、つぎの §3.3 で説明を試みる。

となる ($k, j = 1, 2, \dots$). 直線群 f_{kj} の無限遠点は透視面上ではすべて (距離点に相当する) 同じ点

$$D_{\infty}^{+} : \left(0, -\frac{\beta}{\alpha} d + d, h \right)$$

になる ((6) を見よ). 直線群 f_{kj} を透視面上にうつした直線群は点 D_{∞}^{+} と直線 f_{kj} と透視面との交点 $(0, k-j, \zeta)$ とを結ぶ透視面上の直線 f'_{kj} から成る. 一方, 直線群 $g_{k+1,j}$ の無限遠点は透視面上ではすべて (距離点に相当する) 同じ点

$$D_{\infty}^{-} : \left(0, -\frac{\beta}{\alpha} d - d, h \right)$$

になり, したがって, 直線 $g_{k+1,j}$ は透視面上で点 D_{∞}^{-} と各 $g_{k+1,j}$ と透視面との交点 $(0, k+j+1, \zeta)$ とを結んだ直線 $g'_{k+1,j}$ として表される.

そこで, 直線 m_j を透視面上で m'_j として表すには, 次のようにすればよい. 任意の ℓ'_k をとり, f'_{kj} との交点 C'_{kj} を求める. C'_{kj} を通る透視面上の直線で, 水平面に平行なものが求める m'_j である. 直線 f'_{kj} の代りに g'_{kj} を用いても同じ結果が得られる.

同様の操作を ζ を変動させて行えば, 空間内の格子を透視面の上にすべて移し変えることができたことになる. この際, 大事なことは, d, h も, α, β, j, k も画家が決定できるパラメータであり, しかも, それらによって, 必要な情報をすべて透視面の上に実現することが, 点を打ち, 線を引くという操作に集約されることである²⁸. この技術的土台の上に, いわば詳細な目盛りつきの描画用の透視装置を工夫するのは, 装置の使用法をよく理解していれば容易であったはずである.

3.3 二つのピラミッド

辻 [13] でも Ivins [5] でも, 遠近法の紹介には 2 個のピラミッドという技法が紹介されている. 第二のピラミッドといわれるのは, §3.2 既述の透視図に (消滅) 点 L_{∞} を頂点として描かれる三角錐状の直線群である. 第一のピラミッドとは, 実は, (距離) 点 $D_{\infty}^{\pm}$ (の一方) を頂点として描かれる三角錐状の直線群と捉えられるが, これは Pelrin の着想によるもので ([5], p. 75, 脚注 5.), 少なくとも当初の Alberti の提案は画家が直接対象を観察し透視図作成のための対象の位置に関するデータ収集として作成するものであった (と理解できる). しかし, §3.2 に述べたことは, 古典的な「正統作図法」の定式化と違って, **斜めに倒してあるので**, Alberti の提案がこの場合でも有効であるかどうかは確認を要する.

今, 直線 ℓ_1 と直線 ℓ_k に対し, 直線 m_k をどのように透視面上に転写するかを考える. §3.2 の議論では, 透視面上では, 直線 ℓ'_1 と ℓ'_k は, 点 $L_{\infty} (0, -\beta d/\alpha, h)$ で交わり, さらに, それぞれは, 透視面と点 $P_1 (0, 1, \zeta)$, $P_k (0, k, \zeta)$ で交わった. このとき, m'_k を決め

²⁸例えば, 透視面上の直線 $x=0, y=y, z=h$ が空間の無限遠方に相当し, この直線上に点 $L_{\infty}, D_{\infty}^{\pm}$ がある. しかも, $D_{\infty}^{\pm}$ は, L_{∞} を $\pm d$ だけ平行移動したものである. これらにより, 直線 ℓ'_k, f'_{kj} は, それぞれ透視面上の点 $(0, k, \zeta), (0, k-j, \zeta)$ を使えばかける. 数学的原理に通じていなくてもできることである.

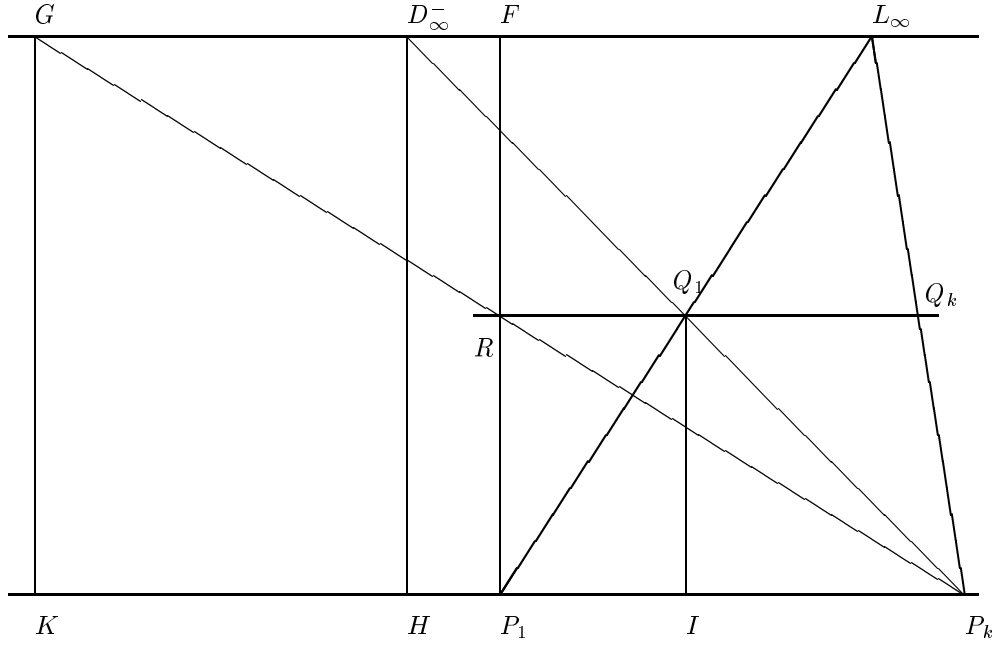


図 2: Alberti (および Pelrin) の提案. $\overline{GF} = d = \overline{D_\infty^- L_\infty}$. ここで, $P_1 P_k$ に平行な $Q_1 Q_k$ は R から決まる. Q_1 が直接求められるということが Pelrin による改良である.

するためには, 点 P_k と距離点 $D_\infty^- (0, -\beta d/\alpha - d, h)$ とを結ぶ線分が ℓ'_1 と交わる点 (Q_1 とする) を通り, $P_1 P_k$ に平行な直線を引けばよかった. しかし, Alberti の提案では, P_1 から直線 $L_\infty D_\infty^-$ に垂線を下ろし, その足 (つまり, 垂線と直線 $L_\infty D_\infty^-$ の交点) を F とし, さらに, 直線 $L_\infty D_\infty^-$ の上に F から距離 $-d$ のところに点 G をとる. そこで, G と P_k を結ぶ線分が線分 $P_1 F$ と交わる点を R とすれば, R を通り, $P_1 P_k$ に平行な直線は, 実は, m'_k に一致する (と Alberti は言ったようである). なお, $P_1 F$ は仮想的な下書き用の透視画面に相当し, G に画家の眼があるというわけである (図 2).

真偽の確認をする. まず, 点 F, G の座標が, それぞれ, $(0, 1, h)$, $(0, 1 - d, h)$ であることに注意しよう. これから, 交点 R および Q_1 の座標を計算して, z -座標が一致するかどうかをみればよい. 実際に計算すると,

$$R \left(0, 1, \frac{(k-1)h + \zeta d}{d + k - 1} \right), \quad Q_1 \left(0, -\frac{d((k-1)\beta - \alpha)}{\alpha(d + k - 1)}, \frac{(k-1)h + \zeta d}{d + k - 1} \right)$$

となり, この場合も Alberti の主張は成り立つ²⁹.

