微分積分学の基本定理についての私見

吉川　敦

フーリエは、無限小解析によって熱伝導の方程式を導出し、さらに、三角級数などによる級数展開、余弦変換などの積分変換の種々の関係式についても、無限小解析のアイデアに基づいて示している。少し時代が下がったウィリアム・トムソン（ケルヴィン卿）になると、漸近解析に現われる最大降下法をこの文脈で説明する。考えてみれば、今日でも、物理学者を始め、経済学者を含む応用数学者たちは、現象と数学の境界を無限小解析のアイデアで行ったり来たりしているようである。

無限小解析が織りなしている世界は常に更新されており、しかも、広大である。この意味で、無限小解析は、決して過去の遺物ではないはずだが、今日では、関心の対象としては脇にどけられ、今日でもなお有効な本来の価値に比して、何か、正当に扱われているようにも見えない。ここで、その名誉回復を図ろうというのではないが、一応の心覚えを用意しておく。

本稿は、もともとは準備中の書物「フーリエの数学」の付録としての、積分論諸定理の前説として用意しているものである。（多変数の）微分積分学は、フーリエの時代のものではなく、内容的には現代の水準を前提とするつもりでありながら、しかし、論述の姿勢は、現代の精確な知見を厳密に尊重することよりは、フーリエの本質的なアイデアと思われるものを読者と共有することを目指したいと考えており、技術的な扱いを軽視するわけではないが、直感的な記述に相当に依存することになるのは避けられない。補いとして、原理的な反省を籠めて、ここでは、無限小解析をどのように理解するか、そして、アイデアとしての微分積分学の基本定理とは何か、について説明したい[1]。

1　無限小解析について – なぜ日本では微分積分学が生まれなかったか

筆者は、歴史家ではなく、したがって、歴史資料に基づいての研究や考察の経験はない。数学史についても特段の見識があるわけではない[2]。だが、日本の解析学者の端くれとして、

[1]数学史的記述の試みではない。今日、標準的な積分論の教科書で、ラドン・ニコディムの定理として掲げられている、このアイデアの史的発展を著者はこう理解したいという言明である。

[2]これらについては、[3]、[4] を挙げておく。

なぜ、われわれの先祖たちは微分積分学[3]を生み出すことができなかったのか

という深刻な問いへの関心は持ち続けている。おおよその解答へのヒントとしては、認識についての我々固有の方式、つまり、古来からの我々固有のものの見方、捉え方、感じ方の、言わば、癖に拠るのだろうという、文化史的にも、哲学的にも、極めて茫漠としたものを得ているだけで、細かい議論などは、とても手の付けられる状態ではない。

さて、無限小解析の基礎には、この宇宙は一様等質な連続した空間（中心射影法・遠近法）で構成されているというアイデアがある。つまり、無限小解析の本質は、空間をいくらでも小さい微細な部分に細分することができ、その極限の無限小部分が、なお、空間の特質の一端を保持しているという想定にある[4]。この想定の前提が、空間の一様性、等質性、連続性に他ならない。まさに、この一様等質な連続した空間というアイデアの有無が彼我を分けたのではないかと思われる。

空間内の運動も、空間の特質を引き継いで、一様等質で連続であると想定すれば、いくらでも小さい微細な部分に細分し、極限の無限小部分がこの運動の特質の一端を保持していると考えるのは自然なことであろう。このことをしかるべき数学的な形式で定式化して表現した命題が微分積分学の基本定理というわけである。

一様等質な連続した空間は、南欧ルネッサンス、特に、アルベルティの正統作図法（[1]）によって確立したアイデアである。正統作図法の空間把握の原理は視覚的なものであり、これによって無限遠方から手前までの一様等質で連続した空間が明確に意識されるようになった（[2] 参照）。正統作図法の当初の基礎付けはユークリッドのオプティカが利用されたが、しかし、古典ギリシア人の空間把握の原理は本質的に筋肉接触感覚的なものであった。つまり、かれらにとって、空間は基本において個別的であり不連続なものであった。ゼノの逆理が示すように、古典ギリシア人には無限や運動のアイデアの把握は困難であった。しかし、その一方で、論理学は筋肉接触感覚に徹しない限り生まれなかったのではないかと思われる。

