

解析学C講義ノート
偏微分方程式入門

九州大学理学部数学科
平成13年度後期(水曜2・3時限)
3109 講義室

吉川 敦
九州大学
大学院数理学研究院

平成14年2月9日

緒言

このノートは、九州大学理学部数学科3年生の授業科目として、偏微分方程式に関するもっとも基本的な知識を紹介する講義のために準備したものである。

偏微分方程式は、物理学など自然哲学（理学）の立場では、観測量とその変動の間に成り立つ関係の記述の数学的な表現として得られるが、偏微分方程式によって物理学的理念としての物理量が初めて定められるというわけでは必ずしもない。

一方、工学のように、現象応用のために、物理量の詳細な情報を獲得しようとする立場では、数理モデルに基づいた偏微分方程式の解を具体的な形に得ることは最大の関心事である。

以上、いずれの立場でも、方程式の導出を支える論理が信頼に値するものである限り、偏微分方程式がそもそも解けるものかどうかというようなことは、意識にはのぼらないはずである。

しかし、数学においては、一旦、数理モデルの偏微分方程式が得られれば、形式上の類比が関心を呼び、方程式の形そのものと解けるかどうかの関係が分析の対象になる。

もちろん、こうして実現される数学的洗練や知見は、理学や工学の世界に移出され、新たな解釈の道具としてこれらの分野の論理を拡大し、新規の発見や開発を産み出す。そして、その過程で、再度、数学者の知的関心を刺激する。

偏微分方程式は学際的な営みの鍵なのである。

目次

緒言	i
第 1 章 偏微分方程式とは何か	1
1.1 簡単な例	1
1.2 偏微分方程式, 解, それらの解釈	4
第 2 章 基本的な線形偏微分方程式	7
2.1 線形偏微分作用素	7
2.1.1 重ね合わせの原理	7
2.1.2 D'Alembert の公式	10
2.2 変数分離法	12
2.2.1 弦の振動の方程式	13
2.2.2 要素解の重ね合わせと収束	15
2.3 熱方程式	25
2.3.1 直線上の熱方程式	25
2.3.2 熱方程式と変数分離法	28
2.4 平面のラプラシアン	31
2.4.1 固有値問題の変数分離解	31
2.4.2 長方形領域での Dirichlet 問題	34
2.5 円板領域と変数分離解	39
2.5.1 極座標と調和関数	39
2.5.2 Poisson の公式	43
2.5.3 Neumann 問題	48
2.5.4 ラプラス作用素の固有値問題	52
第 3 章 1 階の偏微分方程式	55
3.1 1 階の偏微分方程式	55
3.1.1 ベクトル場と積分曲線	56
3.1.2 1 階線形微分方程式の局所解	58
3.2 1 階非線型偏微分方程式	60
3.2.1 特性ベクトル場	61
3.2.2 特性曲線の方法による偏微分方程式の局所解の構成	63

付録 A 補遺としての種々の話題	69
A.1 偏微分方程式を扱うための道具立て	69
A.1.1 記号と規約	69
A.1.2 Leibniz の公式と微分作用素	71
A.2 数式処理ソフトによる偏微分演算	73
A.2.1 基礎となる偏微分演算	73
A.2.2 動径方向微分と回転方向微分	78
A.2.3 標準的な偏微分作用素	82
A.3 フーリエ級数の収束	86
付録 B 関数解析から	89
B.1 ヒルベルト空間	89
B.1.1 定義と例	89
B.1.2 強収束と弱収束	96
B.1.3 Riesz の定理	98
B.1.4 導関数概念の拡張	99
B.1.5 Sobolev 空間	105

第1章 偏微分方程式とは何か

この講義では、偏微分方程式について学ぶ。身近な話題から始めよう。

1.1 簡単な例

一般に、ある空間領域で定義されている量は、空間の位置や時間に依存して決まるので、位置や時間を表す変数を含んでいる（これらの変数に従属している）と考えられる。例えば（室内）プールの水温を問題にする場合、水温を測る場所と時間を示す変数（例えば、点 $P(x, y, z)$ と t ）を指定して、水温を $\theta(x, y, z, t)$ とかけば、はっきりする（図 1.1）。水温を常時直接に測定することを試みるのは稀であって、水温に関する何らかの法則により、限られた回数の測定で以後の水温変化を推測するのが通例である。こういう場合、水温の従うべき法則は、さまざまな便宜的な想定のもとながら、例えば、

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta(x, y, z, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta(x, y, z, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\theta(x, y, z, t) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\theta(x, y, z, t) \quad (1.1)$$

のような形の偏導関数を含む関係等式で表される。

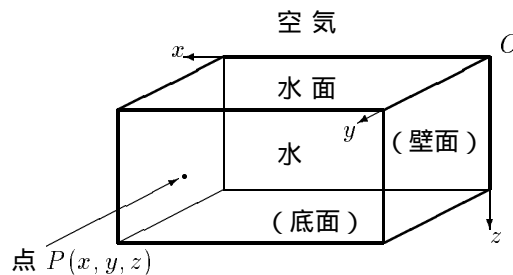


図 1.1: プール \mathcal{P}

ここでは、プールの右隅に原点 O をとり、縦横の向きに x - 及び y - 軸、深さを z - 軸で表したつもりである。したがって、縦 25（メートル）、横 12（メートル）、水深 1.5（メートル）のプール内の水は、

$$\mathcal{P} : 0 \leq x \leq 25, 0 \leq y \leq 12, 0 \leq z \leq 1.5$$

と表される¹。室温が一定（例えば、30）に保たれているとして、プールに水

¹この想定は図 1.1 とは対応していない。この想定通りなら極めて薄っぺらな長方体が示唆されなければならない。

温 $\theta_0(x, y, z) \equiv 25$ () の水を張って $t(> 0)$ 時間経った後の点 $P(x, y, z) (\in \mathcal{P})$ における水温 $\theta(x, y, z, t)$ は, プールの特性を方程式 (1.1) に加味することにより推測できるはずである.

プールの壁面と底面が断熱されているとすれば, そのこと²は, 壁面と底面で水温が満たすべき条件式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, y, z, t) &= 0 \quad (x = 0, x = 25) \\ \frac{\partial}{\partial y} \theta(x, y, z, t) &= 0 \quad (y = 0, y = 12) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \theta(x, y, z, t) &= 0 \quad (z = 1.5) \\ \theta(x, y, z, t) &= 30 \quad (z = 0) \end{aligned} \quad (1.3)$$

として表現できる. また, 当初の水温が 25 であったことは

$$\theta(x, y, z, t) = 25 \quad (t = 0) \quad (1.4)$$

と表すことができる. すなわち, プール \mathcal{P} における水温 $\theta(x, y, z, t)$ は, 方程式 (1.1) と条件式 (1.2) (1.3) (1.4) で (十分に) 記述されていると考え, その上で, これらの式を満たすもの — 解 — としての $\theta(x, y, z, t)$ を計算すれば, 求める水温が得られたことになる.

方程式 (1.1) は偏微分方程式の一例である. 条件式 (1.2) (1.3) (1.4) は境界条件といわれる. 特に, (1.4) は初期 ($t = 0$) の水温をデータに取り込むものとして, 初期条件と呼ばれる.

実際に, 方程式 (1.1) の解を示そう.

例 1.1.1 級数で定められる関数

$$\theta(x, y, z, t) = 30 - \frac{20}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{-\left(\frac{2n+1}{3}\right)^2 \pi^2 t} \sin\left(\frac{2n+1}{3} \pi z\right) \quad (1.5)$$

を (とりあえず右辺の級数への形式的な微分演算を許した上で) 代入することにより, この級数が方程式 (1.1) を満たすことがわかる. 境界条件 (1.2) (1.3) を満足することも推察がつくであろう. 初期条件 (1.4) の成立は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left(\frac{2n+1}{2} \pi s\right) = \frac{\pi}{4} \quad (0 < s = \frac{2}{3}z < 1) \quad (1.6)$$

という式を承認することと同値である. (1.5) のような解の求め方は後述する.

問 1.1.1 (1.5) が形式的な演算のもとで (1.1) を満たすことを確認せよ.

² (現実的とは言えない想定ながら) 壁面や底面において断熱的, すなわち, 温度勾配がないとして, そのことを (1.2) の形に数式化する. (1.3) は水面で 30 度の空気に接していることの数式化である.

注意 1.1.1 (1.6) は後述するフーリエ級数の一例である．左辺は， N -次三角多項式（部分和）

$$S_N(s) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{2n+1} \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi s\right), \quad 0 < s < 1, \quad (1.7)$$

の $N \rightarrow \infty$ における極限である（ことが期待される）． $f(s) = S_{30}(s)$ と $g(s) \equiv \frac{\pi}{4}$ とを対比させたグラフを掲げる．

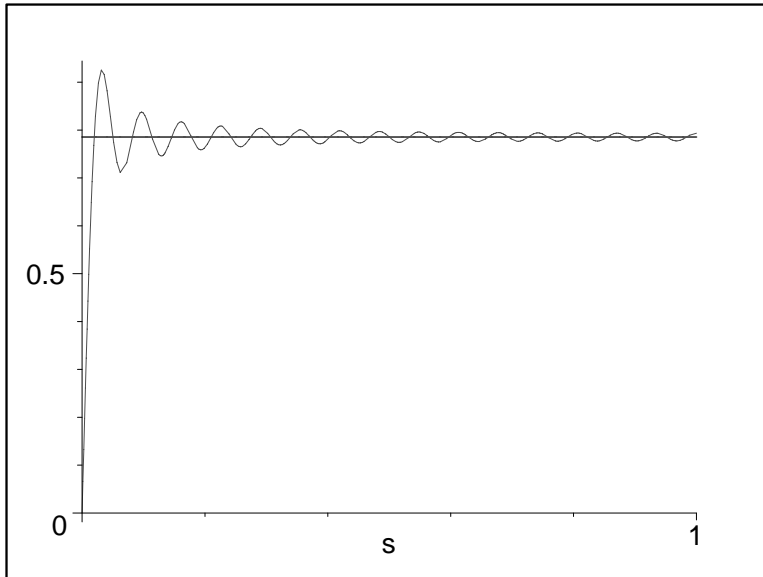


図 1.2: $g(s)$ と $f(s)$ のグラフは近い．

実際に， $\theta(x, y, z, t)$ を (1.5) の形に得ることによって，さまざまなことがわかる．例えば，境界条件や初期条件の効果によって，温度が x, y には依存しないことがわかり，また，級数の第 2 項以降は， $t \rightarrow \infty$ のとき急速に減衰するので，やがてはプールの水温が室温と同じになることが予想される．さらに， $t > 0$ ならば指数関数項は n の増大とともに急速に減衰するので， $\theta(x, y, z, t)$ を

$$\theta_1(x, y, z, t) = 30 - \frac{20}{\pi} e^{-\left(\frac{1}{3}\right)^2 \pi^2 t} \sin\left(\frac{1}{3}\pi z\right) \quad (1.8)$$