²⁹ 初等幾何学的証明を与えることもできる. [5], p.77. 脚注 9 に 16 世紀末の文献からの参考図が掲げている. 非常に直感的には, 次のように考えたらよいだろう. 図 2 において, 長さ d の棒 $D_\infty^- L_\infty$ が直線 $K P_k$ に平行に自由に動くとする. 最終的に, D_∞^- が G に到達すると, L_∞ は F にある. D_∞^- と P_k を一様なゴム紐で結んでおくと, この移動に際して, 点 Q_1 は直線 $K P_k$ に平行な直線上を移動し, R の位置に至る. これを Euclid 幾何の言葉で表現しなおせば幾何学的な証明は完了である. つまり, 実際は, 直線 GL_∞ 上の任意の点 A をとり, この直線上に, A から d だけ (図 2 の場合だと) 左に点 B をとって, 線分 BP_1 と AP_k の交点 C を定めると, C を通り, 直線 GL_∞ と平行な直線が求まるものになる.

なお、図 2 に相当する関係を Dürer がどう理解していたかを [3], [5] を参考に後に述べる (§4.5)。

4 Underweysung der messung の「幾何学」 — その抜粋若干

Dürer は工房の職人たちが物体の形を作品として正しく表現するためには、幾何学的な構造についての基礎的な理解が不可欠と考えて、Underweysung der messung を著したという ([3]. 献呈文)。したがって、同書は幾何学書という面もさることながら、基本的には実用書であり、当然、実際の作業に直結する近似的な作図法などに相応の関心が向けられている。また、図版を多用し、しかも、現場に即していると思われる要領のよい説明が付されている。材料は、Dürer 自身の工夫もあるだろうが、先行する書物から集めて来たものも多いようである（先行文献については [3] の解説や注記で詳細に論じられている）。同書からは、この時代の数学の主要な応用先である土木工事、建築、軍事、航海、測量や商業などにおける数学との違いの様子も覗かれるように思われる。もちろん、純粋の学問としての数学とは全く興味が異なっていたはずである。特に、同書では、正方形と等積の円、角の三等分、立方体の倍積の立方体の求め方について詳しく論じられているが、近似解法や道具の使用は当然とされている。Dürer には、実現すべき目標と方法論的な純度の高さとの軽重は明白であったということであろう。

当然、Underweysung der messung は Dürer やその弟子たちの技法を知る上では美術史および建築（技術）史上極めて重要な著作³⁰であろう。数学史的には、いくつかの曲線の提唱や円錐曲線の取り扱いなどに同書が初出であると評価すべきものがあるという ([3])。

まず、この書物の概略をみよう。冒頭に、Wilbolden[Willibald] Pirckheymer への献呈文があり、献辞と出版の動機が述べられる。Dürer の絵画論・美術論の要約にもなっており、また、基礎的な教養を身に付けて後進の画家や職人が社会的地位の向上を果たして欲しいという Dürer の強い想いが窺われている。

本文は第一書～第四書の四部からなる³¹。遠近法の解説は第四書後半にある。その他の箇所では、さまざまな幾何学的対象の取り扱いが述べられている。

以下の紹介は、ずぶの素人の筆者が短い時間に拾い読みを斜めにした結果であるが、これをきっかけに興味を持つ方が現れたら大いに幸せである。

4.1 同書の構成．第一書

第一書は、もっとも基本的な部分である。点、線、面の定義および描き方について述べる。51 図を伴う。曲線の分類を与え、円錐曲線を説明し、比例について論ずる。定規とコンパスの使用法について詳細な説明がある。硬直した使用法ではない。また、補助的な器

³⁰ただし、既述の Ivins の見解を含め、今日の水準では多くの問題がある。[3] のように膨大周到な解題と注釈が正しい理解には不可欠であろう。

³¹[3] で概ね 230 ページを占める。[3] 付録末尾の Table analytique に各書の項目と図版をまとめたものがある。

具の工夫もしている。作図例は、波状曲線（蛇の線）、螺旋（蝸牛の線）、包絡線などの相当複雑な曲線を含む、

若干の図形について、Peiffer は [3] 付録で特記している。例えば、Dürer は曲線

$$4(x^2 + y^2)^3 - 4R^2(x^2 + y^2)^2 + R^4y^2 = 0 \quad (R > 0) \quad (13)$$

の一部を与えている（第一書 18 図）が、Peiffer は Dürer の構成を書き直して、上記方程式を導き、曲線の全貌を示している³²。例えば、この曲線を Dürer は次のように描く。半径 R の 4 分の 1 円周を与え、一方の半径を n 等分する。等分点を $P_k, k = 1, 2, \dots, n+1$ とし、 P_{n+1} を中心、 $P_1P_{n+1} = R$ としよう。 $P_k, k = 2, \dots, n+1$ において垂線を立て、その円周との交点を Q_k （および $Q_1 = P_1$ ）とする。中心 O 、半径 R の半円周を n 等分する。半円周上の等分点を、 $C_1, C_2, \dots, C_{n+1}$ とおく。 C_1C_{n+1} が直径になる。各半径 OC_k 上に $OC'_k = P_{n+1}P_k$ となる点 C'_k をとる。 C'_k を順次つないで、求める曲線が得られる。すなわち、極座標 (r, ω) を用いれば、Dürer の曲線は

$$r = R \sin \frac{\omega}{2}, \quad 0 \leq \omega \leq \pi$$

となる。

注意 上の極座標表示には若干説明が必要なようである。4 分の 1 円周をどう与えるかにもよるが、 Q_k の偏角 $\theta = \angle P_1P_{n+1}Q_k$ とすると、 $0 \leq \theta \leq \pi/2$ であり、 $\omega = 2\theta$ が C_k の偏角 $\omega = \angle C_1OC_k$ となる。したがって、 $R \sin \theta$ が OC'_k に相当する長さであるが、 C_k の偏角を ω とすると $(k-1)/n = \omega/\pi$ であり、しかも $\omega = 2\theta$ となる。したがって、 $r = \overline{OC_k} = R \sin \omega/2$ となる。他方、 $x = r \cos \omega$ 、 $y = r \sin \omega$ を用いて、 r, ω を消去すると、

$$x^2 + y^2 = R^2 \sin^2 \frac{\omega}{2} = R^2 \frac{1 - \cos \omega}{2}$$

となる。したがって、

$$\sqrt{x^2 + y^2} \{R^2 - 2(x^2 + y^2)\} = R^2 x$$

両辺を二乗して (13) を得る。

また、塔などのシルエットを与える曲線の作図例が第一書 28 図であるが、これが

$$\int_0^x \sqrt{1 + y^2} dx = k(y - \sqrt{c^2 - x^2})$$

の近似計算に他ならないことも特記されている。Peiffer が方程式を与えている曲線は、第一書では他に 38–39 図の

$$(xy + b^2 - y^2)^2 = (x + y - a)^2 (a^2 - y^2)$$

がある。さらに、40 図の曲線

$$(x^2 + y^2 - 8R^2 - r^2)^2 = 32R^2(rx + r^2 + 2R^2)$$

³²Dürer の葉型曲線 (folium) というらしい。

も挙げられている ($z = R e^{i\varphi} + r e^{2i\varphi}$ の軌跡である). この作図には相応の器具が工夫されている.

なお, 第一書 11-14 図は螺旋の描き方の説明である. 一種のフラクタル構造を明示的に利用しているのが, その過程に現れる曲線は装飾用の曲線としても通りそうである.