微分積分学は、しかし、数理技術でもあり、まさにそれゆえに、一様等質な連続した空間というアイデアだけで生まれるものではなかった。微分積分学の成立を導いた西欧圏における数理技術の発達の過程は、恐らく学問世界だけに注視していたのでは周到な理解はできないのではないだろうか[5]。そこ

[3]あるいは、さらに一般に、自然科学という知的体系

[4]無限小部分とは何か。古典ギリシア人は、点とは位置であって大きさのない存在であると言った。それでは、点は、空間なり平面なりの無限小部分なのかというと、そうではないようである。無限小部分とは、幾何学的（あるいは、科学的）対象について、その対象の本質あるいは特性を体現する理念上の最小単位であり、大きさのアイデアがあり、しかし、その大きさの量は 0 であるというものではないか。無限小部分自体には、位置に相当するアイデアは含まれていないのではないか。つまり、一様性や等質性が反映しているのである。

[5]例えば、画家ピエロ・デラ・フランチェスカやアルブレヒト・デューラーも、ケプラーやガリレオに影響を及ぼしたという意味で、微分積分学への道程に関わっていた。このような前駆的

には、都市があり、社会があり、宗教があり、歴史があった。また、敢えて言えば、地政学的な要素もあったのであろう。こう考えると、微分積分学の成立は必然か、つまり、西欧圏以外でも、遅かれ早かれ、到達しうるものであったろうかと問われたら、否と答えざるを得ないのではないか。しかし、微分積分学は、アイデアの根源はともかく、出来上がってしまえば汎用技術でもあり、それゆえに、成立した後では世界中に拡散するのは当然の成り行きであった。

いずれにせよ、フーリエによって、空間は一様で等質な連続したものから、さらに、各点で振動しているものとして認識されるようになった。

2　粗筋としての微分積分学の基本定理

§1 において、微分積分学の基本定理を日常言語で説明することを試みた。ここでは、まず、数学的と見紛うような（したがって、数学ではないが、しかし）、記号を多用し、記号がある意味で本質的な役割を果たす説明を与えよう。

E を空間とする。E は点 e の集まりであるが、E が一様等質な空間という意味は、（どんな方式で）E を細分化するにせよ、E の異なる 2 点 e、e' を含む細分化の極限（つまり、e、e' における無限小部分）dE_e、$dE_{e'}$ は、それ自体は本質的に区別できないものになるということであり、したがって、

$$dE_e = dE_{e'} = dE, \quad e, e' \in E, \quad e \neq e',$$

のような記号上の表現ができることになる。他方、空間の連続性の意味は、E の各点 e において、e を含む E の「無限に小さくなるような部分 ‘ 空間 ’ の列」 $\Delta E_e, \Delta' E_e, \Delta'' E_e, \cdots$ に対し、その列の極限となる無限小部分 (空間) dE_e が、なお、空間 E の特質を維持するということになる。ここで、各部分 ‘ 空間 ’ ΔE_e の「大きさ」$|\Delta E_e|$ が定義できて、それに基づいて、部分 ‘ 空間 ’ が無限に小さくなる、つまり、「大きさ」が 0 に収束するような、そういう部分 ‘空間 ’ 列の極限として「大きさ」 0 に相当するものを dE_e と表すのである。したがって、dE_e は「大きさ」は 0 （$|dE_e| = 0$）であって、空間 E の点 e における特質だけを代表しているものということになる。

一様等質で連続な空間 E において生起する現象などを表現するある性質に対応する量 $\mathscr{P}$ が E 上に定義されているとする。この性質の量 $\mathscr{P}$ が、E において一様で等質ということを、E の任意の部分 ‘ 空間 ’ ΔE においても $\mathscr{P}$ が意味を持つことと理解できるとしよう。ΔE における $\mathscr{P}$ を $\mathscr{P}_{\Delta E}$ と表すならば、このとき、E の点 e に対し、e を含み、無限小部分 dE_e を極限とするような E の無限に小さくなる部分 ‘ 空間 ’ の列 $\Delta E, \Delta' E, \Delta'' E, \cdots$ に