によって近似することができる．

偏微分方程式 (1.1) は，係数の選び方は多分に便宜的ではあるが，プール内の水温の分布を記述するための物理モデルに基づいて建てられたものであ

る。したがって、測定では部分的な把握しかできない $\theta(x, y, z, t)$ が、方程式 (1.1) を通じることによって、全体像を始めて覗かせるということが大切なことである。このような立場からは、解を、現象の解釈に適した数値解、近似解あるいは形式解や漸近解の形にまで咀嚼しておくことが望まれる。

1.2 偏微分方程式，解，それらの解釈

偏微分方程式は、極めて一般的には、ある数理現象の記述に関わる等式群と解される。人間が定義する方程式だから、基本的には有限の水準で万事が述べられるべきものである。例えば、現象が生起する領域 Ω は適当な次元 d の空間(の一部)であり、関与する量も本質的に有限系として把握される。すなわち、これらが有限個の関数系 u_1, \dots, u_N として適切に表現されるだけでなく、独立変数としては、 Ω の点 $x = (x_1, \dots, x_d)$ の他に、ようやく認識の対象として現象の記述に加わる有限個のパラメータ $t = (t_1, \dots, t_p)$ までが許されるのである。さらに、 u_1 以下の関数の x, t に関する偏導関数に関わっても、全体としては、有限系に留まるべきであり、当然、偏導関数の階数には上限 m がある。当初の数理現象は、かくて、領域の座標変数 x 、補助パラメータ t 、関数群 $u_1(x, t), \dots, u_N(x, t)$ 、および、これらの m 階までの偏導関数³ $\partial_x^\alpha \partial_t^\beta u_1(x, t), \dots$ の関数等式、すなわち、偏微分方程式系

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1(x, t, u_1(x, t), \dots, \partial_x^\alpha \partial_t^\beta u_N(x, t)) = 0 \\ \dots \\ \mathcal{E}_M(x, t, u_1(x, t), \dots, \partial_x^\alpha \partial_t^\beta u_N(x, t)) = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

で表される。

言うまでもなく、この設定は一般的かつ抽象的すぎて漠然としているが、このような考え方(を若干整理した上)で、偏微分方程式が扱われるということが全くないわけではない。例えば、 $\Omega \times \mathbb{R}^p$ の上の N 個の関数の m 階までの導関数をとにかく一括して表そうとすると、これら N 個の関数が独立だとした上で、可能な偏導関数の数を数え上げると、 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ だから、長さが m 以下の $d+p$ -次元の多重指標の個数に N を乗じたもの、ここでは m_N と書き表す数、が得られる。典型的な例として $m=1$ の場合を考えると $m_1 = N(d+p)$ である。したがって、偏微分方程式は $\Omega \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{m_N}$ の部分集合として表され、例えば、(1.9) の場合ならば、余次元 M のものが指定されている。つまり、偏微分方程式は幾何学的な問題に帰着されてしまったと言える。

もし、偏微分方程式が、数学的な動機⁴だけで成り立っているのなら、定式化もきちんとしているし、上のような立場に批判の余地などあるはずがない。

³ここでは多重指標 (§A.1.1 参照) を用いた。

⁴今の文脈は、すべてに独立に「数学的」であるというようなことが意味を持つとして、ということである。

しかも，すべての偏微分方程式が上述の精神で定式化されているのなら具合の悪いものは考察の対象から排除することもできるであろう．経験上，我々が上の立場の困難について知っていることもいくつかあるのである．

しかし，偏微分方程式は，とにもかくにも現実に生起していることの数学的な記述から始まった．要するに，数学というものが，万事に先行して成立していたのでは決してなく，新しい知見に遭遇するたびに合理的な軌道修正を行う力を発揮してきたということを思い起こすことが，偏微分方程式を学ぶ際の言わば教訓でもある．

いずれにせよ，現実に我々が取り扱える偏微分方程式系は，(1.9) の形に表したとしても，強い制約条件を満たすものである．例えば， $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_M$ が $u_1(x, t), \dots, \partial_x^\alpha \partial_t^\beta u_N(x, t)$ に関して線形であっても，想定された方程式系 (1.9) を成り立たせるような関数群，すなわち，解が全くない例もある．その事情を分析してみると，方程式系に対する解の概念が整合的に拡大されれば，改めて解として認識できるものが存在する場合もあれば，方程式系の形式的な特性から解というべきものがそもそもあり得ないことが示される場合もある．

このノートでは，偏微分方程式が何らかの現象記述に対応して得られる場合を重視するので，解というべきものが原則として存在するはずであり，しかも，偏導関数が定義通りに計算できて古典的な微積分の水準でも疑義の生じないような解と方程式の関係が実現されることを理想としたい．しかし，観測された現象の説明のためにもそのような解だけでは不十分なことがある．要するに，偏微分方程式の扱いでは，解やその偏導関数について，関数概念を微積分的なものから一般化しておくことが不可欠である．

標準的な立場としては，例えば，内包的拡張というべき姿勢がある．すなわち， Ω 上で関数として定義できるもの $u(x)$ が，適当な極限操作によって， Ω 上の（微積分学的な意味の）なめらかな関数の列 $v_m(x)$ の極限 $u(x) = \lim_m v_m(x)$ として得られるときに， $u(x)$ 自身の連続性や微分可能性は必ずしも保証されなくても， $v_m(x)$ の偏導関数 $\partial^\alpha v_m(x)$ の極限が合理的に定義できれば，それを $u(x)$ の対応する拡張された偏導関数 $\partial^\alpha u(x)$ とするのである．

一方，外延的拡張というべきものがあり（微積分学的な）導関数が満たすべき性質のうち核心をなすものを抽出し，その性質の維持だけを拡張の条件とする．あるべき性質として広く採用されているのは，部分積分，あるいは，Green-Stokes の定理の成立である． $u(x)$ が必ずしも微積分学的な導関数を持たなくても，任意のなめらかな関数 $v(x)$ の導関数 $\partial^\alpha v(x)$ と組合せたときに，適当な関数 $w(x)$ が $v(x)$ と組んで Green-Stokes の定理において $u(x)$ の微積分学的な導関数が果たすであろう役廻りを務めるならば， $w(x)$ を拡張された意味の $\partial^\alpha u(x)$ とするのである．

これらの概念拡張は数学的には本来異なるものである．しかし，われわれ

が重要視する多くの問題では区別する必要がない。しかも、導関数概念の拡張方式を使いこなすことにより、導関数を記号として扱っても案外自由に議論が進められるのである。もとより、記号が指示する導関数がどのような拡張概念のものが論じ分けられるべきことは厳格な数学的要請ではあろうが、主題が偏微分方程式の扱いにあるのであれば、信頼すべき文献の参照に留めておくのが健全な場合も多い。

第2章 基本的な線形偏微分方程式

以下では、2変数あるいは3変数の偏微分方程式で基本とされるものを扱う。偏微分方程式はさまざまな現象の解析の過程で出現することが多い。したがって、方程式の型に応じた導出は、本来の文脈としては現象を追求する立場に属する¹。その心得が方程式についての理解を深めるものであることは疑いが無いが、ここでは、方程式の類型がすでに与えられているとして、その違いを典型的な解を構成することによって見ていくことに留めたい。

2.1 線形偏微分作用素

本稿の冒頭で掲げた (1.1) は線形偏微分方程式の典型例である。(1.1) の右辺を左辺に移し、改めて右辺を 0 とおくと

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \theta(x, y, z, t) = 0, \quad (2.1)$$

すなわち、偏微分作用素

$$\mathfrak{H} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

が(特定すべき) $\theta(x, y, z, t)$ に働いた結果は消える(0である)という形になる。作用素 \mathfrak{H} はプール \mathcal{P} で定義されたなめらかな関数²ならどんなものに対しても働き、その働き方は、下に説明するような意味で、線形なのである。

2.1.1 重ね合わせの原理

一般に、偏微分作用素³

$$\mathfrak{L} = \sum_{\alpha: \text{多重指標}, |\alpha| \leq m} c_{\alpha}(x) \partial^{\alpha}, \quad (\text{係数 } c_{\alpha}(x) \text{ は } \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ 上連続とする}) \quad (2.2)$$

は (\mathbb{R}^n の連結開部分集合(領域)) Ω で定義された (m 回連続微分可能な) 関数の族 $\mathcal{C}^m(\Omega)$ に対し、線形に働く：

$$\mathfrak{L}(au(x) + bv(x)) = a\mathfrak{L}(u(x)) + b\mathfrak{L}(v(x)). \quad (2.3)$$

¹これに関しては文献を参照していただきたい。

²今の場合なら、 \mathcal{P} の点の座標の関数として少なくとも2回連続微分可能なもの。

³多重指標については §A.1.1 を見よ。

(ただし, $u, v \in C^m(\Omega)$, $a, b \in \mathbb{R}$, とする). (2.2) では \mathfrak{L} は m -階までの偏微分しか含まないが, さらに, $c_\alpha(x) \neq 0$ が適当な $|\alpha| = m$ に対して成立するならば, \mathfrak{L} の最高階の偏微分は丁度 m -階である. このとき, \mathfrak{L} は m -階の線形偏微分作用素といわれる⁴. したがって, (2.1) に現われる \mathfrak{L} は2階の線形偏微分作用素である. 線形偏微分方程式とは, Ω 上の関数 $g(x)$ と $u(x)$ に対し, $u(x)$ に線形偏微分作用素 \mathfrak{L} が働いた結果が $g(x)$ であるという言明, すなわち,

$$\mathfrak{L}(u(x)) = g(x) \quad (2.4)$$

である. 特に, $g(x) \equiv 0$ のときは偏微分方程式 (2.4) は同次方程式といわれ, $g(x) \neq 0$ のときは, 非同次方程式といわれる. (2.1) は, したがって, 同次方程式である.

数学上問題にされるのは, (2.4) において, $g(x)$ が既知の (あるいは与えられた) ものであるときに $u(x)$ を求めることである. その際, $u(x)$ が満たすべきさまざまな補助的な条件を課するのが通例であり, こうして得られた $u(x)$ は偏微分方程式 (2.4) の解とよばれ, 解を求める操作が偏微分方程式を解くことである.

注意 2.1.1 (2.2) において, 係数 $c_\alpha(x)$ がすべて定数であるとき, \mathfrak{L} は定数係数偏微分作用素といわれる. しかし, このことは偏微分作用素を表す座標系に依存する. 例えば, 平面の直交座標系 (xy -座標系) で

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.5)$$

と表される作用素は, $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ では (原点を極, x -軸を始線とする) 極座標系 ($r\theta$ -座標系) によって

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (2.6)$$

と表される. いずれも2階の作用素であるが, (2.5) は定数係数だが, (2.6) には $\frac{1}{r}$ や $\frac{1}{r^2}$ が係数に現れる.

問 2.1.1 直交座標系の (2.5) が極座標で (2.6) と表されることを確かめよ⁵.

⁴つまり, \mathfrak{L} は, 線形空間 $C^m(\Omega)$ から線形空間 $C^0(\Omega)$ への線形写像になっている. このことを代数的, あるいは, 記号处理的に把握するだけでも相当のことが明らかになる. しかし, 後に見るように, 位相的あるいは解析的な基礎の上で, 偏微分方程式関連の諸問題が正確に述べられ解決される.

