

微分積分を中学生にわかるように 説明せよ.

北海道大学理学部数学科期末考査(約半世紀前・雨宮一郎先生出題)の問題とか.

第41回『男く祭』協賛・体験授業

吉 川 敦

(平成23年4月29日)

- **概要**: 本授業では,
頭の回転が速く, 生意気で鼻持ちならない,
そういう中学生(?)に向けて 微分積分学の**基本原理** を
説明しようと試みる.
- **ポイント**: 微積分の精髓を**言葉だけで(中心に)**
どこまで述べきれるかということである
- **参考**: 雨宮一郎, 微積分への道, 岩波書店.
吉田耕作, 私の微分積分法 解析入門, 講談社.
(雨宮先生のは最近復刻されたが, 吉田先生のは
非常によい本なのだが, 絶版のままだと思う.)

畑村洋太郎, 直観でわかる微分積分, 岩波書店
志村五郎, 数学をいかに使うか, ちくま学芸文庫

0. お断り

微分積分に関しては、1) **理念的な内容** と 2) **技術的な部分** とがある。

理念的な内容については、基本的に、言葉だけで述べることができる。
技術的な部分に関しては、しかし、それにふさわしい記述法、つまり、数式やその変形法に即したものを、利用しなければならない。

この授業では、**技術的な詳細にはほとんど踏み込まないつもり** である。
しかし、**全くなしでは済まないところがあるので、多少は数式を表に出す** が、**イラストに近い符牒としてしか扱わない**。つまり、**数式の意味や変形の詳細については気にしないでよい**。式が出てきたら、今は、そういうものだとして眺めるだけでよい。将来、必要となるだろうが、そのときは全く別のことである。

なお、最近、微積分の復習書や易しいと銘打った書物が多数出版されている。
これらの内容は、微分積分の技術的な部分について、特に、その初歩的な利用法を、要領よく説明し、使い方に習熟させようとするものである。

しかし、この授業の趣旨は、**微分積分の理念** の解説を試みることであり、**使い方の解説はしない**。

1. 微分積分というアイデア(理念)について

アイデアの基本:

どのような複雑なものも単純な(すなわち, 標準化された)微細因子の集積として得られる (という経験である).

ニュートンの微分積分学 (18世紀前半)

微分積分学は, 数学的対象について, 標準化された微細因子への分解法(微分法)と 標準化された微細因子からの集積法(積分法)を与えた(技術的内容の本質).

数式で把握することは技術的には必須な要請である.

言語化することは 概念そのものの拡がり を体感するために, 絶対不可欠である.
(概念の正確な運用や拡張・一般化の前提になる).

このようなアイデア:

「どのような複雑なものであっても微細因子の集積として得られるのである」
という実例が数学以外の場面で見られるだろうか?

原子論? 多分. しかし, 原子論では, あるところ(つまり, 原子)までしか細かくはできないとしている. どんな複雑なものでも「大きさ」がある. 原子も皆同じ形であり, 極めて小さいとしてもやはり「大きさ」がある. したがって,

$$\frac{\text{(ものの大きさ)}}{\text{(原子の大きさ)}} = \text{有限の数} \text{ (ものすごく大きいかも知れないが)}$$

である.

実は, 微分積分のアイデアは,

どんな複雑なものも, 「大きさ」はなくなるが「何か」が残るところまで細分できるとするのである. この「何か」に仮に「微分因子」という名前をつけよう.

微分因子には大きさがないから, どのようなものにも微分因子は“無限個”含まれていることになる. そして, 「微分因子」を“無限個”集めると, もとのものは復元できるというわけである.

数の扱いは難しい。

実際、われわれが自在に扱えるのは “小さな数” だけである。

最近でこそ、高速大容量電算機の発達で、“**ものすごく大きい数**” を何とか扱えるようになった。

しかし、“**どんなに大きな数**” でも自由に扱えるというわけではない。
そんなことはそもそも原理的に不可能なのである。

意外なことに、

“どんなに大きな数” などというものよりも “**無限**” の方が扱いやすい場合がある。

しかも、幸いなことに、われわれにとって重要な場合にそうになっている。

重要な場合の例： ものごとの変化や変動の扱い (把握・理解・管理・・・)

つまり、こういう場合は何か法則があって、変化・変動が全く無関係なことが次々と起きているということではないはずだ。

その法則が何であるかはわからなくても、ものごとの変化や変動には **一種のなめらかなつながりが隠れている** と考えて対応できるのだ！

(そう考えないと対応できないのだ！？)： 言い換えると、

こういう場合には

「どのような **複雑なもの** であっても **微細因子の集積** として得られるのである」

重要な場合の例： ものごとの変化や変動の扱い(把握・理解・管理・・・)

1. 例えば, ある地点での一日の温度変化.

すべての時刻で測っているわけではないがなめらかに変化していると信じられる.

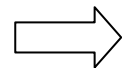
2. ある地点での風の強さや向き. これはしょっちゅう変わってはいるが, まったく滅茶苦茶ではない(だろう, 多分 ----- 実は, これは若干難しい例).

3. ある日の三条大橋の真下を流れる加茂川の流れ: 後白河法皇の思い通りにはならなくても, 川の流れ自体の予測はそれなりにできるだろう.

何か特徴的な量(一つとは限らない)の変動や変化の様子が(幾何学的に言えば)曲線(の組み合わせ)で表される.

うまく整理できると, 数式で表せる:---

特徴的な量の変化・変動を(時間や距離などの)変化の基準参照量と対応させることができる.