部分は日本にあったろうか。事実の確認に関心はあるが、何らかの価値判断を伴う議論を試みようというわけではない。なお、[5] 参照。

対しても性質の量の列 $\mathscr{P}_{\Delta E}, \mathscr{P}_{\Delta' E}, \mathscr{P}_{\Delta'' E}, \cdots$ が意味を持つはずである。性質の量 $\mathscr{P}$ の連続性とは、E の各点 e におけるこの性質の量の列の極限として、dE_e における $\mathscr{P}$ の特質、むしろ、本質を露呈させるべき無限小部分 $\mathscr{P}_{dE_e}$ が存在することであるとするのは自然な発想だろう。記法の上では、$d\mathscr{P}_e = \mathscr{P}_{dE_e}$ と略記しよう。しかし、$\mathscr{P}$ の一様性や等質性と E のものとの関係が任意であっては考察の手掛かりにならないのだから、E を参照するときは、点 e ごとの係数というべき量 $p(e)$ の介在：

$$d\mathscr{P}_e = p(e)\, dE_e = p(e)\, dE$$

が成り立つ程度に、E に対して近しい $\mathscr{P}$ に考察を限定することは許されるだろう。実際、技術的には、各点 $e \in E$ における係数量 $p(e)$ が求められない限り、実質的な議論は成立しない[6]。さらに、性質の量 $\mathscr{P}$ の無限小部分 $d\mathscr{P}_e$ は、なお、$\mathscr{P}$ の特質を維持していて、したがって、$d\mathscr{P}_e$ を総合することによって、性質の量 $\mathscr{P}$ を再現することができるとするのである。このことを

$$\mathscr{P} = \int_E d\mathscr{P}_e = \int_E p(e)\, dE$$

あるいは、むしろ、E の任意の部分（空間）ΔE に対して、

$$\mathscr{P}_{\Delta E} = \int_{\Delta E} p(e)\, dE$$

と表してもよいだろう。

以上が、粗筋として、微分積分学の基本定理に通ずるはずの指導原理を示したものである。一様性、等質性、連続性も鍵となる概念のように見えるが、標語というべきものである。具体的な例の蓄積を通じて、内容が数学的に明確化され精緻化されて、さらに改めて抽象化されて、今日、「微分積分学の基本定理」と呼ばれる体系に成長したのである。

3　高校教科書の基本定理との違い – 若干の例

以上の粗筋は高校教科書の微分積分学の基本定理とは様相を異にしているところがある。対応する例を挙げておく。

例 3.1　$E = [a, b]$ を直線上の閉区間とする（$a < b$）。E の点を e で表す（$a < e < b$）。E の一様性、等質性、連続性は、E が直線上の区間であるということに尽きる。f を E 上の関数とし、f の値の差を論ずることを E に

[6] 要するに、技術的には、$e \in \Delta E$ である部分 ‘空間’ の列について

$$\frac{\mathscr{P}_{\Delta E}}{|\Delta E|} \to p(e), \quad |\Delta E| \to 0, \quad e \in \Delta E,$$

の形で、つまり、$p(e)$ が $\mathscr{P}$ の e における微分係数量（というべきもの）として求められることが期待される。

おいて考慮する $\mathscr{P}$ と考える。特に、$\mathscr{P}$ は $\{f(b)-f(a)\}$ であり、E の部分（区間） $\Delta=[a',b']$ （$a<a'<b'<b$）に対しては、「大きさ」$|\Delta|=b'-a'$（長さ）とし、一方、$\mathscr{P}_\Delta=\{f(b')-f(a')\}$ とする。$\mathscr{P}$ の一様性、等質性、連続性については、関数 f が区間 E 上の連続関数に留まらず、なめらかな関数であることが前提になる。このとき、（連続な）導関数 f' があるので、

$$d\mathscr{P}_e=df_e=f'(e)\,dE_e=f'(e)\,dE$$

と表され、しかも、$a<a'<b'<b$ に対して

$$f(b')-f(a')=\int_{a'}^{b'}f'(e)\,dE$$

が成り立つ[7]。

通例、高校の教科書では、微分積分学の基本定理は、

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x),\quad a<x<b,$$

と表される。しかし、これは自明であり、さらに、グリーン・ストークスの定理やガウス・オストラグラツキーの定理を含む高次元の微分積分学の基本定理の示唆を与えない[8]。