⁵ヒント: 直交座標は極座標により $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ と表される. 直交座標で $u(x, y)$ と表される関数が極座標で $U(r, \theta)$ と表されるならば, $u(r \cos \theta, r \sin \theta) = U(r, \theta)$ である. したがって,

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} u + y \frac{\partial}{\partial y} u \right) (x, y) \Big|_{x=r \cos \theta, y=r \sin \theta} = r \frac{\partial}{\partial r} U(r, \theta)$$

及び

$$\left(-y \frac{\partial}{\partial x} u + x \frac{\partial}{\partial y} u \right) (x, y) \Big|_{x=r \cos \theta, y=r \sin \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} U(r, \theta)$$

となる.

命題 2.1.1 (重ね合わせの原理) \mathcal{L} は $(\Omega$ 上の) 線形偏微分作用素とし, $u(x), v(x)$ はともに同次方程式の解であるとする. このとき, 1 次結合 $au(x) + bv(x)$ も同次方程式の解である.

実際,

$$\mathcal{L}(au(x) + bv(x)) = a\mathcal{L}(u(x)) + b\mathcal{L}(v(x))$$

であるが, 右辺の 2 項はいずれも消えている.

例 2.1.1 重ね合わせの原理の応用として,

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} u(s, t) = 0 \quad (2.7)$$

を考察しよう. 変数 s のみの関数 $\phi(s)$ または t のみの関数 $\psi(t)$ は, それぞれ, t または s の偏微分で消える. したがって, $\phi(s)$ も $\psi(t)$ も (2.7) の解である. 重ね合わせの原理により, これらの和 $\phi(s) + \psi(t)$ も (2.7) の解である.

例 2.1.2 つぎに, 同次方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w(x, y) = 0 \quad (2.8)$$

を考察しよう. $U(\tau)$ が τ のなめらかな関数のとき, $w(x, y) = U(x - y)$ は (2.8) の解であることは代入により直接検証できる. 同様に, なめらかな $V(\tau)$ に対し, $w(x, y) = V(x + y)$ も (2.8) の解となっている. したがって,

$$w(x, y) = U(x - y) + V(x + y) \quad (2.9)$$

は (2.8) の解である. なお, $U(x - y)$ は $x = \tau + y$ のとき $U(\tau)$ の値をとる, すなわち, そのグラフは $U(x)$ のグラフを右に y だけ平行移動したものである. 同様に, $V(x + y)$ は $V(x)$ を左に y だけ平行移動したものになる. これらは波(形)を表すものと考えて進行波解といわれる. (2.9) は左右に進む進行波解の重ね合わせで表現できる解が (2.8) にあることを示すものである.

問 2.1.2 座標変換

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(s + t), \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-s + t) \end{cases}$$

によって, 同次方程式 (2.7) は (2.8) に変換される.

問 2.1.3 同次方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} + 1 \right) u(x, y) = 0 \quad (2.10)$$

に進行波解 $u(x, y) = f(x - ay)$ (a : 定数) があるとして, a の値と波形 $f(t)$ について考察せよ.

さて、定数係数線形偏微分作用素には扱い易さという長所がある。例えば、 Ω は \mathbb{R}^n のどんな部分領域でも意味がある。当然、断らない限り、直交座標系によって定数係数の作用素として表されるものを考えよう。2変数の場合でも、定数係数線形偏微分作用素は (2.5) の他にも、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \lambda \quad (\lambda : \text{定数}), \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}, \quad \dots$$

など枚挙に暇がない。

2.1.2 D'Alembert の公式

同次方程式 (2.8) を再考しよう。(2.9) において、予め与えられた何らかの情報が $U(\tau)$, $V(\tau)$ を特定するようなものであれば、 $u(x, y)$ は決まってしまう。そのような情報の例として初期値が挙げられる。すなわち、 $y = y_0$ のときに $u(x, y)$, $\frac{\partial}{\partial y}u(x, y)$ が、それぞれ、既知の関数である $f(x)$, $g(x)$ と一致するものとする⁶：

$$u(x, y_0) = f(x), \quad \frac{\partial}{\partial y}u(x, y_0) = g(x). \quad (2.11)$$

これより、 $y_0 = 0$ として、

$$U(x) + V(x) = f(x), \quad -U'(x) + V'(x) = g(x)$$

となるから、 $g(x)$ の原始関数を $G(x)$ として、

$$U(x) = \frac{1}{2} \{f(x) - G(x)\}, \quad V(x) = \frac{1}{2} \{f(x) + G(x)\}$$

すなわち、

$$u(x, y) = \frac{1}{2} (f(x-y) + f(x+y)) + \frac{1}{2} (-G(x-y) + G(x+y))$$

となる。原始関数を積分表示することにより、次の命題を得る：

命題 2.1.2 初期値問題 (2.8)(2.11) の解 $u(x, y)$ は D'Alembert の公式

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \{f(x-y) + f(x+y)\} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} g(t) dt \quad (2.12)$$

で与えられる。

注意 2.1.2 (2.12) 右辺の第1項は区間 $[x-y, x+y]$ の両端における f の値の平均であり、第2項はこの区間における $g(t)$ の積分平均に y を乗じたものとなっている ($y \neq 0$)。

⁶これが解 $u(x, y)$ に対する初期条件である。

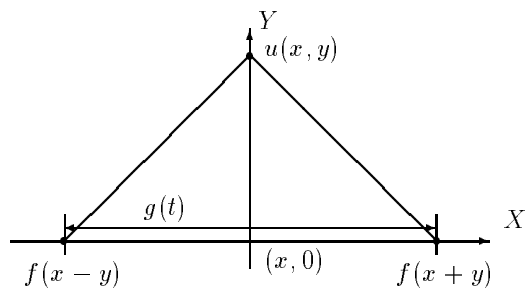


図 2.1: D'Alembert の公式の模式図

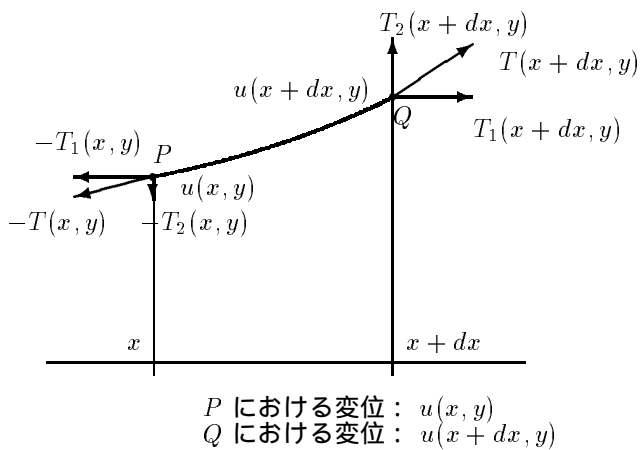


図 2.2: 弦の振動の模式図

注意 2.1.3 (2.8) は弦の振動の方程式と呼ばれる。D'Alembert の公式は、いわば無限に長い弦が初期変位 $f(x)$ 、初速 $g(x)$ で開始した運動が時刻 y で経験する変位を示すものと解される。無限に長い弦は不自然であるが、理念としての理想的な弦としては許されるかも知れない想定である。弦の振動の方程式 (2.8) の導出は、そのような理想化された弦の無限に小さな振動を古典力学にしたがって記述することにより実現される。今、直線 (x -軸) に沿って位置する極めて細く軽く、しなやかで伸び縮みのない様な密度の弦が、極めてわずかな変位を伴う運動を同一の平面 (xz -平面) 内で行っているとする⁷。時刻 y のときの点 x と点 $x+dx$ の間にある弦の無限小部分 $[x, x+dx]$ の運動を記述しよう。弦の密度は一様、すなわち、定数 $\rho > 0$ とすれば、この無限小部分の質量は ρdx である。時刻 y のときの x における変位を $z = u(x, y)$ とすれば、この点における加速度は (z -方向に) $\partial^2 u(x, y) / \partial y^2(x, y)$ である。他方、変位に伴い、弦上の点 $(x, u(x, y))$ において、張力 $T(x, y) = (T_1(x, y), T_2(x, y))$ が弦の接線方向に働く。すなわち、 $T_2(x, y) = \partial u(x, y) / \partial x T_1(x, y)$ である。この無限小部分に働く力は $T(x+dx, y) - T(x, y)$ であり、この無限小部分の力の釣り合いは

$$0 = T_1(x+dx, y) - T_1(x, y), \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) \rho dx = T_2(x+dx, y) - T_2(x, y)$$

となる。したがって、 $T_1(x, y) \equiv \tau$ (= 正の定数) とおき、 $\partial u(x+dx, y) / \partial x - \partial u(x, y) / \partial x = \partial^2 u(x, y) / \partial x^2 dx$ に注意すれば、

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y), \quad c = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}, \quad (2.13)$$

となる。(2.8) では $c = 1$ としてある。

問 2.1.4 (2.13) には $U(x-cy)$ および $V(x+cy)$ の形の進行波解があることを確かめよ。(2.13) (2.11) (ただし、 $y_0 = 0$) の解は

$$u(x, y) = \frac{1}{2}(f(x-cy) + f(x+cy)) + \frac{1}{2c} \int_{x-cy}^{x+cy} g(t) dt \quad (2.14)$$

と表される(これも D'Alembert の公式である)。

2.2 変数分離法

線形偏微分方程式の解を求める手だてとして、変数分離法を紹介しておこう。

⁷現実の弦は、材質や製造工程に伴う太さやねじれがあり、さらに運動は環境からも影響を受ける。弦のアイデアとでも言うべきものを考えているのである。それにもかかわらず、この方程式が現実的な価値を持っていることは自然の不思議を感じさせる。

2.2.1 弦の振動の方程式

例 2.2.1 弦の振動の方程式 (2.8) を見直そう。(2.8) の解 $u(x, y)$ を x に関する周期 2π の周期条件

$$u(x + 2\pi, y) = u(x, y), \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad (2.15)$$

のもとで求めよう。このとき,

$$\begin{aligned} \cos(\nu x) \cos(\nu y), \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, \\ \cos(\nu x) \sin(\nu y), \sin(\nu x) \cos(\nu y), \sin(\nu x) \sin(\nu y), \quad \nu = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.16)$$

のそれぞれは (2.8) (2.15) の解である。重ね合わせの原理より,

$$\begin{aligned} u(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \cos(\nu x) \cos(\nu y) + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu} \cos(\nu x) \sin(\nu y) \\ + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu} \sin(\nu x) \cos(\nu y) + \sum_{\nu=1}^{\infty} d_{\nu} \sin(\nu x) \sin(\nu y) \end{aligned} \quad (2.17)$$

は (収束さえすれば) 同次方程式 (2.8) の解であり, さらに, 周期条件 (2.15) を満足する。ただし, $a_{\nu}, b_{\nu}, c_{\nu}, d_{\nu}$ は定数である。この意味で, 本稿では, (2.16) のおのおのの関数を要素解とよぶ。要素解のそれぞれが (2.8) (2.15) を満足していることは直接の検証で直ちにわかる。