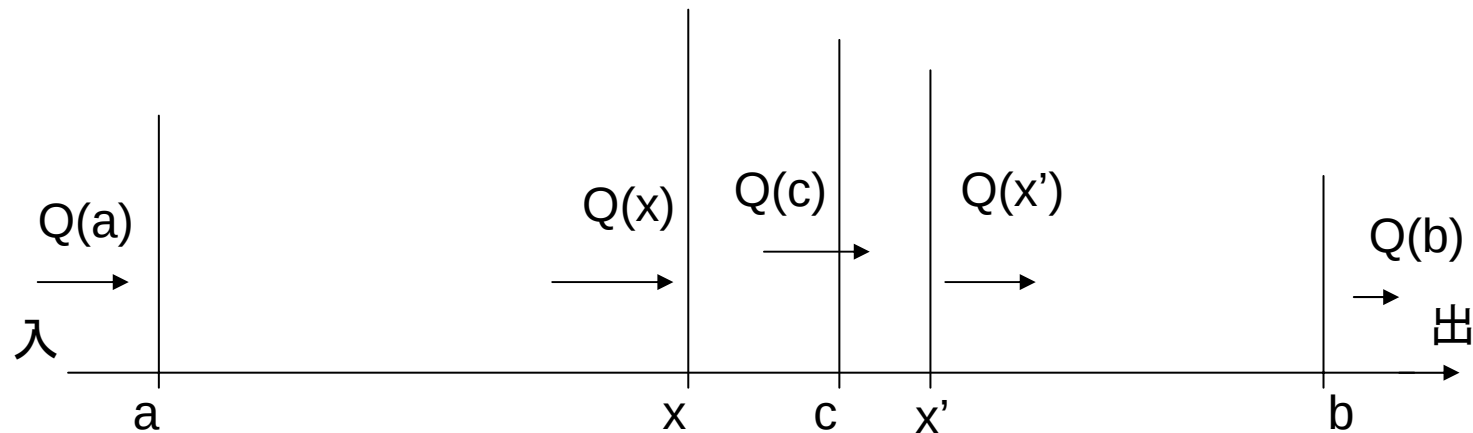


グラフ, 関数, 独立変数, 従属変数, ..., 座標, ...

2. 若干の技術的考察(数式) $\Longrightarrow$ 微分積分学の基本定理

一定方向に(何かの)量 Q が“流れている”とする(1次元の場合).

区間 a, b の範囲にある Q の全量 $= Q(a) - Q(b)$

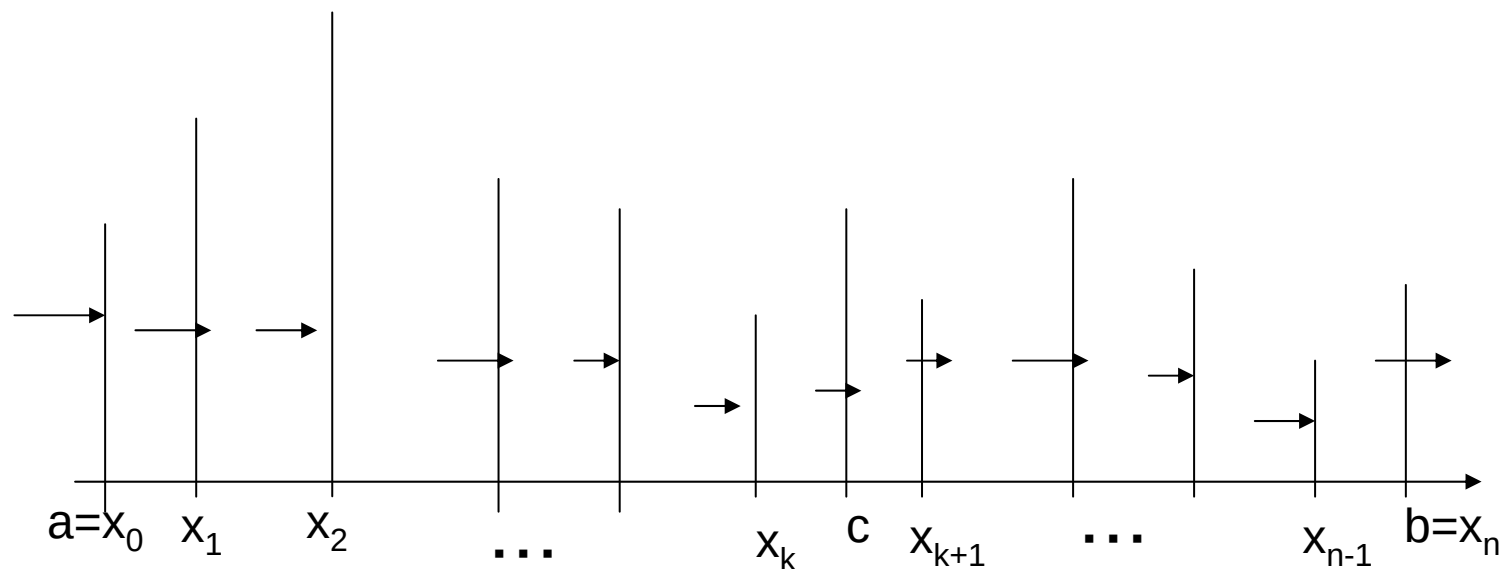


区間 x, x' の範囲にある Q の全量 $= Q(x) - Q(x')$

問題: 点 c にある Q の“全量”とは? (意味が付けられるとしても 象徴的 か)
一点 c に働いている“量”とはそもそも何なのか?

区間 a, b を細分する: 小さな区間に分割する (n 個の区間に分割する).

区間 a, b の量 Q の全量 = 区間ごとの量 Q の全量を加え合わせた和



$$Q(a)-Q(b) = [Q(x_1)-Q(x_0)]+ \cdots +[Q(x_k)-Q(x_{k+1})]+ \cdots +[Q(x_{n-1})-Q(x_n)]$$

n 個の項の和

細分：（細分が細くなる $\iff$ 区間の個数 n が増える）

区間 a, b の分割 $a=x_0, x_1, \dots, x_k, c, x_{k+1}, \dots, x_{n-1}, x_n=b$

区間 a, b 内の点 c に対し, c を含む区間 x_k, x_{k+1} がある(番号 k がある)

区間の個数 n が大きくなると, 最大の小区間の長さも小さくなる
(等分なら n 分の 1)

特に, $x_k \leq c \leq x_{k+1}$, 区間の長さ $x_{k+1}-x_k$ はとても小さい.
当然, $c-x_k, x_{k+1}-c$ もとても小さい.