4.2 第二書

平面および曲面上の図形を扱っている. まず, 角について述べ, 正多角形の作図を論ずる. 第 11 図は正三角形から正七角形の近似を求める方法を示している. 古来から知られており, アラビア経由のものだが, 正七角形を生成するものではなく, 後年の **Kepler** の書物などで批判されているという. さらに, 正 14 角形, 正 15 角形などの近似 (11-19 図) も求めている³³.

第 20 図では, 角の 3 等分の近似解法³⁴を与えている. 任意の (中心角が平角より小さい) 円弧 $\widehat{AB}$ に対し, 弦 AB を点 C, D で 3 等分する. $AC = CD = DB$ である. 弧 $\widehat{AB}$ と, 中心が A で半径が AC の円周が交わる点を E , 中心が B で半径が DB の円周と交わる点を F とする. また, 点 C, D において弦 AB に立てた垂線が円弧 $\widehat{AB}$ と交わる点をそれぞれ G, H とする. 次に, 中心 A 半径 AG の円周および中心 B 半径 BH の円周が弦 AB と交わる点をそれぞれ I, K とする. そこで, 線分 CI, KD を 3 等分し, I に近い CI の 3 等分点を I' , K に近い KD の 3 等分点を K' とおく. 最後に, 中心 A 半径 AI' の円周および中心 B 半径 BK' の円周が円弧 $\widehat{AB}$ と交わる点をそれぞれ L, M とすると, L, M が円弧 $\widehat{AB}$ の近似 3 等分点になる.

なお, Dürer の手法を数学ソフト Maple³⁵ で追跡したものを付録に掲げる.

Dürer の作図法がどの程度の精度かを検討してみよう³⁶. 今, xy -平面で, (原点を中心とし, 半径 1 の円の) 中心角 $\Phi = 3\varphi$ ($0 < \Phi < \pi$) の円弧を $\widehat{AB}$ とする. 両端の点 A, B の座標は $(\mp \sin \frac{3}{2}\varphi, \cos \frac{3}{2}\varphi)$ である. また, 円弧 $\widehat{AB}$ は, 方程式

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad -\sin \frac{3}{2}\varphi < x < \sin \frac{3}{2}\varphi$$

で与えられる. 弦 AB の 3 等分点 C, D の x -座標は, $x = \mp \frac{1}{3} \sin \frac{3}{2}\varphi$ だから,

$$\overline{AG} = \overline{BH} = \sqrt{\frac{4}{3} + \frac{2}{3} \left(\cos \frac{3}{2}\varphi \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\cos \frac{3}{2}\varphi \right) \sqrt{8 + \left(\cos \frac{3}{2}\varphi \right)^2}} = \overline{KB} = \overline{AI}$$

となる. したがって, 点 I', K' の x -座標は $x = \mp \frac{7}{9} \sin \frac{3}{2}\varphi \pm \frac{2}{3} \overline{AG}$ となり,

$$\overline{AI'} = \overline{BK'} = \frac{2}{9} \sin \frac{3}{2}\varphi + \frac{2}{3} \overline{AG}$$

³³[3], p.205 注 130. なお, [3] 付録 6 で詳細な解説と誤差の評価が示されている.

³⁴Dürer は近似であることを承知していた. 伝承された「現場の知恵」らしく, 出典は明らかではないという ([3], p.80). 簡便かつ有効な方法であったのだろう. なお, 講演時には数式処理ソフト Maple によって Dürer の手順を追跡してお見せしたい.

³⁵Maple は Waterloo Maple Inc. の商標である.

³⁶[3], p.146 脚注 145 参照. いくつかの角についての度数法での結果しか書いてない. 多分, 以下のような考察を経ているはずである.

となる．点 L, M の x -座標 $x = \mp a$, $a = a(\varphi)$ は

$$a \sin \frac{3}{2}\varphi - \cos \frac{3}{2}\varphi \sqrt{1-a^2} = \frac{1}{2} \overline{AT}^2 - 1, \quad 0 < a < \sin \frac{3}{2}\varphi \quad (14)$$

を満たす³⁷．すなわち， $\widehat{MB}$ の弧長は

$$\int_{a(\varphi)}^{\sin \frac{3}{2}\varphi} \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} dx = \int_{a(\varphi)}^{\sin \frac{3}{2}\varphi} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{3}{2}\varphi - \arcsin a(\varphi)$$

だから，誤差は

$$\text{err}(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi - \arcsin a(\varphi) \quad (15)$$

となる．特に，

$$\text{err}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -0.0091993472 \text{ (ラディアン)}$$

である．誤差最大の半円周の場合でも，60 度を得るべきところ，59.5 ~ 60.5 度を得ることになる．「施工誤差」というようなものも考慮すると，この手法は非常に精確であると言える．

第二書では，引き続き，21 図から 28 図まで床，天井，壁の装飾にふさわしい多角形や円の繰り返し模様が示されており，図を見るだけでも楽しいかもしれない．特に円形の薔薇型装飾の構成では，角の三等分の技法が応用される．29 図から 34 図まで相似図形の描き方や与えられた三角形や長方形から等面積の正方形を求める手順などが示される．特に，近似解法であるが，与えられた正方形とほぼ等面積の円を求めている．すなわち，正方形の対角線の $\frac{2}{5}$ を半径とする円を描け，という．したがって，円周率 $\pi \doteq \frac{25}{8} = 3.125$ となる．

35 図は直角三角形についての三平方の定理の説明である．

第二書最後の 36 図は，2 個の円弧で囲まれたレンズ状の図形に内接する円の列である．装飾上有用であろうとの注意がある．

若干説明を加えよう． xy -平面内の半径 R ，中心 $O(a, 0)$ および $O'(-a, 0)$ の 2 個の円弧は， $R > a > 0$ ならば， x -軸に関して対称な y -軸上の点 $A(\sqrt{R^2 - a^2}, 0)$ ， $B(-\sqrt{R^2 - a^2}, 0)$ で交わる．この 2 弧で囲まれるレンズ状の領域内に， x -軸に関して対称に，2 個の円周 $C_1^\pm$ を弧と x -軸に接するように描く．引き続き，2 個の円周 $C_2^\pm$ を x -軸に関して対称に，それぞれ円周 $C_1^\pm$ と 2 弧とに接するように描く．原理的には，以下同様に，円周 $C_n^\pm$ を想定できる．円 $C_n^\pm$ の中心を $(0, \pm c_n)$ ，半径を r_n とすると，比較的簡単な計算により， $c_1 = r_1 = \frac{R^2 - a^2}{2R}$ ， $r_n + r_{n-1} = c_n - c_{n-1}$ ， $r_n = R - \sqrt{a^2 + c_n^2}$ がわかる．整理すれば， $s_0 = 0$ として， $n \geq 1$ のとき，補助パラメータ s_n を用いて

$$s_n = R - \frac{a^2}{R + s_{n-1}}, \quad c_n = \frac{1}{2}(s_n + s_{n-1}), \quad r_n = \frac{1}{2}(s_n - s_{n-1}) \quad (16)$$

となる³⁸．Dürer は $n = 1, 2, 3$ まで描いているが方法は示していない．和算の発想に馴染みそうなことではある（図 3 は Maple に拠る．）．

³⁷ 数式処理ソフト Maple で求めた $a(\varphi)$ の式を付録に掲げる． $a(\varphi)$ および誤差 $\text{err}(\varphi)$ のグラフも示す．