実は, 要素解は変数分離法といわれる組織的な方法で求められる具体的な形の解であることが大切である。まず, (2.8) の解を変数分離解 $u(x, y) = X(x)Y(y)$ の形で求めよう。ただし, $X(x), Y(y)$ はいずれも 1 変数 t のなめらかな関数で, 恒等的に消えることはないとする。(2.8) に代入すれば,

$$X''(x)Y(y) - X(x)Y''(y) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

を得る。 x, y は独立な変数であるから, 適当な定数 c を含む 2 階の常微分方程式系

$$X''(x) = cX(x), \quad Y''(y) = cY(y) \quad (2.18)$$

が導かれる。定数 c を特定するために, $X(x)$ に周期 2π の周期性

$$X(x + 2\pi) = X(x), \quad -\infty < x < +\infty,$$

を仮定しよう。すると, (2.18) の第 1 式から

$$c = \frac{\int_0^{2\pi} X''(x)X(x) dx}{\int_0^{2\pi} X(x)^2 dx} = -\frac{\int_0^{2\pi} X'(x)^2 dx}{\int_0^{2\pi} X(x)^2 dx} \leq 0 \quad (2.19)$$

となる。 $c = -\nu^2$ とすれば, $X(x)$ の周期性の要請と両立するのは

$$\nu = 0, 1, 2, \dots,$$

である．このとき，(2.18) から， a'_ν ， b'_ν ， c'_ν ， d'_ν を積分定数として，

$$X(x) = a'_\nu \cos(\nu x) + b'_\nu \sin(\nu x), \quad Y(y) = c'_\nu \cos(\nu y) + d'_\nu \sin(\nu y)$$

が従う．

問 2.2.1 (2.12) において， $f(x)$ ， $g(x)$ が周期 2π ならば， $u(x, y)$ は x ， y それぞれについて周期的になることを確かめよ．

問 2.2.2 要素解 (2.16) のそれぞれは進行波解の重ね合わせ (2.9) として表されることを確かめよ⁸．

問 2.2.3 同次方程式 (2.10) を周期性 (2.15) の要請のもとで変数分離法によって解け⁹．

例 2.2.2 区間 $0 < x < L$ において同次方程式 (2.8) を考察する．境界条件

$$u(0, y) = 0, \quad u(L, y) = 0 \quad (2.20)$$

のもとで，要素解 $u(x, y) = X(x)Y(y) (\neq 0)$ は，

$$u(x, y) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left\{ a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) + b_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \right\} \quad (2.21)$$

である ($n = 1, 2, \dots$ ．ただし， a_n ， b_n は定数)．実際， $X(x)Y(y)$ を (2.8) に代入して

$$\begin{aligned} X''(x) &= cX(x), & X(0) &= X(L) = 0 \\ Y''(y) &= cY(y) \end{aligned}$$

を適当な定数 c と共に得る．例 2.1.2 の場合と同様に

$$c = -\frac{\int_0^L X'(x)^2 dx}{\int_0^L X(x)^2 dx} < 0$$

がわかる． $X(x) \neq 0$ ， $X(0) = X(L) = 0$ ，と $X'(x) = 0$ とは両立しないことに注意せよ．したがって，定数倍を別にして，

$$X(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad c = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,$$

でなければならない．

⁸三角関数の加法定理の応用である．

⁹ $u(x, y) = X(x)Y(y)$ のもとで

$$X''(x) + X'(x) - cX(x) = 0, \quad Y''(y) = (c+1)Y(y)$$

が得られる．(2.15) から $c = 0$ となる．

問 2.2.4 区間 $0 < x < L$ において (2.8) を境界条件

$$\frac{\partial}{\partial x}u(0, y) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}u(L, y) = 0 \quad (2.22)$$

のもとで考察する．この場合の要素解を決定せよ¹⁰．

2.2.2 要素解の重ね合わせと収束

さて，要素解を計算しただけでは解そのものが求まったとは言えない．(2.17) の三角級数が収束し， $u(x, y)$ を定める条件を検討してみよう．まず，形式的に $y = 0$ を代入すると

$$u(x, 0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \cos(\nu x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu} \sin(\nu x) \quad (2.23)$$

となるはずである．この級数は周期 2π の関数 $u(x, 0)$ を表す三角級数展開でなければならない．同様に，(2.17) を形式的に y で偏微分してから $y = 0$ とおくと，

$$\frac{\partial}{\partial y}u(x, 0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu b_{\nu} \cos(\nu x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu d_{\nu} \sin(\nu x) \quad (2.24)$$

が得られる．これらは， a_{ν} ， b_{ν} ， c_{ν} ， d_{ν} についての情報が初期値 $u(x, 0)$ と $\frac{\partial}{\partial y}u(x, 0)$ から求められることを示す．

命題 2.2.1 関数 $f(x)$ ， $g(x)$ はそれぞれ周期 2π の C^2 -級， C^1 -級の関数とする．偏微分方程式 (2.8) には周期条件 (2.15) と初期条件

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial}{\partial y}u(x, 0) = g(x) \quad (2.25)$$

を満たすなめらかな解 $u(x, y)$ がただ一つ存在する．

[証明] 実際，D'Alembert の公式 (2.12) は x (と y) の周期 2π の関数 $u(x, y)$ で初期条件 (2.25) を満たすものを与える．しかし，重ね合わせによる (2.17) の形の級数も収束してなめらかな関数を定めれば，解を与えるはずである．このことを確かめよう．まず，初期条件 (2.25) の意味を (2.23) (2.24) と比較することにより，明らかにしよう．(2.25) より

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) d\xi, \\ a_{\nu} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) \cos \nu \xi d\xi, \quad c_{\nu} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) \sin \nu \xi d\xi, \\ b_{\nu} &= \frac{1}{\nu\pi} \int_0^{2\pi} g(\xi) \cos \nu \xi d\xi, \quad d_{\nu} = \frac{1}{\nu\pi} \int_0^{2\pi} g(\xi) \sin \nu \xi dx \end{aligned} \quad (2.26)$$

¹⁰要素解 $u(x, y) = X(x)Y(y)$ の因子は，

$$X(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad Y(y) = a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

となる．

($\nu = 1, 2, \dots$) となるべきである．ところが，加法定理より， $\nu \geq 1$ では，

$$a_\nu \cos(\nu x) + c_\nu \sin(\nu x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) \cos(\nu(x - \xi)) d\xi$$

だから，(2.23) と (2.25) の第1式との組合せは，等式

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^N \cos(\nu(x - \xi)) \right\} f(\xi) d\xi \quad (2.27)$$

の成立を示唆している．同様に

$$g(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^N \cos(\nu(x - \xi)) \right\} g(\xi) d\xi \quad (2.28)$$

も成り立つことを期待させる．ここで，

$$\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^N \cos(\nu t) = \frac{1}{2} \frac{\sin((N + \frac{1}{2})t)}{\sin \frac{1}{2}t} \quad (2.29)$$

に注意しよう¹¹．さて，改めて

$$D_N(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((N + \frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{1}{2}t)}, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (2.30)$$

とおけば¹²，(2.27) は

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} D_N(x - \xi) f(\xi) d\xi$$

の形になる．しかも， $D_N(t)$ は周期 2π の偶関数で，

$$\int_0^{2\pi} D_N(t) dt = 1, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (2.31)$$

を満たすから¹³，(2.27) は

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{x-\pi}^{x+\pi} D_N(\xi - x) \{f(\xi) - f(x)\} d\xi = 0 \quad (2.32)$$

¹¹ 実際，(2.29) の左辺は，初項 $\frac{1}{2}e^{-Nti}$ ，公比 e^{ti} ，項数 $2N + 1$ の等比級数

$$\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^N \frac{e^{\nu ti} + e^{-\nu ti}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=-N}^N e^{\nu ti}$$

と書き表される．したがって，

$$\frac{1}{2} e^{-Nti} \frac{1 - e^{(2N+1)ti}}{1 - e^{ti}}$$

となり，さらに，書き直して，(2.29) の右辺を得る．

¹² $D_N(t)$ を Dirichlet の核関数という．

¹³ 下の問 2.2.5 参照．

と同等である． $f(x)$ の周期性と 1 階連続微分可能性とから

$$F_x(t) = \begin{cases} \frac{f(t+x) - f(x)}{\sin \frac{t}{2}}, & t \neq 0 \\ 2f'(x), & t = 0 \end{cases} \quad (-\pi < t < \pi) \quad (2.33)$$

は t の周期 4π の連続関数に拡張され，しかも， $F_x(t+\pi) = -F_x(t-\pi)$ である．さらに， $f(x)$ が 2 階連続微分可能であれば， $F_x(t)$ は 1 階連続微分可能になる¹⁴．(2.32) は

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \left(\left(N + \frac{1}{2} \right) t \right) F_x(t) dt = 0 \quad (2.34)$$

に帰着するが，部分積分と組合せると，左辺の積分は

$$-\frac{\cos \left(N + \frac{1}{2} \right) t}{N + \frac{1}{2}} F_x(t) \Big|_{t=-\pi}^{\pi} + \frac{1}{N + \frac{1}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \left(\left(N + \frac{1}{2} \right) t \right) F'_x(t) dt$$

となり，しかも，第 1 項は消え，第 2 項は $N \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する．すなわち，(2.32)，したがって，(2.27) が成立する．(2.28) が C^2 -級の $g(x)$ に対して成立することも同様に示される¹⁵．

(2.17) の形の級数の収束を検討しよう．(2.17) 右辺の第 1 項と第 3 項とを整理すると

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \{ D_N(x+y-\xi) + D_N(x-y-\xi) \} f(\xi) d\xi$$

となる．一方， $\nu \geq 1$ のとき，

$$\frac{\sin(\nu y)}{\nu} = \frac{1}{2} \int_{-y}^y \cos(\nu \eta) d\eta$$

であることに注意すると，(2.17) 右辺の第 2 項と第 4 項とは

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} \int_0^{2\pi} D_N(\eta - \xi) g(\xi) d\xi d\eta$$

の形にまとめられる．したがって，(2.17) は

$$u(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\int_0^{2\pi} D_N(x+y-\xi) f(\xi) d\xi + \int_0^{2\pi} D_N(x-y-\xi) f(\xi) d\xi + \int_{x-y}^{x+y} \int_0^{2\pi} D_N(\eta - \xi) g(\xi) d\xi d\eta \right) \quad (2.35)$$

¹⁴ $t \neq 0$ のときは明らかである． $t = 0$ の微分可能性は定義に溯ればよい．

¹⁵ (2.27) や (2.28) の成立のためには $f(x)$ や $g(x)$ が C^2 -級という要請は強すぎる．例えば，これらが Lipschitz 連続であっても成り立つ．後述の注意 2.2.1 を見よ．

と表され、したがって、(2.27) (2.28) に注意すれば、 C^2 -級の $f(x)$ 、 C^1 -級の $g(x)$ に対して¹⁶、(2.35) の右辺が D'Alembert の公式 (2.12) の形になることがわかる。