Q が「よい」量, なめらかに変動する量 $\implies Q(x_k), Q(x_{k+1}), Q(c)$ はとても近い値

$$Q(x_k)-Q(x_{k+1}) = \frac{Q(x_k) - Q(x_{k+1})}{x_k - x_{k+1}} (x_k - x_{k+1})$$

Q が「よい」(なめらかな)量るとき, 細分が限りなく細かくなって
点 c を含む区間 x_k, x_{k+1} の端点 x_k, x_{k+1} が点 c に近づき,

商
$$\frac{Q(x_k) - Q(x_{k+1})}{x_k - x_{k+1}}$$

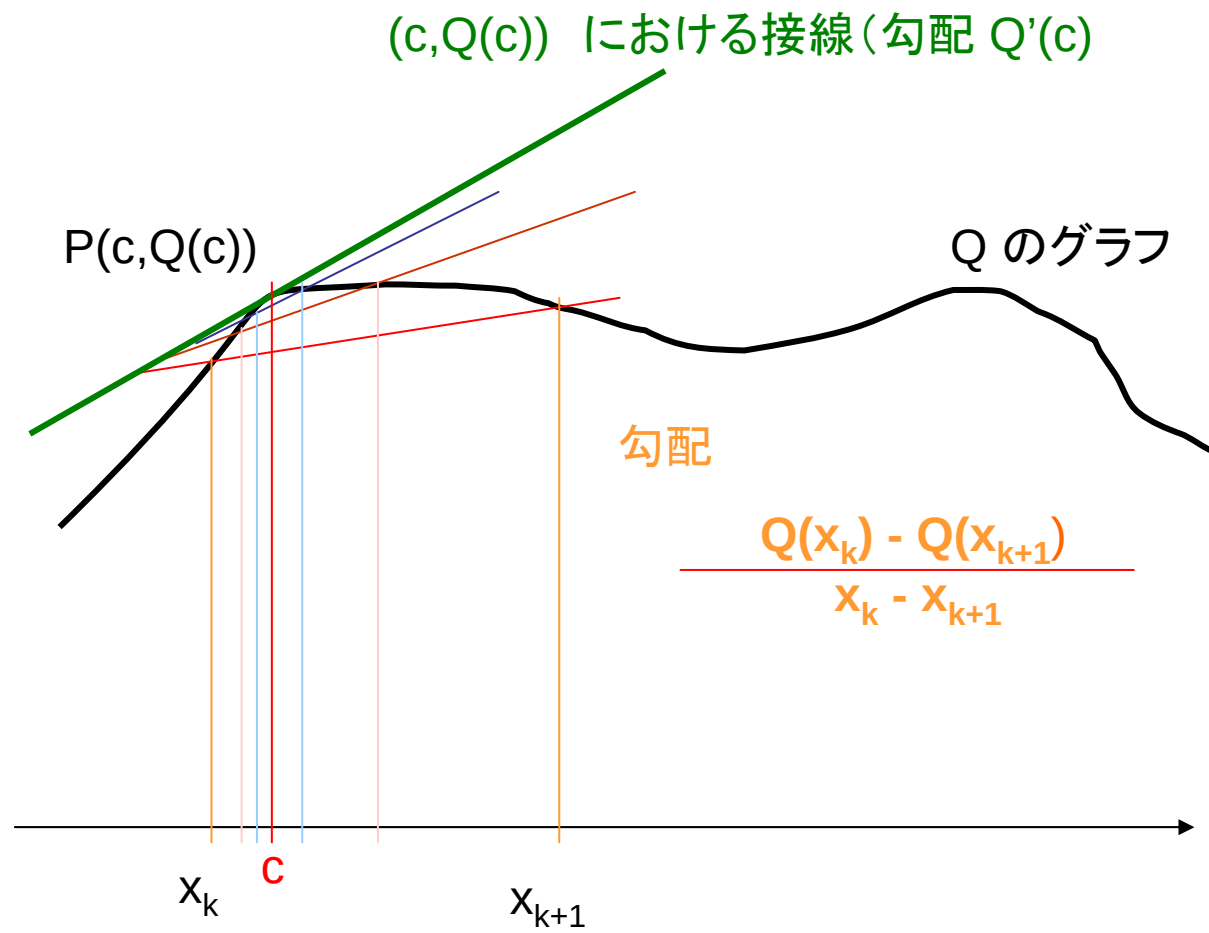
が何か**意味のある量**に限りなく近づく.

意味のある量に幾何学的な解釈ができる場合がある:

Q(x) のグラフが考えられるとき **赤字の商**は 割線(弦)の勾配
意味のある量は, したがって, 接線の勾配となる (次のスライド)

グラフが考えられなくても, 赤字の商が限りなく近づく**意味のある量**は定義できる.

意味のある量にとりあえず名前を付ける: c における微分係数 $Q'(c)$



問題： 点 c にある Q の “全量” とは ？ (意味が付けられるとしても 象徴的 か)

点 c : 幅がない, しかし, $c-c=0$ とせず, “履歴”を残したい.

$$x_k \rightarrow c, x_{k+1} \rightarrow c \quad (\text{限りなく近づく})$$

特に, $Q(x)=x$ の場合の区間 x_k, x_{k+1} における “全量” $= x_k - x_{k+1}$

一方, 微分係数は, どこでも 1 になる.

ここは動的に考えているとして, 約束するしかない. 分割を限りなく細かくする.
つまり, 無限個の区間を得, しかも, 各区間の長さは “0” !

点 c を含む区間を $c, c+dx$ と書く. “ dx ” には長さはないが, 履歴はある.

特に, $Q(x)=x$ の場合の点 c における “全量” $= c - (c+dx) = -dx$ となる

dx : 無限小量 (記号と考える)

一般のなめらかな量 Q の場合, 点 c における “全量” ($Q(c)-Q(c+dx)=-dQ$) は

$$-dQ = Q'(c) (-dx) = -Q'(c) dx$$

と表されることになる (dQ_c および dx_c と書いた方が c との関係がはっきりする)

点 c とする代りに, 点 x では $-dQ = -Q'(x) dx$ が “全量” である.