³⁸ これは Dürer と関係がない．ついでに少し計算してみただけである．

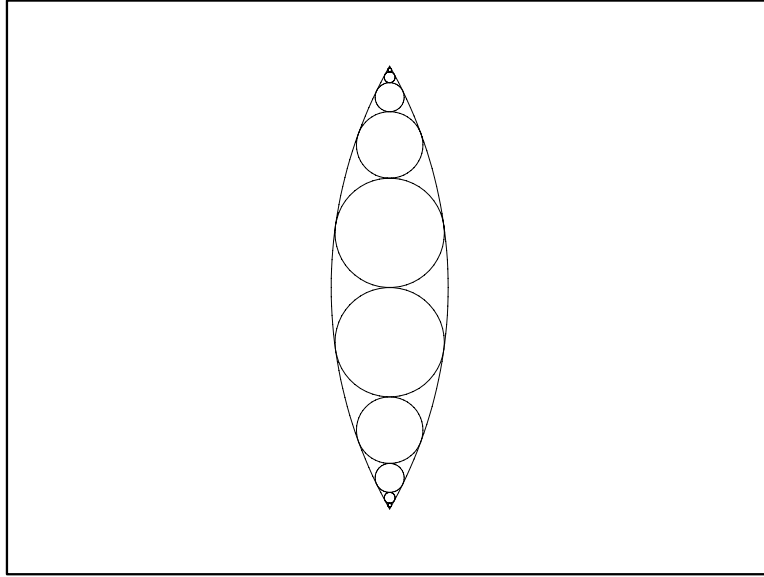


図 3: $n = 4$ の場合である．視覚的には n を余り大きくすることには意味がない．

4.3 第三書

第二書までの応用も兼ねて，立体，特に，各種の柱体や錘体を扱っている（1-14 図）．これらは建築や記念碑等の設営のためであって，基盤，柱体の石組み，柱頂の装飾，視覚効果などの考慮の跡が見える．力学的な考慮も当然されていたはずであると思われるが，図からはよくわからない．しかし，例えば，9-10 図の示すことは，円柱の横断面の直径は上に行くほど減少し，したがって，部分的な柱幹の大きさも配置箇所によって異なることである．柱部を構成する部分錐を適切に設計するための図面の描き方には相応の技術と原理があるということであろう．

15-17 図は，Luther の宗教改革（Wittenberg 1517）に伴ってのドイツ農民戦争（1524-1525）に関わる記念塔の図案である．Dürer 自身の宗教改革に対する複雑な立場ともあいまって，解釈のむずかしいところのようである³⁹．18-19 図は，鐘楼・灯台の設計に関するものである．

20-27 図は日時計の製作に関係している．Peiffer は [3] の注 273 (p.272) において，当時としては準拠せざるを得ない複雑な天動説天文学の原理についての Dürer の理解を判断することは困難であるとしている．

第三書の残部は，記念塔や建物の壁面に刻まれる碑文の字体に関するものである．28 図では，観覧者の仰角を考慮にいれた字の大きさについて述べている．以降には，番号は付していないが，ラテン字体とゴシック字体のアルファベット文字の形態，曲線部の描き方，パネルの割り当て方などの詳細が図を多用して示されており，さらに，これら字体の表が付されている．

³⁹[3], pp.28-30, に Peiffer による論点の整理とその見解が述べられている．

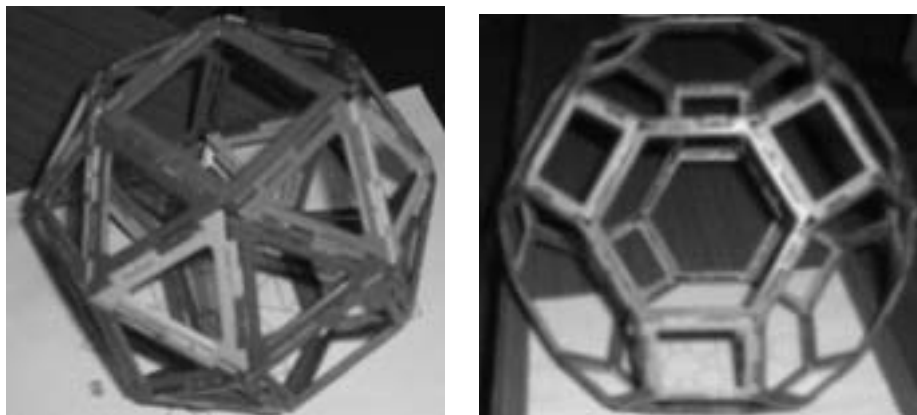


図 4: 40 図 (左), 41 図 (右) の立体模型 (一松信京大名誉教授作成)

4.4 第四書

図の番号は第三書の続きである。29–33 図は、**プラトンの多面体**，すなわち，正四面体，正八面体，正二十面体，立方体，正十二面体の展開図である。34 図は球面の展開図であり，さらに，球面上の緯線経線が示された図が付されている。これらの立体を組み合わせて美的効果が高められるという指摘も含まれている。

35–41 図は**アルキメデス多面体**の展開図である。35 図の八面体は Pappus の P_1 で正六角形 4 個正三角形 4 個に展開される。36–38 図は十四面体の展開図である。36 図は P_2 ，正八角形 6 個正三角形 8 個を面とし，37 図は P_2 ，正方形 6 個正三角形 8 個の面から成る。38 図は正六角形 8 個と正方形 6 個の面に展開されている。39 図は二十六面体 P_5 ，正方形 18 個正三角形 8 個に展開されている。40 図は P_{10} ，正方形 6 個と正三角形 32 個の面がある⁴⁰。41 図は P_6 ，展開図は正八角形 6 個，正六角形 8 個，正方形 12 個から成る。48 頂点 72 辺となる。

42 図はアルキメデス多面体ではない。正十二角形 6 個と三角形 32 個から成る展開図であるが，三角形のうち正三角形は 8 個，残りの 24 個は合同な二等辺三角形である。43 図の展開図は一行に正方形 6 個が並び，その上下に三角形が 6 個ずつ並ぶ。これらの三角形がすべて正方形だとすると，組上がった立体は六角柱を平行な面で切ったものになるためか，三角形は，高さが正方形の一辺の長さとも一致するものとしている。

44–51a 図は，与えられた立方体の倍積立方体の構成に関する。Dürer 曰く：この知識は職人には実際上の利益の多いことながら学者の間で秘術秘伝として伝承されてきた；そこで（庶民の言語である）ドイツ語でここに初めて公開するから注意して聞いておけ，と。ただし，[3] の関連する注によると，先行するドイツ語の文献があり，また，技術上の記述は Dürer 自身の手によるものではないらしいという。44 図で示しているのは，2 の 3 乗根を任意の間隔の目盛付きの定規を利用して（近似的に）求める方法である。Sporus によるものという ([3], p.324)。45–47 図で， n 倍積の場合を説明している。48 図では異なる

⁴⁰ 実際に，立体を作ってみないと実感が沸かない。図 4. Dürer は，38 面，60 辺，24 頂点から成ると言っている。もちろん， $38 - 60 + 24 = 2$ である。

方法を紹介し、49 図では奇数倍積を反復する場合の注意をしている。

さて、44–47 図の手法は次の通り. (xy -平面ならば) 中心 $C(0,0)$ 半径 n の半円周 $\widehat{EAD}$ を (上半平面内で) 考える. CA は半径, $\overline{CA} = n$, 直径 DE の両端の点 D, E の座標は $(\mp n, 0)$ である. CA 上に点 $B(0,1)$ をとる. 2 点 E, B を通る直線を ℓ とする. 次に, **目盛り付きの定規**を中央点の目盛位置が常に半径 CA 上に載り, かつ, 目盛面が常に D を通るという条件のもとで動かす. この定規と直線 ℓ との交点を G , (D 点以外の) 円弧 $\widehat{EAD}$ との交点を J , 半径 CA との交点を H とする. 定規を利用して $\overline{GH} = \overline{HJ}$ が満たされるように, 点 H を求めることができる. このとき, $\overline{CH} = \sqrt[3]{n^2}$ である. そこで, 直径が $AB + CH$ の半円周を描き, 直径上の点 B に立てた垂線がこの半円周と交わる点を K とすると, 求めるべき立方根は KH の長さ $\overline{KH} = \sqrt[3]{n}$ となる.