他に (なめらかな) 解がないことを確かめておこう。このような解が二つあるとすると、方程式の線形性から両者の差 $w(x, y)$ は初期条件 (2.25) を $f(x) = g(x) = 0$ の形で満たす (2.8) (2.15) の解に他ならない。したがって、

$$e[w](y) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} w(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} w(x, y) \right)^2 \right\} dx$$

に着目すると、 $e[w](0) = 0$ 、かつ

$$e[w]'(y) = \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} w(x, y) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} w(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} w(x, y) \cdot \frac{\partial}{\partial y} w(x, y) \right\} dx$$

だから、部分積分と方程式 (2.8) により、 $e[w]'(y) = 0$ である。したがって、 $e[w](y) = 0$ 、すなわち、 $w(x, y)$ は定数となるが、初期条件を考慮すると $w(x, y) \equiv 0$ である。 [証明終]

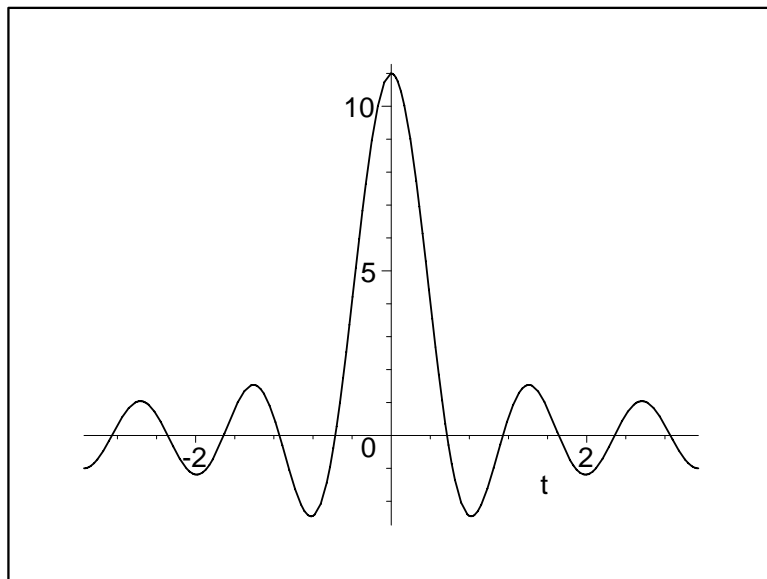


図 2.3: $D_N(t)$ のグラフ ($N = 5$)

問 2.2.5 Dirichlet の核関数 $D_N(t)$ は周期 2π の偶関数であり、(2.31) を満足することを確かめよ¹⁷。

¹⁶脚注 15 参照。

¹⁷脚注 11 参照。

注意 2.2.1 (2.27) の収束が Lipschitz 連続な $f(x)$ に対しても成り立つことは, $(-\pi, \pi)$ 上の可積分関数 $F(t)$ に対する

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt) F(t) dt = 0 \quad (2.36)$$

の成立に基づく. 実際, $f(x)$ が Lipschitz 連続ならば, (2.33) の $F_x(t)$ は有界で, 当然, $(-\pi, \pi)$ 上で可積分であり, (2.36) を $k = N + \frac{1}{2}$ として適用できる. (2.36) は古典的な Riemann-Lebesgue の定理 (の一例) である. (B.38) の検証は, $F(t)$ が階段関数で近似されることを前提に行われる¹⁸. 特に, $F(t)$ が $(-\pi, \pi)$ の閉部分区間 $[a, b]$ の上で定数値 1 をとり, この区間の外では 0 になる場合には明らかである.

問 2.2.6 $u(x, y)$ を命題 2.2.1 で与えた解とする.

$$e[u](y) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} u(x, y) \right)^2 \right\} dx \quad (2.37)$$

は $e[u](y) \equiv$ 定数, すなわち,

$$e[u](y) \equiv \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{f(x)^2 + g(x)^2\} dx$$

を満足することを示せ¹⁹.

境界条件が周期条件でない場合は, 初期条件に境界条件との両立性に関する注意がある. 最初に, 言わば, 形式的な解を構成しよう.

補題 2.2.1 $f(x), g(x)$ は $0 < x < L$ で定義された関数とする. 境界条件 (2.20), 初期条件 (2.25) のもとで弦の振動方程式 (2.8) には形式解

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left(c_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right) + d_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \right) \quad (2.38)$$

が存在する. ただし,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(\xi) \sin\left(\frac{n\pi}{L}\xi\right) d\xi \\ d_n &= \frac{2}{n\pi} \int_0^L g(\xi) \sin\left(\frac{n\pi}{L}\xi\right) d\xi \end{aligned}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.39)$$

¹⁸ $F(t)$ が階段関数 $s(t)$ によって誤差 $\epsilon > 0$ で近似される, すなわち,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(t) - s(t)| dt < \epsilon$$

が成り立つときには,

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt) F(t) dt \right| \leq \epsilon + \left| \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt) s(t) dt \right|$$

である. ここで, $s(t)$ は $(-\pi, \pi)$ の互いに交わらない有限個の閉部分区間の上で定数値をとる関数であることに注意せよ.

¹⁹ $e[u](y)$ を y で微分し, 部分積分と方程式 (2.8) と周期条件 (2.15) を利用して処理せよ. $e[u](y)$ は $w(x, y)$ のエネルギー積分とよばれる. この関数は, いわば, エネルギーが保存されることを示すものとも言える.

である。

実際, (2.39) は (2.26) と同様の考え方で得られるものである。

特に, Dirichlet の核関数を用いれば, 補題 2.2.1 から

$$\begin{aligned}
 u(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} & \left(\frac{\pi}{2L} \int_0^L \left\{ D_N\left(\frac{\pi}{L}(x+y-\xi)\right) \right. \right. \\
 & - D_N\left(\frac{\pi}{L}(x+y+\xi)\right) + D_N\left(\frac{\pi}{L}(x-y-\xi)\right) \\
 & \left. \left. - D_N\left(\frac{\pi}{L}(x-y+\xi)\right) \right\} f(\xi) d\xi \right. \\
 & + \frac{\pi}{4L} \int_{-y}^y d\eta \int_0^L \left\{ D_N\left(\frac{\pi}{L}(x+\eta-\xi)\right) \right. \\
 & - D_N\left(\frac{\pi}{L}(x+\eta+\xi)\right) + D_N\left(\frac{\pi}{L}(x-\eta-\xi)\right) \\
 & \left. \left. - D_N\left(\frac{\pi}{L}(x-\eta+\xi)\right) \right\} g(\xi) d\xi \right) \quad (2.40)
 \end{aligned}$$

が得られる。 $f(x), g(x)$ を $-L < x < L$ に奇関数として拡張したものを $f^\circ(x), g^\circ(x)$ とする:

$$f^\circ(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < L \\ -f(-x), & -L < x < 0 \end{cases}, \quad g^\circ(x) = \begin{cases} g(x), & 0 < x < L \\ -g(-x), & -L < x < 0 \end{cases}$$

このとき, (2.40) は

$$\begin{aligned}
 u(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} & \left(\frac{\pi}{2L} \int_{-L}^L \left\{ D_N\left(\frac{\pi}{L}(x+y-\xi)\right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + D_N\left(\frac{\pi}{L}(x-y-\xi)\right) \right\} f^\circ(\xi) d\xi \right. \\
 & + \frac{\pi}{4L} \int_{-y}^y d\eta \int_{-L}^L \left\{ D_N\left(\frac{\pi}{L}(x+\eta-\xi)\right) \right. \\
 & \left. \left. + D_N\left(\frac{\pi}{L}(x-\eta-\xi)\right) \right\} g^\circ(\xi) d\xi \right)
 \end{aligned}$$

とやや簡略化される。ここで, さらに, $f(x), g(x)$ が両立条件

$$f(0) = f(L) = 0, \quad g(0) = g(L) = 0 \quad (2.41)$$

を満たしているとすれば, $f^\circ(x), g^\circ(x)$ は,

$$f^\circ(-L) = f^\circ(L) = 0, \quad g^\circ(-L) = g^\circ(L) = 0$$

を満足するので, いずれも, 全直線上の周期 $2L$ の関数として拡張でき, それゆえ, $f^\circ(x), g^\circ(x)$ は直線上の周期 $2L$ の関数として拡張されているものとして扱ってよい。 $f(x), g(x)$ が $0 < x < L$ において有界な導関数を持つならば, こうして拡張された $f^\circ(x), g^\circ(x)$ は Lipschitz 連続である。したがって,

$$u(x, y) = \frac{f^\circ(x+y) + f^\circ(x-y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} g^\circ(\eta) d\eta \quad (2.42)$$

が導かれる．しかも，奇関数性と周期性から

$$u(0, y) = u(L, y) = 0$$

が成り立つことが容易にわかるであろう．一方， $f^\circ(x)$ が C^2 -級， $g^\circ(x)$ が C^1 -級であれば，(2.42) は C^2 -級のなめらかさを持つ．

補題 2.2.2 関数 $h(x)$ は $0 \leq x \leq L$ において連続， $0 < x < L$ において 1 階連続微分可能で， $h(0) = h(L) = 0$ を満たし，さらに，導関数 $h'(x)$ は $x \rightarrow 0$ および $x \rightarrow L$ で有界な極限值を持つとする．このとき， $h(x)$ の周期 $2L$ の奇関数拡張 $h^\circ(x)$ は直線上で 1 階連続微分可能である．さらに， $h(x)$ が $0 < x < L$ において 2 階連続微分可能で，導関数 $h''(x)$ が有界ならば， $h^\circ(x)$ は $x \neq kL$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ，において 2 階連続微分可能で， $h^\circ(x)$ の 1 階導関数は Lipschitz 連続である． $h^\circ(x)$ が直線上で 2 階連続微分可能になるための必要十分条件は $h''(x)$ が $x \rightarrow 0$ および $x \rightarrow L$ のときに 0 に収束することである．

[証明] 実際に必要な導関数を計算すれば明らかであろう． [証明終]

形式解が微分できて実際に解になることを，やや強すぎる印象のある条件のもとで，示そう．

命題 2.2.2 $f(x), g(x)$ は $0 \leq x \leq L$ で定義された関数とする． $f(x), g(x)$ は，それぞれ C^2 -級， C^1 -級で強い両立条件

$$\begin{aligned} f(0) = f(L) = f''(0) = f''(L) = 0, \\ g(0) = g(L) = 0 \end{aligned} \tag{2.43}$$

を満足するならば，境界条件 (2.20)，初期条件 (2.25) のもとで弦の振動方程式 (2.8) には C^2 -級の解 $u(x, y)$ がただ一つ存在する．

[証明] 解 $u(x, y)$ は形式的には，級数 (2.38) の形で得られるはずである．実際に，この $u(x, y)$ を与える級数が収束して C^2 -級の関数 (2.42) を定めることは，上の議論の帰結である．また，このような解が一意的であることは，命題 2.2.1 のときと同様に示される． [証明終]

注意 2.2.2 両立条件は，本来ならば，(2.41) だけに留められるべきだから，(2.43) の 2 階導関数に対する要請は余計なはずである．実際，(2.42) は C^1 -級であり， $x \pm y \neq kL$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ならば C^2 -級でもある．このことは，両端 $x = 0$ および $x = L$ から発生する特異性（の境界に反射しながら進行して行く様子）が一般に解に反映するということを意味している．

問 2.2.7 弦の振動の方程式 (2.8) は, 初期条件 (2.25), 境界条件 (free-ends) のもとで C^2 -級の解をただ一つ持つことを示せ. ただし, $f(x), g(x)$ は, それぞれ C^2 -級, C^1 -級で, 両立条件

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x) = 0, \quad x = 0, \quad x = L, \quad \frac{\partial}{\partial x} g(x) = 0, \quad x = 0, \quad x = L, \quad (2.44)$$

を満たしているとする²⁰

一方, 要素解の重ね合わせで得られるものが偏微分方程式の階数にふさわしい微分可能性を持たなくても解として解釈できることは重要である.