そこで,

$Q(a)-Q(b)$ は $-Q'(x) dx$ を $x=a$ から $x=b$ まで“足し合わせた”もの

ここで, 重要なのは, 具体的にどう足し合わせるかは, 項数が無限であっても, 先に, 足した結果がわかっているから, 問題にはならないことである.

dx は基本的に**大きさが無いほどの微細な部分**という意味の約束である.

$Q'(x)$ は x を含む微細な部分での Q の変化量 $dQ = Q(x+dx)-Q(x)$ を微細な部分の係数として表したものである.

$dQ=Q'(x) dx$ あるいは $Q'(x)=\frac{dQ}{dx}$ とかくことがある.

なお, 「なめらか」な $Q(x)$ にたいしては(“大抵”の場合) x における微分係数は

$Q'(x)=\frac{Q(x+h)-Q(x)}{h}$ において $h \rightarrow 0$ とおいて得られる.

$Q(a)-Q(b)$ は $-Q'(x) dx$ を $x=a$ から $x=b$ まで“足し合わせた”もの

このことを

$$Q(a) - Q(b) = - \int_a^b Q'(x) dx$$

とかく. これは(ただの, しかし, 便利な)記号法である.

一方, $Q(b)-Q(a)$ は $Q'(x) dx$ を $x=a$ から $x=b$ まで“足し合わせた”ものと見て

$$Q(b) - Q(a) = \int_a^b Q'(x) dx \quad (\text{微分積分学の基本定理})$$

とかくこともできる. b を x に改めると,

$$Q(x) = Q(a) + \int_a^x Q'(x) dx$$

逆に、何か変数 $r(x)$ があって、 $r(x) dx$ について、

$$\int_a^x r(x) dx$$

は何を表すべきか.

$$R(x) = \int_a^x r(x) dx$$

に対し、

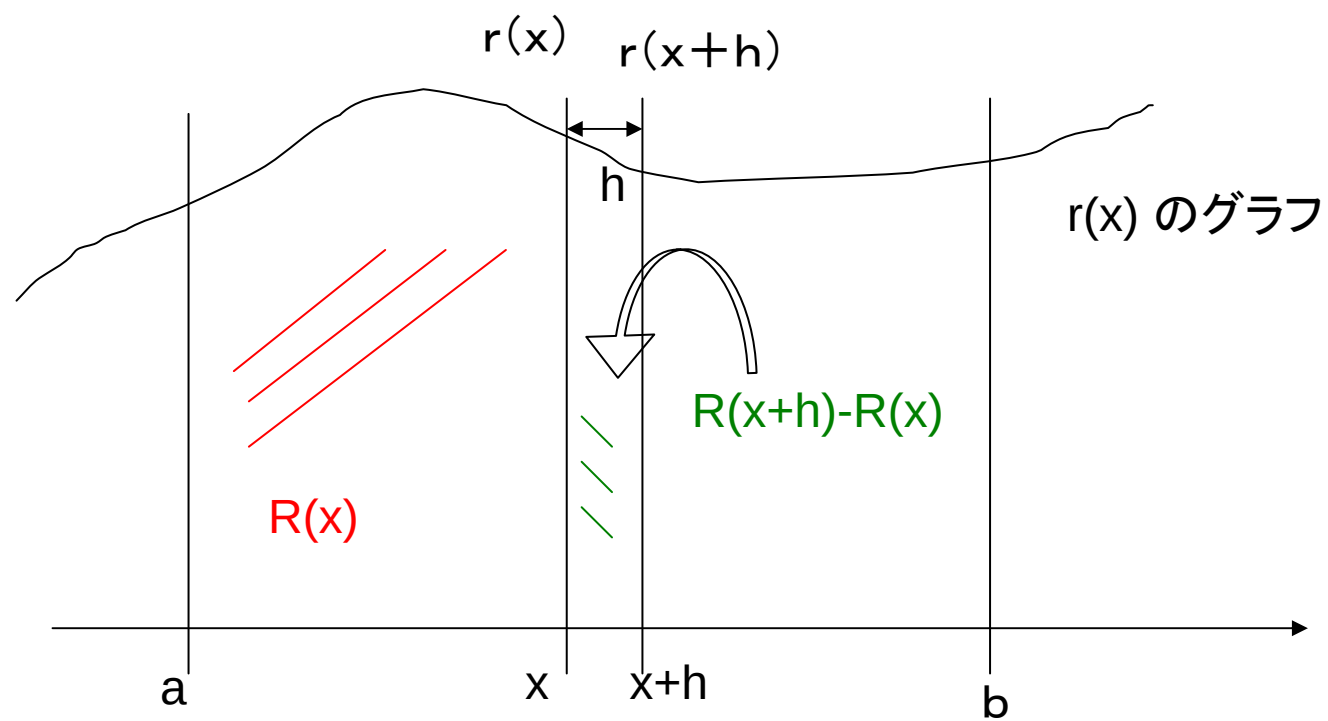
$$\begin{aligned} R(x+h) - R(x) &= \int_x^{x+h} r(x) dx \\ &= (r(x) + \dots) \cdot h \end{aligned}$$

h を dx に換える:

x における $R(x)$ の微分係数

$$R'(x) = r(x)$$

$R(x)$ の点 x における“全量” $=r(x) \, dx$



3. 一休み

GALLERIA BORGHESE



図録表紙

ラファエロ：
一角獣を抱く
婦人像

ボルゲーゼ美術館展 平成21年12月（京都国立近代美術館）：

細密モザイク画

後に、東京でも展覧されたのでご覧になった方もおられるだろう。
支倉常長の等身大の肖像画が展示されてもいた。



パウルス5世は、ガリレオがコペルニクスの太陽中心説を(真理としてではなく)「仮説」と断った上で、出版することを許可した。

6

マルチェット・プロヴェンツァーレ

《パウルス5世(カミッロ・ボルゲーゼ)の肖像》

1621年

モザイク

67×54 cm

Marcello Provenziale

Portrait of Pope Paul V (Camillo Borghese)