50 図では Platon に遡るという立方根の求め方が示されている. 長さ 1 の線分 BE と長さ n の線分 BG が点 B において直角をなすとする. このとき, EB, GB それぞれの延長上に点 C, D を, 三角形 GCD, CDE が**直角三角形**となるようにとる ($\angle C, \angle D$ がそれぞれの直角である). すると, BD の長さが求めるべき n の立方根 $\sqrt[3]{n}$ になる. 点 C, D の求め方が鍵であるが, Dürer はこの目的のために特殊な器具を示している.

51 図は Heron による解法であるが, Dürer 自身の手によるものではないという⁴¹. 概略は次の通り. 長方形 $ADGB$ において, 辺 DG は長さ 1, 辺 AD は n とする. 対角線 AG の中点を E とする. **定規を用いて** 点 B を通る直線を, DA, DG のそれぞれの延長上での交点 H, Z が点 E から等距離, $\overline{EH} = \overline{EZ}$ となるように引く. すると, HA の長さが n の立方根 $\overline{HA} = \sqrt[3]{n}$ となる. 特別な器具は要らないとあるが, E を中心とする円を描いて DA, DG の延長との交点を求め, この両者を結ぶ線分上に点 B が載るように調整するのは**目盛り付きの定規**とコンパスだけでは簡単ではあるまい.

以上 3 種の立方根の求め方のうちで実際に使われたのがいずれであったかは本書を見ていだけでは判断ができない ([3] にも注記されてはいないようだ).

なお, 続いて, 立方体に限らず, 立体の倍積が実用上重要なことを, 鑄造に際しての金属使用量を引き合いにして, 述べている (51a 図は立方体の場合の解法から球の場合の解法, つまり, 求めるべき半径が導かれるというヒント).

第四書の残部は, 既述の通り, 遠近法の解説に充てられている.

4.5 Dürer と遠近法 — 第四書後半

実は, Underweysung der messung では, この部分がもっともよく流布されているという ([3], p.95).

第四書第 52 図から 62 図までは, 遠近法の原理の説明である. 52 図は光源の斜め下にある台上の立方体を側面図と平面図からなる投影図で示したものである. 遠近法の構成要素として, 眼の位置, 対象物, 光源, 光線, 視線を挙げている. 以下, 53–55 図は, 対象と眼

⁴¹[3], p.332. 注 360. この部分が Underweysung で唯一証明が付されているところである. しかし, 記述は明晰ではない. 立方根を求める操作を提示し説明するという本来の目的が曖昧になっている. ゴーストライターの数学者が Dürer の意図をよく理解できなかったために, 肝心の技法を明確に述べることは関心が向かず, 場違いな証明への言及に執着した結果かも知れない. 1538 年の増補版では, 新たな図 ([3], p.332, 注 362, に再録) も補われてはいる.

および中間の透視面についての説明図である。56 図は、光源、物体、眼の位置関係を、側面図、平面図を並列させた投影図として表したものであり、平面図と側面図において、光線および視線を対応させて詳細に描いたものである。透視面は、水平線、すなわち、側面図と平面図の境界線に垂直な直線として表される。画家の眼の位置は高さ（垂直位置）が側面図に、水平面への射影の位置が平面図に記される。さらに、透視面を表す直線上に、側面図、平面図上の眼と同じ水平位置に、眼が記される。Dürer は「近い眼」と言っている。近い眼は、後に説明する簡便法で必要になるもので、この段階では書き込むには及ばないと思われる。引き続いて 57-58 図で、以上を模式的な立体図の形に表し、さらに、光源からの光による影を伴った立方体の図が描かれている。

ここまでは、原理的には、Brunelleschi の方法、あるいは Alberti のもとの提案に相当する⁴²。なお、Peiffer の解説 ([3], pp.99-100) によると、Dürer の記述には Piero della Francesca の強い影響がみられるというが、52 図に付された注 373 (p.337) の Piero の文章と、Dürer の説明文 (52-53 図のもの) とを比較すると、筆者の受けた印象では Dürer は画家の眼から透視面までの水平距離の量としての把握について明晰に述べていないように思われる。これは不思議なことである。実際、Underweysung は全体に实际的で、工作に関係する量は明確に述べられている。例外は、立方体の倍積に関する記述（特に、51 図）と遠近法の箇所だけのように思われる — フランス語訳 [3] の斜め読みで得た印象に過ぎないので、学術的には不真面目と捉えられても仕方がないところだが。

次に、Dürer は、簡便法として、Pelrin の改良に相当するものを述べる (59-62 図)。ここに、Dürer の重大な誤りがあり、これに基づいて描かれた図 (62 図) は明らかにおかしいと思われる。技法の本来の要点は、§3.3 図 2 で言えば、点 Q_1 （に相当するもの）を求めることである。透視面 P_1F から画家の眼 G までの水平距離が d であれば、中心消失点 L_∞ から d の距離にある距離点 D_∞ を利用し、 D_∞ と P_k を結ぶ線分と P_1 と L_∞ とを結ぶ線分との交点が Q_1 である。しかし、Dürer はここで混乱した。距離点や消失点の意味をはっきりとは把握できていなかったようである ([3], pp.106-113. [5], p.76)。

Dürer は、この手法は、対象が立方体に限らず、一般の立体でも通用すると述べ、補助器具の説明をし、さらに、実際に製作中の画家の様子を二枚の挿画⁴³として示している。1538 年の増補版では、器具の説明がさらに詳しくなり、挿画も補われている。

かくて⁴⁴、Dürer は、最高傑作とされる「メランコリア I」(1514) および「書斎の聖ヒエロニムス」(1514)⁴⁵は別にして、その膨大な作品の多くで遠近法が狂っているようである。

⁴² 図 2 (§3.3) における G が画家の眼の位置、直線 P_1F が透視面に相当する。この図は、床面の四辺形タイルの観測を前提としているが、考え方は変わらない。

⁴³ 例えば、[8], p.74 に Underweysung der messung (1538 年版) の該当するページが見開きで載っている。

⁴⁴ 実際は、Dürer の版画について、中心消失点、距離点、および対応する直交線 (orthogonal)、対角線 (diagonal)、横断線 (transversal) を書き込まれている研究報告の類を引用しなければいけないのだが、ここは、素人の浅ましさを、取りあえずは、[3] や [5] の注記を信じることにする。

⁴⁵ 図版は [8], pp.54-55 にある。なお、[6], pp. 136-141. [10], 第五章, pp.133-173. メランコリア I 画面左の立体はアルキメデス立体ではないようである。Underweysung (1525) には該当するものはない。また、背景の壁面に、4 次魔方陣

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

が刻まれている。Underweysung の文脈ではないが、この伝播次第についても論じる必要はあるだろう。

なお, Peiffer [3] によると, Dürer は既述の Alberti, Pelrin, Piero della Francesca の他に Leonardo da Vinci の遠近法理論も知っていたようだという. Dürer がもっとも頼ったのは Pomponio Gaurico の著書らしいという. Piero は, 正統作図法を, ユークリッドの「光学」に拠りながら理論化した人だそうである. 素人に過ぎない筆者は, なるほどとしか言いようがない.

Dürer は遠近法に関してなぜ混乱した記述をしてしまったのか. 恐らく Dürer だけの問題ではなく, かれに説明した人たちにも問題があったのだろう. 当時のイタリアには遠近法のおかしな作品も山ほどあったに違いない. しかし, 多少の不審ならば, 優れた実作者であった Dürer の経験で補えたのではないかとも思われる. やはり, 遠近法は, ただの技法というのに留まらず正しい運用のためには原理の理解が要求されるという難しいものであって, Dürer の受けてきた数学的訓練では原理の理解には到達できなかったということだろうか. それ以上に正しい遠近法を用いて制作された絵画作品による感動が大きかったのだろう.