例 2.2.3 固定端の弦の振動の方程式の初期値問題 (2.8) (2.20) (2.25) の解 $u(x, y)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases} \quad (2.45)$$

および $g(x) = 0, 0 < x < 1$, の場合につけてみよう. これは, 長さ 1 の弦の中央を高さ 1 まで持ち上げて静かに放した後に生ずる運動の記述に相当する.

$$c_{2n} = 0, \quad c_{2n-1} = (-1)^{n-1} \frac{8}{(2n-1)^2 \pi^2}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ d_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

だから, 対応する要素解を重ね合わせたものは

$$u(x, y) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin(2n-1)\pi x \cos(2n-1)\pi y \quad (2.46)$$

となる. 一方, $f(x)$ を全直線上に周期 2 の奇関数として拡張したものは

$$f^o(x) = \begin{cases} 2x - 4m, & 2m - \frac{1}{2} < x < 2m + \frac{1}{2} \\ 4m + 2 - 2x, & 2m + \frac{1}{2} < x < 2m + \frac{3}{2} \end{cases}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

である. $u(x, y)$ の 2 階偏導関数の存在は微妙だが, $u(x, y)$ 自身は一様に収束して x, y に関して連続な関数を定めていることは明らかであろう. 事実, (2.42) より

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \{f^o(x+y) + f^o(x-y)\}$$

である. したがって, xy -平面の帯状集合 $\Sigma = [0, 1] \times \mathbb{R}$ を

²⁰要素解の重ね合わせが利用できる. また, $f(x)$ は (2.44) を満たすから

$$f^e(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < L \\ f(-x), & -L < x < 0 \end{cases}$$

とおくと, $f^e(-L) = f^e(L)$ であり, したがって, $f^e(x)$ は全直線上に周期 $2L$ の C^2 -級の偶関数として拡張される. $g^e(x)$ も同様に $g(x)$ の周期 $2L$ の偶関数としての拡張で, C^1 -級である. 初期値を $f^e(x), g^e(x)$ として得られる D'Alembert の公式による解と要素解の重ね合わせによる解とは一致する.

$$C_m^+ = \{(x, y); 2m + \frac{1}{2} - x < y < 2m + \frac{3}{2} - x, \\ 2m - \frac{1}{2} + x < y < 2m + \frac{1}{2} + x, 0 < x < 1\},$$

$$C_m^- = \{(x, y); 2m - \frac{1}{2} - x < y < 2m + \frac{1}{2} - x, \\ 2m - \frac{3}{2} + x < y < 2m - \frac{1}{2} + x, 0 < x < 1\}$$

$$L_m^+ = \{(x, y); 2m + \frac{1}{2} - x < y < 2m + \frac{3}{2} - x, \\ 2m + \frac{1}{2} + x < y < 2m + \frac{3}{2} + x, 0 < x < \frac{1}{2}\}$$

$$L_m^- = \{(x, y); 2m - \frac{1}{2} - x < y < 2m + \frac{1}{2} - x, \\ 2m - \frac{1}{2} + x < y < 2m + \frac{1}{2} + x, 0 < x < \frac{1}{2}\}$$

$$R_m^+ = \{(x, y); 2m + \frac{1}{2} - x < y < 2m + \frac{3}{2} - x, \\ 2m - \frac{3}{2} + x < y < 2m - \frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} < x < 1\}$$

$$R_m^- = \{(x, y); 2m - \frac{1}{2} - x < y < 2m + \frac{1}{2} - x, \\ 2m - \frac{5}{2} + x < y < 2m - \frac{3}{2} + x, \frac{1}{2} < x < 1\}$$

($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) の閉包の合併として表せば (図 2.2.3) ,

$$u(x, y) = \begin{cases} 2x, & (x, y) \in L_m^- \\ -2x, & (x, y) \in L_m^+ \\ 2x - 2, & (x, y) \in R_m^- \\ -2x + 2, & (x, y) \in R_m^+ \\ 2y - 4m + 1, & (x, y) \in C_m^- \\ -2y + 4m + 1, & (x, y) \in C_m^+ \end{cases}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

となる (図 2.2.2 参照) . この解は $0 < x < L, -\infty < y < \infty$ の全体では C^2 -級にならない . しかし , 偏微分が意味を持つところでは , 方程式 (2.8) を満足する .

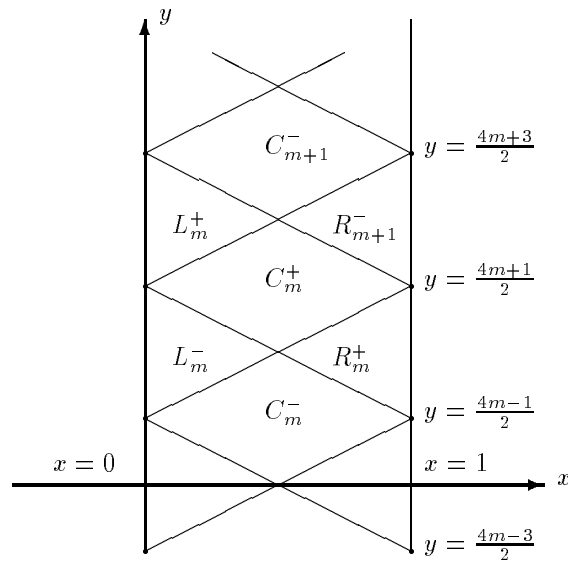
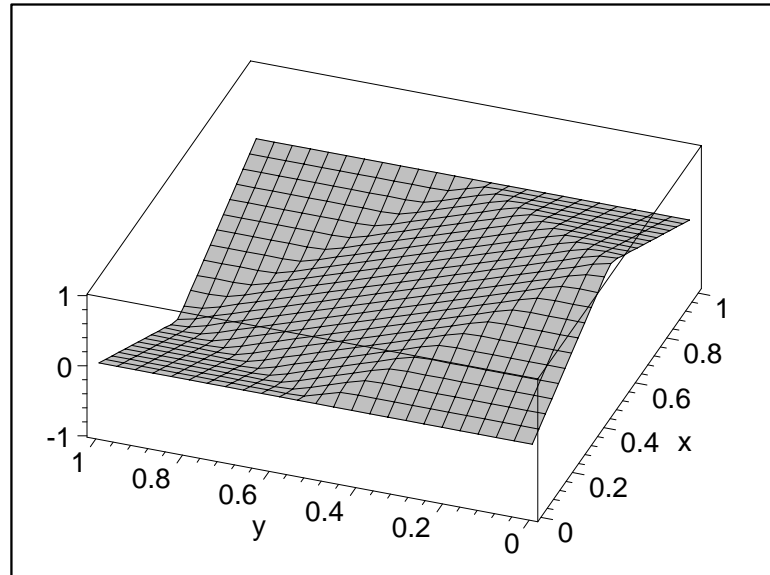
問 2.2.8 $\phi(x, y)$ は C^2 -級のなめらかな関数で $\phi(0, y) = \phi(L, 0) = 0$ および十分大きな $T > 0$ に対し , $\phi(x, y) = 0, y \geq T > 0$ を満たしているとする .

例 2.2.3 の解 $u(x, y)$ について , 積分

$$\int_0^T dy \int_0^L u(x, y) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi(x, y) dx + \int_0^L f(x) \frac{\partial}{\partial y} \phi(x, 0) dx$$

の値を求めよ²¹ .

²¹ 値は 0 である . 積分の処理には (2.46) の方を利用せよ .

図 2.4: 帯状集合 Σ の区分け図 2.5: 例 2.2.3 の $u(x, y)$: $0 < x < 1, 0 < y < 1$ の部分のグラフ

注意 2.2.3 問 2.2.8 は例 2.2.3 の解 $u(x, y)$ が同次方程式 (2.8) (と初期条件 (2.25) と) を満たすということの解釈を与えるものであるが, $u(x, y)$ が後述する弱い意味の 2 階偏導関数を持つことを示唆するわけではない²².

2.3 熱方程式

同次方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t, x) = 0 \quad (2.47)$$

は熱方程式とよばれる. 名称の由来は, 一様な細い (理想的な) 棒の点 x における時刻 t での温度 $u(t, x)$ が従うべき方程式だからである. 方程式の導出は, 点 x における (高温部から低温部への) 熱流 Q が温度勾配 u_x に比例するという Fourier の法則に基づくものであるが, 詳細は省略する. また, この方程式は, 拡散方程式ともよばれ, 確率過程を論ずる際の基本的な道具でもある.

2.3.1 直線上の熱方程式

まず, 全直線 $-\infty < x < +\infty$ の上で考察しよう.

問 2.3.1 $u(t, x)$ が (2.47) を $t > 0$, $-\infty < x < +\infty$ で満足しているとする. 任意に定数 $\lambda > 0$ を指定し, $u_\lambda(t, x) = u(\lambda^2 t, \lambda x)$ とおくと, $u_\lambda(x, t)$ も (2.47) を $t > 0$, $-\infty < x < +\infty$ で満足することを確かめよ.

問 2.3.2 $u(t, x)$ は $t > 0$, $-\infty < x < +\infty$ において熱方程式 (2.47) を満足し, さらに,

$$u(\lambda^2 t, \lambda x) = \lambda^{-1} u(t, x), \quad \lambda > 0$$

を満たすとする. このとき, $u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}} w\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$, $t > 0$, となるような 1 変数関数 $w(\tau)$ があって

$$w(\tau) + \tau w'(\tau) + 2w''(\tau) = 0 \quad (2.48)$$

が成り立つ²³.

²² 問 B.1.3 参照.

²³ $\lambda = \frac{1}{\sqrt{t}}$ とおくと, $u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}} u(1, \frac{x}{\sqrt{t}})$ となる. なお, (2.48) は 2 階の常微分方程式であり, 2 個の独立な解がある. $W(\tau) = \exp(-\frac{1}{4}\tau^2)$ が (2.48) を満たすことは代入して確かめられる. 第二の解を求めるには, 階数低下法を利用する. すなわち, $w(\tau) = v(\tau)W(\tau)$ とおき, (2.48) に代入して得られる $v'(\tau)$ についての 1 階常微分方程式

$$v''(\tau) + \frac{\tau W(\tau) + 4W'(\tau)}{2W(\tau)} v'(\tau) = v''(\tau) - \frac{\tau}{2} v'(\tau) = 0$$

から $v(\tau)$ を解け.