Ritratto di Paolo V Borghese

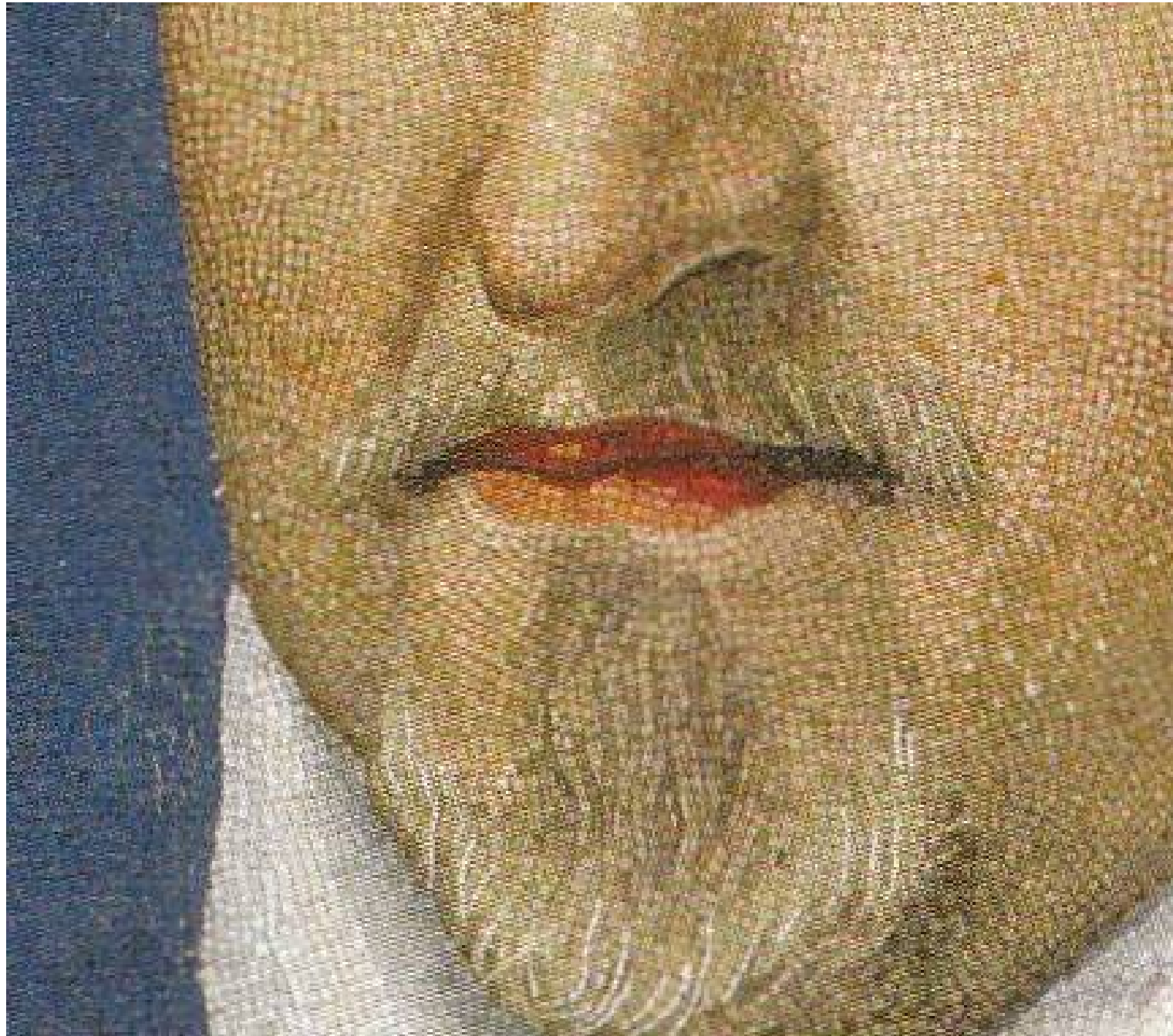
1621

Mosaic

67×54 cm

Inv. no. 495

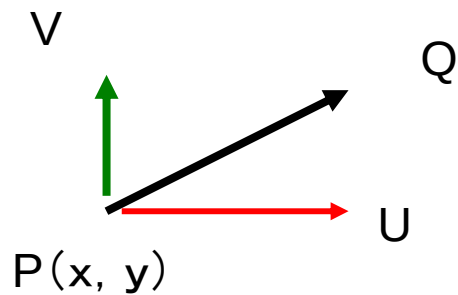
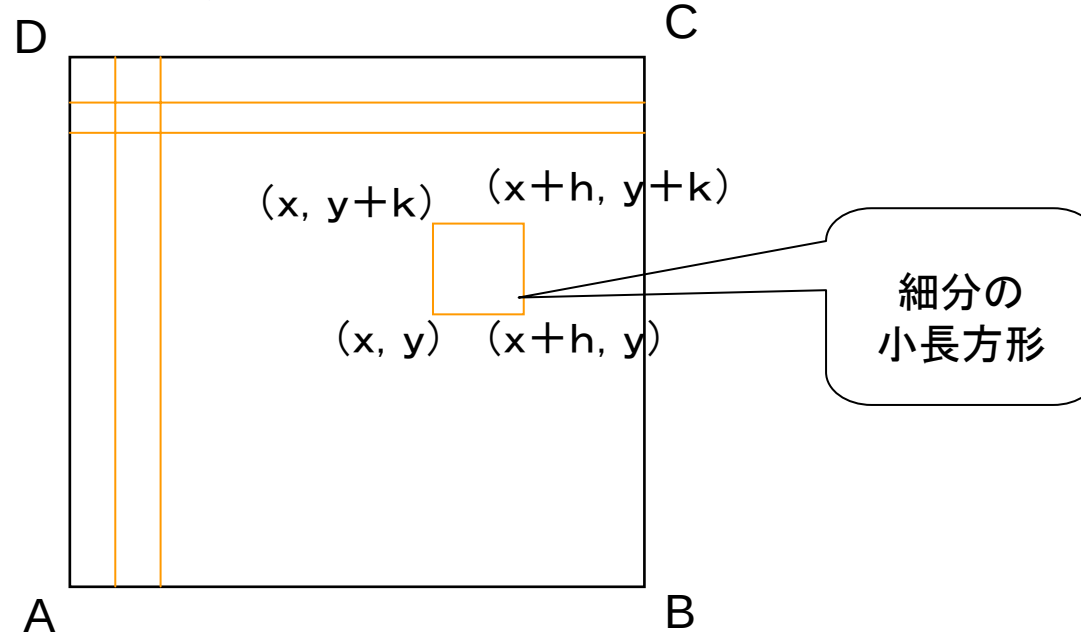