A 付録. Dürer の角の三等分法

A.1 Dürer による角の三等分法

Dürer による角の三等分法を数式処理ソフト Maple の DuererTrisection という module の形にまとめたものを次に示す.

DuererTrisection は, 5 個の procedure から成る. myarc は, 指定された中心 C , 半径 R , 中心角 $\pi - 2\alpha$ の弧を描かせる procedure であり, この弧の左右の両端の点を与えるのが leftendpoint, rightendpoint という procedure であり, これらを利用して, 弧 myarc に張る弦を描かせる procedure が mychord である.

steps は, Dürer の角の三等分の操作を順次追跡して描かせる procedure である⁴⁶. まず, 三等分すべき角 $\arg$ を中心角とする弧とそれに張られた弦を描く (第 1 段⁴⁷). 図 5 は $\arg = \frac{7}{8}\pi$ として描いたものである.

次に, 弦の長さの 3 分の 1 を半径とし, 両端の点を中心とする円周と弧の交わりを描かせ (第 2 段⁴⁸. 図 6), さらに, 弦の三等分点に立てた垂線と弧との交わりを描かせる (第 3 段. 図 7). 弧の端点を中心とし, 垂線と弧との交点を通る円周と弦との交わりを描かせる (第 4 段. 図 8).

そこで, この円周と弦の交点と弦の三等分点とを結ぶ線分を $1:2$ に内分する点を通り, 弧の端点を中心とする円周が, 最初の弧と交わる点を求める (第 5 段. 図 9).

⁴⁶ 出力のコマンドは, 次の如し:

```
> mygraphs:=DuererTrisection:-steps(7/8*Pi):
> for n from 1 to 6 do display(mygraphs[n],scaling=constrained,axes=none) end do;
```

⁴⁷ $C = (0,0)$, $R = 10$ とし, $\alpha = (\pi - \arg)/2$ として myarc, mychord を適用する.

⁴⁸ この操作は実は不要である.

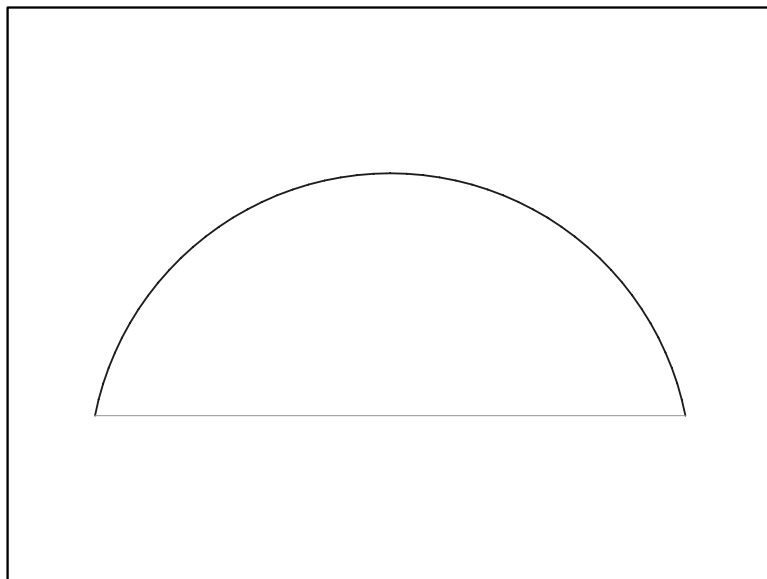


图 5: 第 1 段. 中心角 $\frac{7}{8}\pi$.

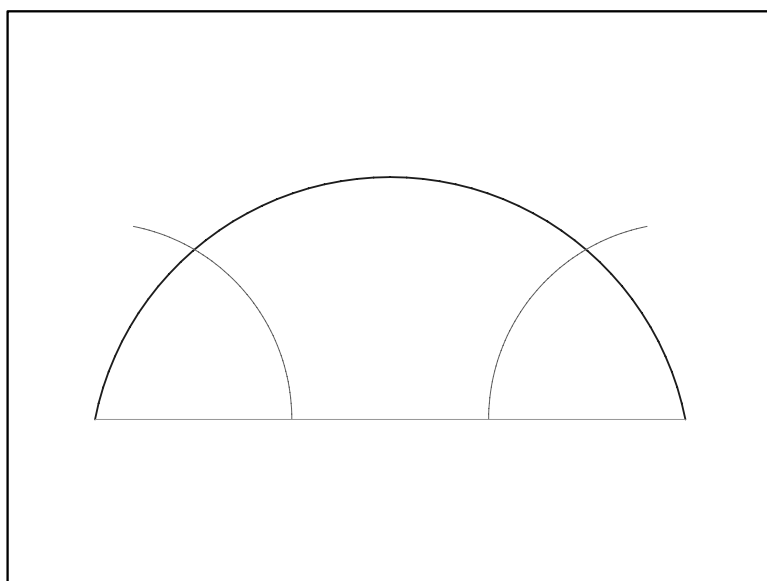


图 6: 第 2 段. 中心角 $\frac{7}{8}\pi$.

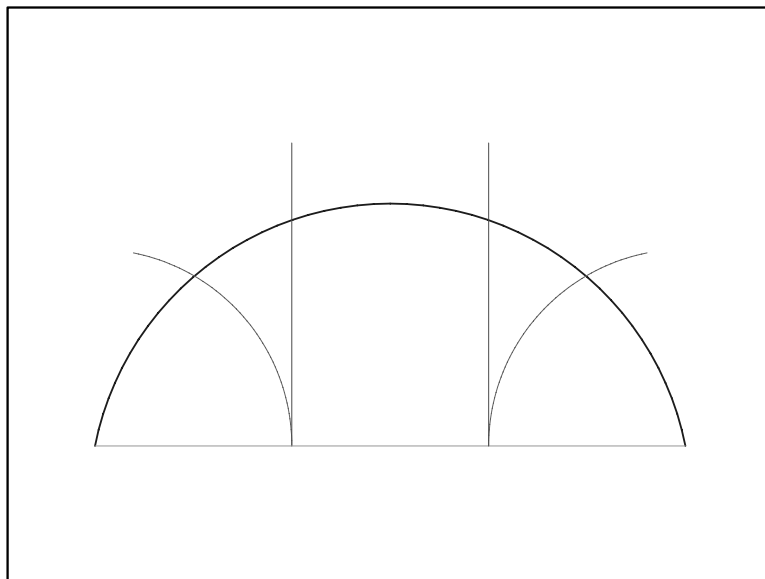


图 7: 第 3 段. 中心角 $\frac{7}{8}\pi$.

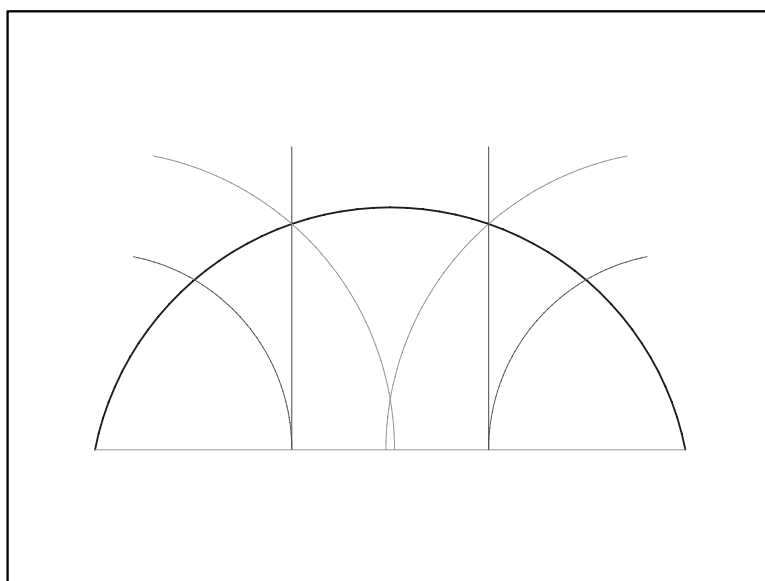


图 8: 第 4 段. 中心角 $\frac{7}{8}\pi$.