さて, $t > 0$ に対し,

$$W_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (2.49)$$

を熱核関数または Gauss-Weierstrass 関数という.

補題 2.3.1 Gauss-Weierstrass 関数に対し,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_t(x) dx = 1, \quad t > 0, \quad (2.50)$$

が成立する. また, $t > 0$, $-\infty < x < +\infty$ のにおいて, $w(t, x) = W_t(x)$ は熱方程式 (2.47) を満足する.

実際, (2.50) は, 微積分における基本的な公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \sqrt{2\pi} \quad (2.51)$$

において, 積分変数を $x = \sqrt{2t}y$ に改めることにより導かれる. $w(t, x) = W_t(x)$ が (2.47) を満たすことは直接的な計算で確かめられる²⁴.

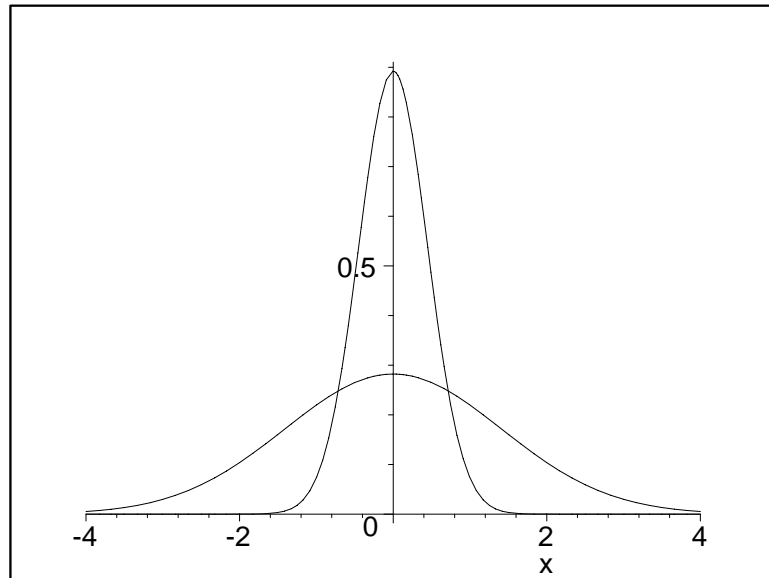


図 2.6: $W_t(x)$, $t = 1, 0.1$ のグラフ (どちら?)

²⁴なお, 問 2.3.2 及び例 A.2.18 を参照せよ.

補題 2.3.2 $g(x)$ は直線上の連続関数で有界, すなわち, 有限な

$$M = \sup_{-\infty < x < +\infty} |g(x)|$$

があるとする. $t > 0$ に対し, 積分

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_t(x-y) g(y) dy \quad (2.52)$$

は収束する. しかも, 任意の $R > 0$ に対して

$$|u(t, x) - g(x)| \leq \sup_{|y-x| \leq R\sqrt{t}} |g(y) - g(x)| + 2M \operatorname{erfc}\left(\frac{R}{2}\right) \quad (2.53)$$

である²⁵. 特に,

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} u(t, x) = g(x) \quad (2.54)$$

が成り立つ.

[証明] 積分 (2.52) は

$$\int_{x-R}^{x+R} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y) dy, \quad R > 0,$$

の $R \rightarrow +\infty$ の極限として定義される. $g(x)$ の有界性と (2.50) とから, この極限の存在は明らかである. 一方, (2.53) を示すには, (2.50) を利用し, さらに, 積分変数を変換して,

$$u(t, x) - g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_1(z) \{g(x - \sqrt{t}z) - g(x)\} dz$$

と書き直せることに注意しよう. 右辺の積分を $|z| \leq R$ の部分 I_1 と $|z| > R$ の部分 I_2 に分け, I_1 については, $g(x - \sqrt{t}z) - g(x)$ の $|z| \leq R$ における上限を積分の外に出した後で, 積分区間を $(-\infty, +\infty)$ まで広げれば, (2.53) の右辺第 1 項が得られる. I_2 については, $g(x)$ の有界性を使えば, (2.53) の右辺第 2 項が直ちに得られる. (2.54) を示すには, 任意の $\epsilon > 0$ に対し, (2.53) の右辺において, 第 2 項が $\epsilon/2$ より小さくなるような十分に大きい $R > 0$ を選び, ついで, 右辺第 1 項が $\epsilon/2$ より小さくなるように t を十分に小さくすればよい. [証終]

以上をまとめて, 次の命題を得る.

²⁵ただし, $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$ であり, $\operatorname{erf}(x)$ は誤差関数

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz, \quad x > 0,$$

である. (2.51) から $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{erf}(x) = 1$ が従う.

命題 2.3.1 直線上の有界な連続関数 $g(x)$ に対し, (2.52) で定められる $u(t, x)$ は, 初期条件

$$u(0, x) = g(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (2.55)$$

を満たす熱方程式 (2.47) の解である.

[証明] 確認すべきことは, $t > 0$ のときに, $u(t, x)$ がなめらかであり, 熱方程式 (2.47) を実際に満たすことである. このためには, 補題 2.3.1 によれば, (2.52) で偏微分演算と積分記号とが交換できることを確かめればよい. 実際, 被積分関数を t, x で何回偏微分しても, その結果は $-\infty < y < +\infty$ で積分できる²⁶ ので, この交換には障害はなく, しかも, $u(t, x)$ は $t > 0$ において C^∞ -級のなめらかさを持つこともわかる. [証終]

問 2.3.3 $g(x)$ が周期 $\varpi > 0$ の周期関数ならば, (2.52) が定める $u(t, x)$ も x に関して周期 ϖ である.

2.3.2 熱方程式と変数分離法

命題 2.3.1 は, いわば, 無限に長い棒の温度分布の変化を与えられた初期分布から計算できることを示している. しかし, 有限の長さ ($L > 0$) の棒の場合なら, 両端での熱の出入の情報が補われるので, したがって, 初期条件に加えて境界条件が課されなければならない. 例えば, 左端 ($x = 0$) で 0 度の (大熱容量の) 物体に接し, 右端 ($x = L$) では断熱されている場合に相当する問題は, 熱方程式 (2.47) を $t > 0, 0 < x < L$ で満足する $u(t, x)$ であって, 境界条件

$$u(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} u(t, L) = 0, \quad t > 0, \quad (2.56)$$

及び初期条件

$$u(0, x) = g(x), \quad 0 < x < L \quad (2.57)$$

を満たすものを求めることである.

境界条件 (2.56) を見るために, 変数分離解を要素解として求めよう.

例 2.3.1 熱方程式 (2.47) の境界条件 (2.56) を満たす要素解は

$$e^{-\nu_m^2 t} \sin(\nu_m x), \quad \nu_m = \frac{2m-1}{2L} \pi, \quad m = 1, 2, \dots$$

²⁶要するに, 被積分関数を偏微分した結果は

$$\frac{(x-y)^n}{\sqrt{t^m}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y)$$

の形の項の 1 次結合になる.

である．要素解を変数分離解 $u(t, x) = T(t)X(x)$ として (2.47) に代入すると

$$T'(t)X(x) - T(t)X''(x) = 0 \quad \text{または} \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = c$$

を得る． c は適当な定数である．(2.56) から， $X(x)$ は

$$X(0) = 0, \quad X'(L) = 0$$

を満たす．(2.19) と同様に $c = -\nu^2 < 0$ がわかり，さらに， $a_\nu \neq 0$ として，

$$X(x) = a_\nu \sin(\nu x), \quad \cos(\nu L) = 0$$

であるから，

$$\nu = \nu_m = \frac{2m-1}{2L}\pi, \quad m = 1, 2, \dots$$

が得られる．したがって， b_m は適当な定数として，

$$T(t) = b_m e^{-\nu_m^2 t}$$

である．

長さ L の棒の両端が温度 0 度の設定されている場合に相当するのは，熱方程式 (2.47) に，境界条件

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0, \quad t > 0, \quad (2.58)$$

を課す場合である．このときの要素解は

$$e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.59)$$

で与えられる．

問 2.3.4 (2.59) を確かめよ．

命題 2.3.2 熱方程式 (2.47) を $t > 0$, $0 < x < L$ で満足し，境界条件 (2.58) と初期条件 (2.57) を満たす解 $u(t, x)$ は， $t > 0$ において，

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad (2.60)$$

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(y) \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) dy, \quad n = 1, 2, \dots,$$

で与えられる．ただし，初期値 $g(x)$ は二乗可積分 $\int_0^L g(x)^2 dx < +\infty$ とする²⁷．

²⁷ $t = 0$ における収束性について別項を見よ．

実際, (2.60) の各項は要素解である. 初期値の仮定のもとでは,

$$|c_n| \leq \sqrt{\frac{2}{L}} \sqrt{\int_0^L g(x)^2 dx}$$

であり, 一方, $t > 0$ では

$$n^2 e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \leq \frac{L^2}{e \pi^2 t}$$

だから, (2.60) は収束する.

例 2.3.2 初期値

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 0.25 < x < 0.5 \\ 0, & 0 < x < 0.25 \text{ または } 0.5 < x < 1 \end{cases} \quad (2.61)$$

として, (2.47) (2.58) (2.57) の解は,

$$u(t, x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - \cos \frac{n\pi}{4} \right) e^{-n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x) \quad (2.62)$$

で与えられる²⁸. 三角級数の一般論²⁹に従えば, (2.62) 右辺の級数は $t = 0$ のときも収束し, その値は $\frac{1}{2}\{g(x-0) + g(x+0)\}$ である. したがって, $t = 0$ をこめて項数の十分に大きい有限和で解の近似が得られる.

棒の両端が断熱的な場合に相当する境界条件は

$$\frac{\partial}{\partial x} u(t, x) \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) \Big|_{x=L} = 0 \quad (2.63)$$

である. 対応する熱方程式の初期値境界値問題は次のようになる.

命題 2.3.3 熱方程式 (2.47) を $t > 0$, $0 < x < L$ で満足し, 境界条件 (2.63) と初期条件 (2.57) を満たす解 $u(t, x)$ は, $t > 0$ において,

$$u(t, x) = \frac{1}{L} \int_0^L g(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad (2.64)$$

$$d_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(y) \cos\left(\frac{n\pi}{L} y\right) dy, \quad n = 1, 2, \dots,$$

で与えられる. ただし, 初期値 $g(x)$ は二乗可積分 $\int_0^L g(x)^2 dx < +\infty$ とする³⁰.

²⁸

$$\cos \frac{n\pi}{2} - \cos \frac{n\pi}{4} = \begin{cases} 0, & n = 8m \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}, & n = 8m \pm 1 \\ -1, & n = 8m \pm 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}, & n = 8m \pm 3 \\ 2, & n = 8m + 4 \end{cases}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

である.

²⁹文献参照.

³⁰ $t = 0$ における収束性について別項を見よ.