4. 平面の場合

(長方形領域 ABCD. 辺は水平方向, 垂直方向)

同様の長方形群による細分ができる



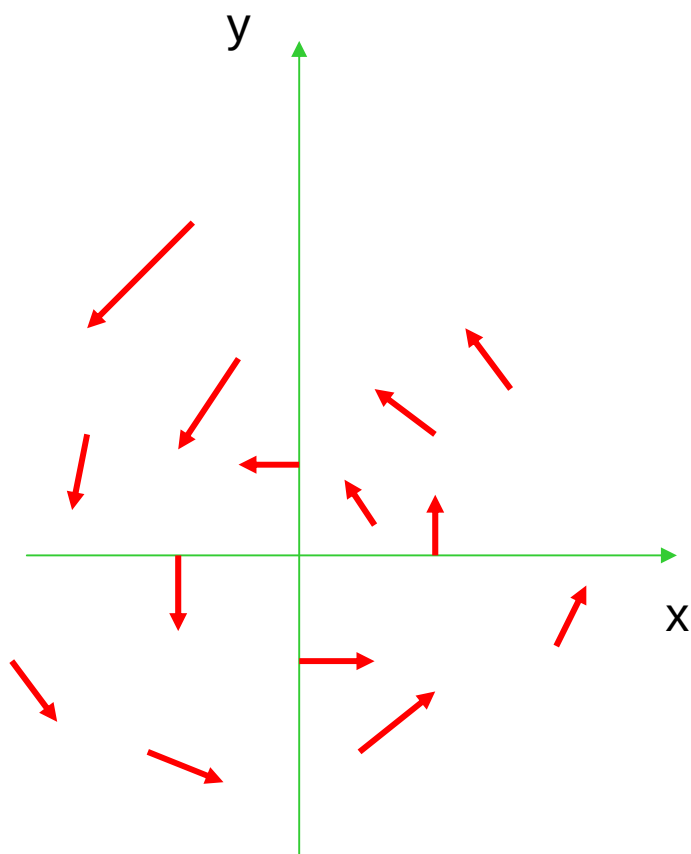
Q は平面内のある量の“場”

直交分解: 水平成分 U , 垂直成分 V

場 Q の模式図

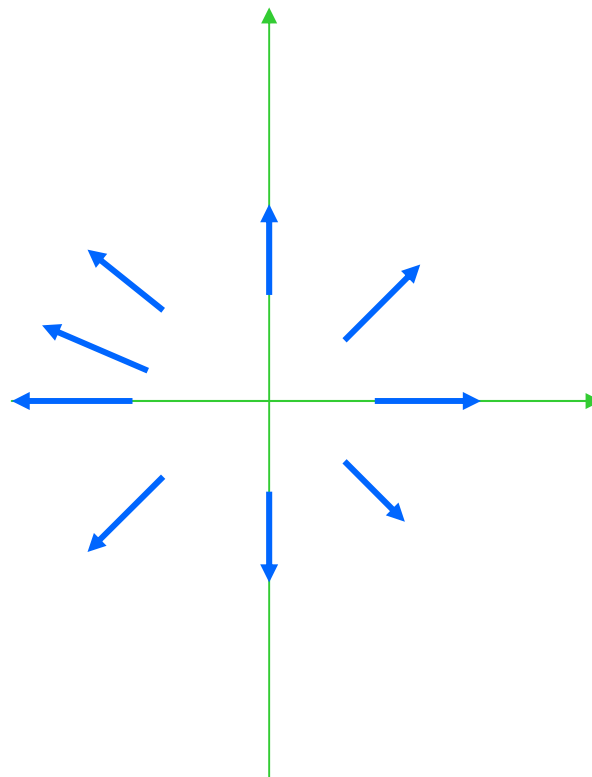
点 (x, y) において

$$U(x, y) = -y, \quad V(x, y) = x$$



場の例 (甲)

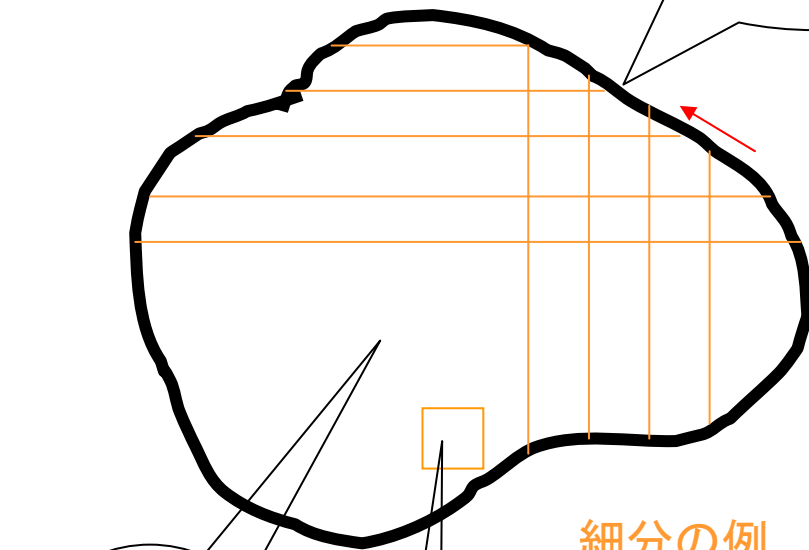
$$U(x, y) = x, \quad V(x, y) = y$$



場の例 (乙)

平面領域(一般の場合)

周, または境界
矢印のように巡るとする



場 Q が領域に(その境界を越えて)どう働くかは, 境界の性質に拠るとする(数学的な想定ではないが).