もう一例挙げておこう。

例 3.2 簡単のために、空間 E として、直交平面[9]内の長方形で辺が直交軸に平行なものを考え、E の部分‘空間’としても、辺が直交軸に平行な長方形となるものだけに限定しよう。E の一様性、等質性、連続性は、直交平面の相当する性質を引き継ぐものであり、したがって、$e\in E$ における無限小部分は $dE_e=dxdy$ である。$\mathscr{P}$ としては、E におけるなめらかなベクトル場 $\mathbf{v}(x,y)=(X(x,y),Y(x,e))$ （(x,y) は $e\in E$ の直交座標）の挙動を問題としたい。$\square=\{(x,y);a\le x\le a+\xi,\,b\le y\le b+\eta\}$ を E の部分‘空間’、その「大きさ」（面積）$|\square|=\xi\eta$ とし、

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_\square=\int_a^{a+\xi}Y(x,b)dx-\int_a^{a+\xi}Y(x,b+\eta)dx\\+\int_b^{b+\eta}X(a,y)dy-\int_b^{b+\eta}X(a+\xi,y)dy\end{aligned}$$

[7] f として、 E 上の恒等関数 $x:E\ni e\mapsto e\in E$ をとると、$e=x(e)$ だから、$x'(e)=1$ であり、$dx_e=dE_e=dE$ となる。e を x と書き、dE を dx と書いてよいわけである。

[8] つまり、1 変数の場合に積分演算が微分演算の逆演算であるという命題と、微分積分学の基本定理とは、理念としては、分離しなければいけないのである。

[9] xy-平面とし、直交軸が x-、y-軸である xy-平面とする。

とする[10]。$\mathscr{P}_\Box$ は、□ の周に沿ってベクトル場 $\mathbf{v}$ の直交成分を積分したもので、$\mathbf{v}$ が □ にもたらした収支の効果を表していると考えられる。$\mathscr{P}$ の一様性、等質性は、$\mathscr{P}_\Box$ が任意の □ に対して定義できることを意味し、このためには、ベクトル場 $\mathbf{v}$ は連続であれば十分だが、さらに、そのなめらかさが $\mathscr{P}$ の連続性を担保している。実際、

$$d\mathscr{P}_e = -\left(\frac{\partial}{\partial x}X(x,y) + \frac{\partial}{\partial y}Y(x,y)\right)dxdy$$

かつ

$$\mathscr{P}_\Box = -\int_\Box \left(\frac{\partial}{\partial x}X(x,y) + \frac{\partial}{\partial y}Y(x,y)\right)dxdy \tag{2}$$

となる。

参考文献

[1] レオン・バッティスタ・アルベルティ. 絵画論. （中央公論美術出版) 1971.

[2] William M. Ivins, Jr. Art & Geometry. Dover 1964, (Harvard Univ. Press 1946)

[3] 佐々木力：数学史入門　微分積分学の成立．ちくま学芸文庫．2005.

[4] 高瀬正仁:無限解析のはじまり　わたしのオイラー．ちくま学芸文庫．2009.

[5] 山本義隆：一六世紀文化革命，**1**，**2**，みすず書房．2007.

[10] 数学的概念としては、線積分のアイデアを用いるべきところである。$\partial\Box$ で □ の周を表そう。この周全体を □ の内部を左側に見て、つまり、反時計回りに進むように、パラメータ t ：

$$t = \begin{cases} x-a, & a \le x \le a+\xi,\ y=b \\ y-b+\xi, & x=a+\xi,\ b \le y \le b+\eta, \\ a+\xi-x+\xi+\eta, & a \le x \le x+\xi,\ y=b+\eta \\ b+\eta-y+2\xi+\eta, & x=a,\ b \le y \le b+\eta \end{cases}$$

を導入する（$0 \le t \le 2\xi+2\eta$)。この式から、$\partial\Box$ の各辺を x, y を t の関数として表現できる：$x=x(t)$, $y=y(t)$。$x(t)$, $y(t)$ は t の区分的に微分可能な関数でもある。すると、

$$\mathscr{P}_\Box = \int_0^{2\xi+2\eta} \{Y(x(t),y(t))x'(t) - X(x(t),y(t))y'(t)\}\,dt$$

となっていることがわかる。$dx = x'(t)\,dt$, $dy = y'(t)\,dt$ を念頭に、この積分は、線積分として、

$$\mathscr{P}_\Box = \int_{\partial\Box} Y(x,y)\,dx - X(x,y)\,dy \tag{1}$$

と書かれる。□ が長方形のとき、(2) は自明に近いが、(1) の洞察を加えると、□ が（例えば）区分的になめらかな閉曲線で囲まれた平面領域の場合にも成立することが示されるのである。

索 引