最後に、結果を実際の三等分線と比較する（第6段、図10）。今の場合、誤差は

$$\text{err}\left(\frac{7}{24}\pi\right) = -0.0036902720 \quad (\text{ラディアン})$$

である。

以下に、DuererTrisection のコードを示す。

```
> DuererTrisection:=module()

> export myarc, leftendpoint, rightendpoint, mychord, steps;

> myarc:=proc(C,R,alpha)
> plottools[arc](C,R,alpha..Pi-alpha,thickness=3,color=blue);
> end proc;

> leftendpoint:=proc(C,R,alpha)
> [C[1]+R*cos(alpha),C[2]+R*sin(alpha)];
> end proc;

> rightendpoint:=proc(C,R,alpha)
> [C[1]-R*cos(alpha),C[2]+R*sin(alpha)];
> end proc;

> mychord:=proc(C,R,alpha)
> local P, Q;
> P:=leftendpoint(C,R,alpha);
> Q:=rightendpoint(C,R,alpha);
> plottools[line](P,Q,thickness=2,color=green);
> end proc;

> steps:=proc(arg)
> local alpha, P, Q, r, X, Y, x, y, n;
> alpha:=(Pi-arg)/2;

> X[0]:=myarc([0,0],10,alpha);
> Y[0]:=mychord([0,0],10,alpha);
```

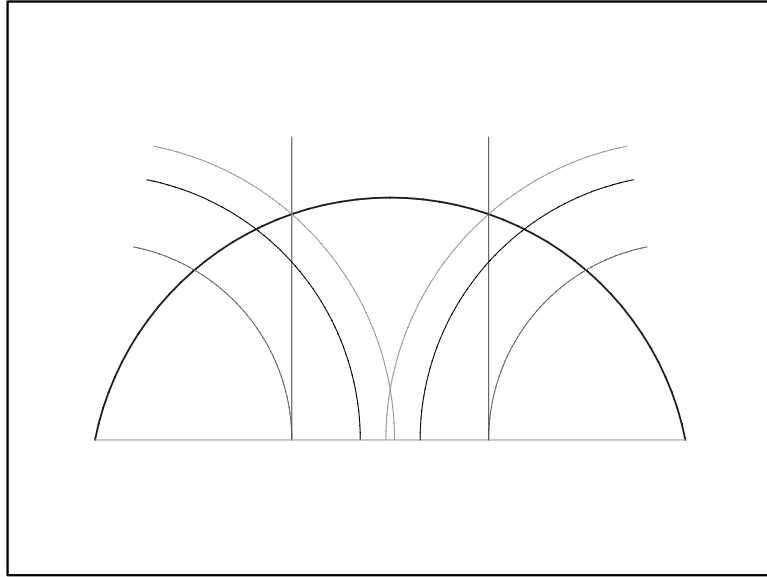


図 9: 第 5 段. 中心角 $\frac{7}{8}\pi$ の近似三等分角.

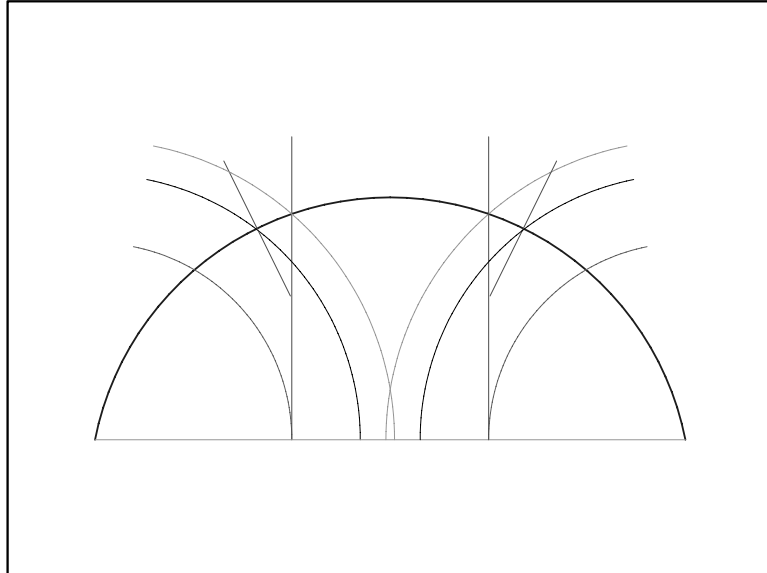


図 10: 第 6 段. 中心角 $\frac{7}{8}\pi$. 三等分線と近似三等分角.

```

> P[0]:=leftendpoint([0,0],10,alpha);
> Q[0]:=rightendpoint([0,0],10,alpha);

> r[1]:=2*10*cos(alpha)/3:

> X[1]:=plottools[arc](P[0],r[1],Pi/2+alpha..Pi,color=orange):
> Y[1]:=plottools[arc](Q[0],r[1],0..Pi/2-alpha,color=orange):

> P[1]:=[10*cos(alpha)/3,10*sin(alpha)];
> Q[1]:=[-10*cos(alpha)/3,10*sin(alpha)];

> r[2]:=5/4*(10-10*sin(alpha));

> P[2]:=[10*cos(alpha)/3,10*sin(alpha)+r[2]];
> Q[2]:=[-10*cos(alpha)/3,10*sin(alpha)+r[2]];

> X[2]:=plottools[line](P[1],P[2],color=maroon);
> Y[2]:=plottools[line](Q[1],Q[2],color=maroon);

> r[3]:=sqrt((2/3*10*cos(alpha))^2+
> (10*sqrt(1-1/9*(cos(alpha))^2)-10*sin(alpha))^2);

> X[3]:=plottools[arc](P[0],r[3],Pi/2+alpha..Pi,color=coral);
> Y[3]:=plottools[arc](Q[0],r[3],0..Pi/2-alpha,color=coral);

> r[4]:=sqrt((2/3*10*cos(alpha))^2+
> (10*sqrt(1-1/9*(cos(alpha))^2)-10*sin(alpha))^2);
> r[5]:=2/3*r[4]+2/9*10*cos(alpha);

> X[4]:=plottools[arc](P[0],r[5],Pi/2+alpha..Pi,color=black,
> thickness=2);
> Y[4]:=plottools[arc](Q[0],r[5],0..Pi/2-alpha,color=black,
> thickness=2);

> P[3]:=[3/4*10*cos(Pi/3+alpha/3),3/4*10*sin(Pi/3+alpha/3)];
> P[4]:=[5/4*10*cos(Pi/3+alpha/3),5/4*10*sin(Pi/3+alpha/3)];

```

```

> Q[3]:=[-3/4*10*cos(Pi/3+alpha/3),3/4*10*sin(Pi/3+alpha/3)];
> Q[4]:=[-5/4*10*cos(Pi/3+alpha/3),5/4*10*sin(Pi/3+alpha/3)];

> X[5]:=plottools[line](P[3],P[4],color=red);
> Y[5]:=plottools[line](Q[3],Q[4],color=red);

> seq({seq(X[x],x=0..n)} union {seq(Y[y],y=0..n)},n=0..5);

> end proc;

> end module;

```

```

DuererTrisection := module()
export myarc, leftendpoint, rightendpoint, mychord, steps;
end module