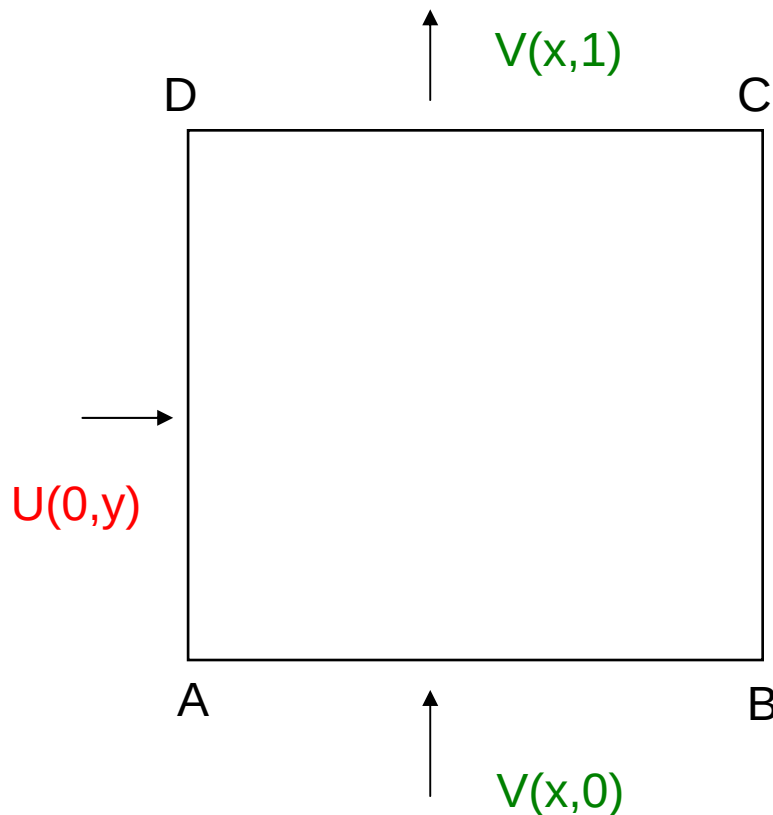
境界は(一般の)曲線になり, 扱いは必ずしも簡単ではない. 境界上に細かく点を取り, それらを線分で結んで得られる折れ線で近似したりする.

領域の**内部**

細分の例

妙な誤解を与えて, 将来, 本当に必要になったときに, 妨げになるかも知れないので, 深入りはしない.

細分の小方形



Q は各辺に垂直に“働く”とする.

AB から入る量 $\int_0^1 V(x, 0) dx$

BCから出る量 $-\int_0^1 U(1, y) dy$

CDから出る量 $-\int_0^1 V(x, 1) dx$

DAから入る量 $\int_0^1 U(0, y) dy$

A(0, 0) 全体の収支:

B(1, 0)

C(1, 1)

D(0, 1)

$$\int_0^1 V(x, 0) dx - \int_0^1 U(1, y) dy - \int_0^1 V(x, 1) dx + \int_0^1 U(0, y) dy$$

左下の頂点が (x, y) の小長方形でも同様.

$$\begin{aligned}\Delta_{x,y} = & \int_x^{x+h} V(\xi, y) d\xi - \int_y^{y+k} U(x+h, \eta) d\eta \\ & - \int_x^{x+h} V(\xi, y+k) d\xi + \int_y^{y+k} U(x, \eta) d\eta\end{aligned}$$

長方形の面積 $=hk$ であり, 両者の比 $\frac{\Delta_{x,y}}{hk}$ において

h, k を限りなく小さくすると (x, y) における量 Q の場の“微分因子”が得られる:

$$-U'_x(x, y) - V'_y(x, y)$$

各点での Q の効果 $= -\{U'_x(x, y) + V'_y(x, y)\} dx dy$

参考:

$$\begin{aligned}\Delta_{x,y} = & \int_x^{x+h} V(\xi, y) d\xi - \int_y^{y+k} U(x+h, \eta) d\eta \\ & - \int_x^{x+h} V(\xi, y+k) d\xi + \int_y^{y+k} U(x, \eta) d\eta\end{aligned}$$

右辺は

$$\begin{aligned}& - \int_x^{x+h} \{V(\xi, y+k) - V(\xi, y)\} d\xi \\ & - \int_y^{y+k} \{U(x+h, \eta) - U(x, \eta)\} d\eta\end{aligned}$$

さらに,

$$- \int_x^{x+h} \left\{ \int_y^{y+k} V'_y(\xi, \eta) d\eta \right\} d\xi - \int_y^{y+k} \left\{ \int_x^{x+h} U'_x(\xi, \eta) d\xi \right\} d\eta$$

となる. 少々うるさいが, 感じは想像が付くだろう.

長方形領域 ABCD の場合は, 見え透いてしまうのだが,

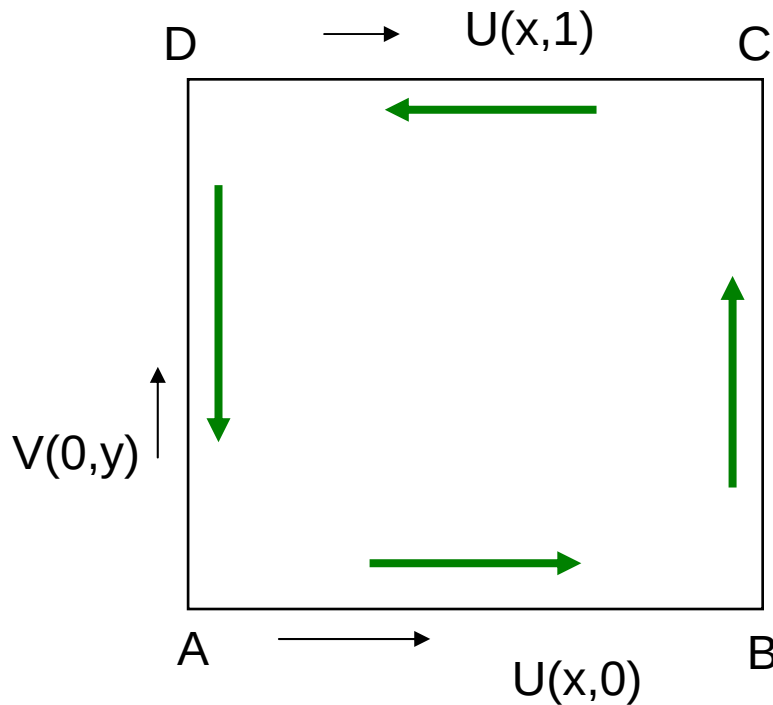
量 Q の作用が辺に垂直な場合

$$\text{全体の収支} = - \iint_{ABCD} \{U'_x(x, y) + V'_y(x, y)\} dx dy$$

これは, ただの記号だと思ってください.

趣旨は, 直線上の関数のときと同じ構造をしているということの説明.

Q が各辺に沿って“一回りに働く”とする.



AB に沿う量 $\int_0^1 U(x, 0) dx$

BC に沿う量 $\int_0^1 V(1, y) dy$

CD に沿う量 $\int_0^1 U(x, 1) dx$

DA に沿う量 $\int_0^1 V(0, y) dy$

A(0, 0)

B(1, 0)

C(1, 1)

D(0, 1)

Q が辺に沿って一回りに働いた全体の収支:

$$\int_0^1 U(x, 0) dx + \int_0^1 V(1, y) dy - \int_0^1 U(x, 1) dx - \int_0^1 V(0, y) dy$$

量 Q の作用が辺に沿って一回りする場合

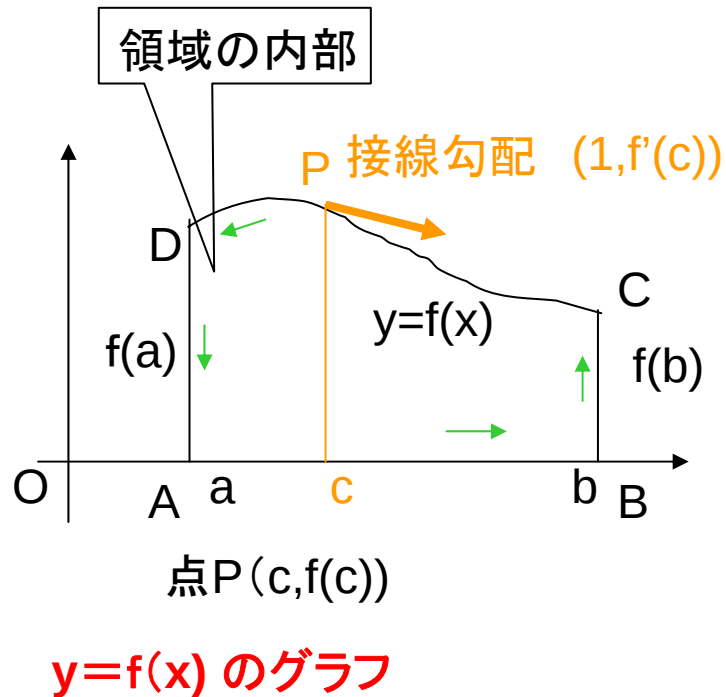
各点 (x,y) での“微分因子” $-U'_y(x,y) + V'_x(x,y)$

全体の収支 =
$$\iint_{\square ABCD} \{-U'_y(x,y) + V'_x(x,y)\} dx dy$$

これは、ただの記号だと思ってください。

趣旨は、直線上の関数のときと同じ構造をしているということの説明。

5. 面白い例の計算ができないのは寂しい.



$U(x, y) = -y$, $V(x, y) = x$ の場合, つまり
場の例(甲)の P における 接線方向
の成分

$$-f(c) + cf'(c)$$

($U(c, f(c)) + V(c, f(c))f'(c)$ の特別な場合)

曲線 $y=f(x)$ に沿って接線方向の成分が
微分因子になる量 $F(x)$:

$$F'(x) = -f(x) + xf'(x)$$

$$F(a) - F(b) = - \int_a^b \{ -f(x) + xf'(x) \} dx$$

緑の矢印のCDに沿った“全量”

DA に沿っての“全量” $-a f(a)$

AB に沿っての“全量” 0

BC に沿っての“全量” $b f(b)$

周 ABCD に沿っての“全量”(ここまでの総和)

$$C = - \int_a^b \{-f(x) + x f'(x)\} dx + b f(b) - a f(a)$$

今の場合

$$U'_y(x, y) = -1, \quad V'_x(x, y) = 1$$

したがって,

$$C = 2 \iint_{\square ABCD} dx dy$$

という表現がもっともらしそうである.

実は, 右辺は, 領域 **ABCD** の内部の面積の2倍を表すはずのものである.
(右辺 $\sim 2 \times$ [領域を細分して得られる小長方形の面積をすべて足し合わせたもの])

したがって,

$$C = 2 \int_a^b f(x) dx$$

となるはずだが, どうだろうか.

示すべきこと:

$$\int_a^b x f'(x) dx = b f(b) - a f(a) - \int_a^b f(x) dx$$

いわゆる「部分積分」を使えば、容易に示せるが、詳細は省略する.

積の微分の公式

$$(x f(x))' = f(x) + x f'(x)$$

を使えばよい.