```

A.2 近似の精度

(14) の解 $a = a(\varphi)$ は次式で与えられる.

$$\begin{aligned}
 a(\varphi) = & \frac{55}{81} \sin \frac{3}{2} \varphi - \frac{10}{81} \sin \frac{3}{2} \varphi \left(\cos \frac{3}{2} \varphi \right)^2 + \frac{4}{27} \sin \frac{3}{2} \varphi \cos \frac{3}{2} \varphi \sqrt{\%1} \\
 & - \frac{4}{81} \sqrt{\%2} + \frac{4}{81} \left(\cos \frac{3}{2} \varphi \right)^2 \sqrt{\%2} - \frac{2}{81} \cos \frac{3}{2} \varphi \sqrt{\%3}
 \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
 \%1 &:= 8 + \left(\cos \frac{3}{2} \varphi \right)^2 \\
 \%2 &:= 12 + 6 \left(\cos \frac{3}{2} \varphi \right)^2 - 6 \cos \frac{3}{2} \varphi \sqrt{\%1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \%3 &:= 11 \left(\cos \frac{3}{2} \varphi \right)^2 + 836 + 110 \sin \frac{3}{2} \varphi \sqrt{\%2} \\
 &+ 24 \sin \frac{3}{2} \varphi \cos \frac{3}{2} \varphi \sqrt{\%2} \sqrt{\%1} + 36 \left(\cos \frac{3}{2} \varphi \right)^3 \sqrt{\%1} \\
 &- 306 \cos \frac{3}{2} \varphi \sqrt{\%1} - 20 \left(\cos \frac{3}{2} \varphi \right)^2 \sin \frac{3}{2} \varphi \sqrt{\%2} - 37 \left(\cos \frac{3}{2} \varphi \right)^4
 \end{aligned}$$

とする.

以上の計算では Maple を利用した. グラフは図 11 に掲げる.

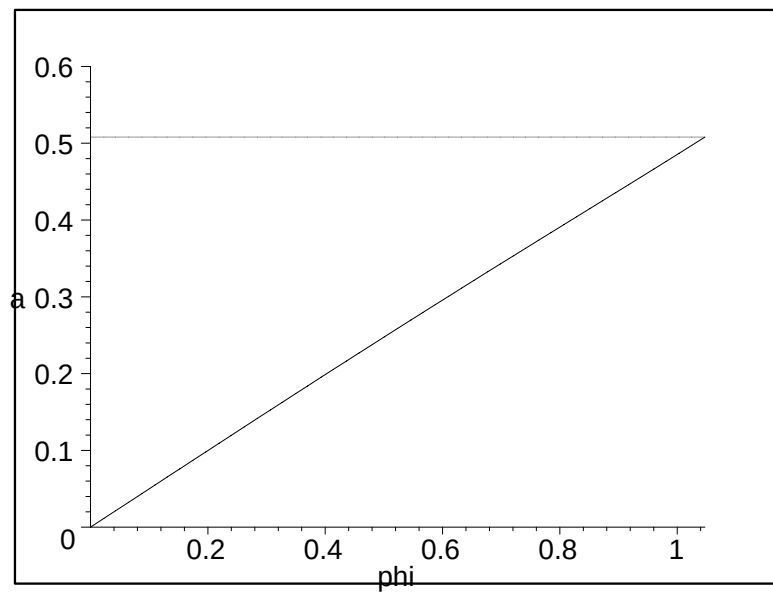


図 11: $a(\varphi)$ のグラフ

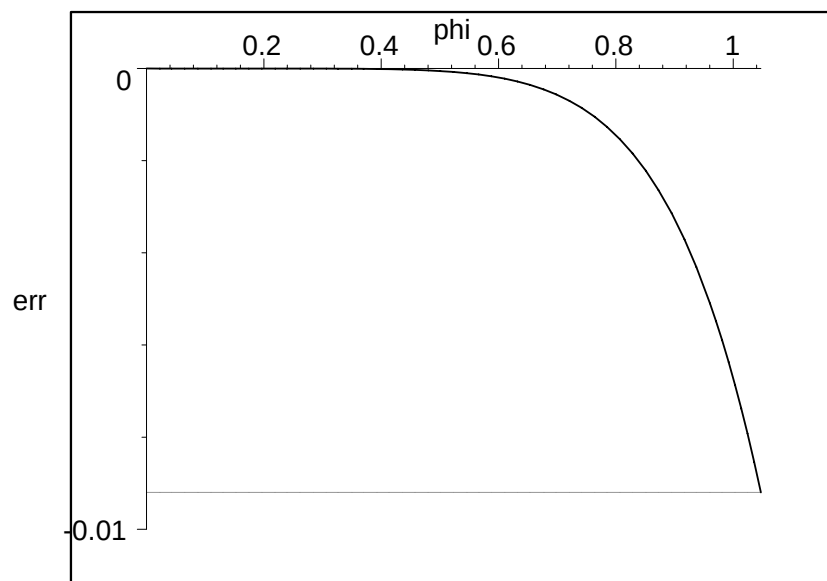


図 12: $\text{err}(\varphi)$ のグラフ

3 等分角の誤差

$$\text{err}(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi - \arcsin a(\varphi) \quad (15)$$

のグラフは図 12 の通りである.

参考文献



- [1] Leon Battista Alberti: 絵画論 (*Della pittura*). 中央公論美術出版 (1971) [訳: 三輪 福松]
- [2] 金沢美術工芸大学美術工芸研究所: 17 世紀フランス銅版画技法の研究. アブラハム・ボス「酸と硬軟のワニスによる銅凹版画技法」. (訳: 川上明孝・上田恒夫・保井亜弓・神谷佳男) 金沢美術工芸大学美術工芸研究所 (2004)
- [3] Albrecht Dürer: *Géométrie*. Présentation, Traduction de l'allemand et notes par Jeanne Peiffer. Sources du Savoir. Seuil (1995)
- [4] 福岡市美術館: 日本美術のなかの西洋 — 安土桃山・江戸のニューアート. (ユニバーシアード福岡大会開催記念特別展・図録). 福岡市美術館. (1995)
- [5] William M. Ivins, Jr.: *Art & geometry. A study in space intuitions*. Dover Publ. Inc. (1964) [Harvard University Press (1946)].
- [6] 前川誠郎: デューラー 人と作品. 講談社. (1990)
- [7] 前川誠郎 (訳・注): デューラーの手紙. 中央公論美術出版. (1999)
- [8] 前川誠郎: 前川誠郎のデューラー講義. 芸術新潮. **54** 巻 5 号 (2003), pp. 5-76.
- [9] NHK サービスセンター & シーボルト・カウンスル: 築造 350 周年 長崎・出島展 (図録). (1986)
- [10] Erwin Panofsky: *The Life and Art of Albrecht Dürer*. Princeton University Press, 1955. [アルブレヒト・デューラー — 生涯と芸術 — 中森義宗・清水忠: 訳. 日貿出版社. (1984)]
- [11] 下村耕史: デューラーの『測定法教則』. (1). 九州産業大学芸術学部研究報告. **31** (2000), pp. 57-73 ; (2). *ibid.* **32** (2001), pp.65-80 ; (3). *ibid.* **32** (2002), pp. 63-78 ; (4). *ibid.* **34** (2003), pp.55-71 ; (5). *ibid.* **35** (2004), pp. 53-70 ; (6). *ibid.* **36** (2005), pp.55-68.
- [12] William Thomson: On an Instrument for calculating $(\int \varphi(x)\psi(x)dx)$, the Integral of the Product of two Functions. Proc. Royal Society, **24** (1876), pp.266-268.
- [13] 辻茂: 遠近法の発見. 現代企画室. (1996)