[証明] まず, この場合の要素解は

$$u_n(t, x) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{L}t} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.65)$$

となることは容易に確かめられるであろう. 後の手順は, 命題 2.3.2 と同様である. [証終]

例 2.3.3 初期値 (2.61) のもとで, (2.47) (2.63) (2.57) の解は,

$$u(t, x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sin \frac{n\pi}{2} - \sin \frac{n\pi}{4} \right) e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x) \quad (2.66)$$

で与えられる³¹.

2.4 平面のラプラシアン

偏微分作用素 (2.5) は平面のラプラス作用素またはラプラシアンと呼ばれる. 高次元 (d -次元) の類比

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2} \quad (2.67)$$

は d -次元のラプラス作用素である³². (2.67) は, 記号 Δ_d (次元 d が了解されているときには, 単に, Δ) で表されることも多い.

2.4.1 固有値問題の変数分離解

開区間 $I_a = (0, a)$ と $I_b = (0, b)$ ($a, b > 0$) の直積を

$$\Omega_{a,b} = I_a \times I_b = \{ (x, y) ; 0 < x < a, 0 < y < b \}$$

とおこう. $\Omega_{a,b}$ の境界 (すなわち, 周) は

$$\begin{aligned} \partial\Omega_{a,b} = & \{ (x, y) ; x = 0 \text{ または } x = a, 0 \leq y \leq b \} \\ & \cup \{ (x, y) ; y = 0 \text{ または } y = b, 0 \leq x \leq a \} \end{aligned}$$

³¹

$$\sin \frac{n\pi}{2} - \sin \frac{n\pi}{4} = \begin{cases} 0, & n = 4m \\ \pm(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}), & n = 8m \pm 1 \\ \mp 1, & n = 8m \pm 2 \\ \mp(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}), & n = 8m \pm 3 \end{cases}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

である.

³²常微分作用素 $\frac{d^2}{dx^2}$ は 1 次元のラプラシアンに相当する.

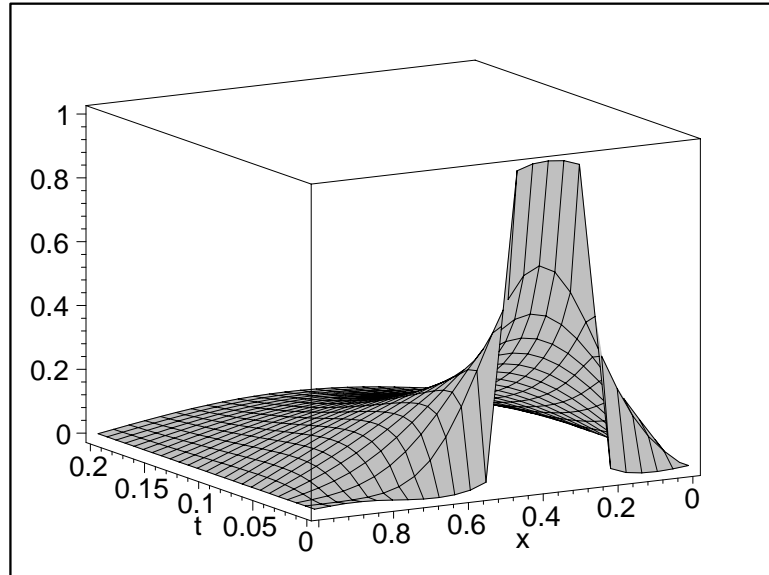


図 2.7: 例 2.3.2 の $u(x,t)$ のグラフ ($n \leq 100$ までの和による近似)

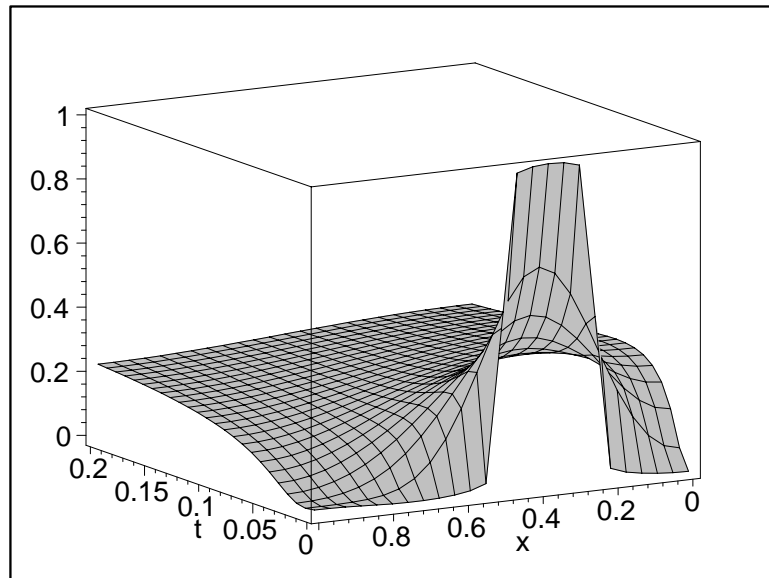


図 2.8: 例 2.3.3 の $u(x,t)$ のグラフ ($n \leq 100$ までの和による近似)

である．さて，偏微分方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x, y) = \lambda u(x, y) \quad (2.68)$$

を $\Omega_{a,b}$ で満たし，境界条件

$$u(x, y)|_{\partial\Omega_{a,b}} = 0 \quad (2.69)$$

を $\partial\Omega_{a,b}$ で満足するような関数 $u(x, y)$ と定数 λ を求めたい．

このような問題は，一般に固有値問題とよばれ，自明でない解 $u(x, y)$ は固有関数，そのときの λ の値は固有値とよばれる．

命題 2.4.1 固有値問題 (2.68) (2.69) の固有関数と固有値は

$$\begin{aligned} u_{m,n}(x, y) &= \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\ \lambda_{m,n} &= -\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \quad (m, n = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.70)$$

で与えられる．固有関数は定数倍を除いて決まる．

(2.70) が方程式 (2.68) を満足していることは，代入してみれば直ちに確かめられる．また，(2.69) を満たしていることも $u_{m,n}(x, y)$ の形から明らかである．

それでは，どのような手順で，(2.70) を発見したのであろうか．(2.68) (2.69) の解を変数分離形 $u(x, y) = X(x)Y(y) \neq 0$ に想定しよう．(2.68) に代入すると

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

となる．しかも，(2.69) を考慮に入れると，適当な定数 κ を補うことにより，

$$X''(x) = -\kappa X(x), \quad X(0) = X(a) = 0 \quad (2.71)$$

および

$$Y''(y) = -(-\lambda + \kappa)Y(y), \quad Y(0) = Y(b) = 0 \quad (2.72)$$

が従わなければならない．

問 2.4.1 (2.71) において $X(x) \neq 0$ ならば $\kappa > 0$ でなければならないことを示せ³³．

³³ 以前と同様に

$$\kappa \int_0^a X(x)^2 dx = - \int_0^a X(x) X''(x) dx$$

に注意せよ．右辺は部分積分により， $\int_0^a X'(x)^2 dx$ に変形される．しかも，この積分値は正でなければならない．

したがって, $\kappa = \mu^2$ とおくと, $X(x) = c \sin \mu x + c' \cos \mu x$ と表される. ここで, c, c' は定数である. 境界条件から

$$c \neq 0, \quad c' = 0, \quad \sin \mu a = 0$$

となり, したがって, $\mu = \frac{m\pi}{a}$ となる自然数 m がある. $Y(y) = c_1 \sin \frac{n\pi}{b} y$ (c_1 は定数) も全く同様に導かれる.

注意 2.4.1 固有関数系 $u_{m,n}(x, y)$, $m, n = 1, 2, \dots$ は $L^2(\Omega_{a,b})$ の直交基底をなしている. 直交性は

$$\iint_{\Omega_{a,b}} u_{m,n}(x, y) u_{\ell,k}(x, y) dx dy = \begin{cases} 0, & (m, n) \neq (\ell, k) \\ \frac{ab}{4}, & (m, n) = (\ell, k) \end{cases} \quad (2.73)$$

から明らかである. 基底性は $h(x, y) \in L^2(\Omega_{a,b})$ に対し

$$\iint_{\Omega_{a,b}} h(x, y) u_{m,n}(x, y) dx dy = 0, \quad m, n = 1, 2, \dots$$

から $h(x, y) = 0$ を導けばよい. しかも, この際, $h(x, y)$ が x, y それぞれの関数の積である場合だけを考えればよく, 結局, $h(x, y)$ が矩形領域の特性関数の定数倍の場合に帰着する. ところが, この場合は明らかである.

2.4.2 長方形領域での Dirichlet 問題

次に, 与えられた $f(x, y)$ に対して境界条件

$$u(x, y)|_{\partial\Omega_{a,b}} = 0 \quad (2.74)$$

のもとで, $\Omega_{a,b}$ における偏微分方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x, y) = f(x, y) \quad (2.75)$$

を満足する $u(x, y)$ を求めよう. このように境界値が消えるという設定の問題は一般に Dirichlet 問題とよばれる.

$f(x, y) \in L^2(\Omega_{a,b})$ とする. 注意 2.4.1 から,

$$f(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{m,n} u_{m,n}(x, y) \quad (2.76)$$

となる. ここで, (2.73) から

$$f_{m,n} = \frac{4}{ab} \iint_{\Omega_{a,b}} f(x, y) u_{m,n}(x, y) dx dy \quad (2.77)$$

である。ただし, (2.76) は $L^2(\Omega_{a,b})$ の収束の意味で成り立つ。すなわち, 十分大きな N に対し,

$$f^N(x, y) = \sum_{1 \leq m, n \leq N} f_{m,n} u_{m,n}(x, y)$$

とおけば, $L^2(\Omega_{a,b})$ において, $\lim_{N \rightarrow \infty} f^N = f$ となる。しかも, (2.73) から

$$\iint_{\Omega_{a,b}} |f(x, y)|^2 dx dy = \frac{ab}{4} \sum_{m,n=1}^{\infty} |f_{mn}|^2 \quad (2.78)$$

である。

ところが, (2.75) の右辺の $f(x, y)$ を $f^N(x, y)$ に置き換えるとその問題は容易に解ける。

補題 2.4.1 $f(x, y)$ を $f^N(x, y)$ に置き換えた Dirichlet 問題 (2.75) (2.74) の解は

$$u^N(x, y) = \sum_{1 \leq m, n \leq N} \frac{f_{m,n}}{\lambda_{m,n}} u_{m,n}(x, y) \quad (2.79)$$

で与えられる。

実際, 命題 2.4.1 からほとんど直ちに従う帰結である。しかも, $u^N(x, y)$ はなめらかな関数の有限和だから, なめらかでもある。

補題 2.4.2 $u^N(x, y)$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u^N(x, y)$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u^N(x, y)$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2} u^N(x, y)$ は, いずれも, $N \rightarrow \infty$ のときに $L^2(\Omega_{a,b})$ において収束する。

[証明] 実際,

$$\frac{\pi^2}{\max\{a^2, b^2\}}(m^2 + n^2) \leq |\lambda_{m,n}| \leq \frac{\pi^2}{\min\{a^2, b^2\}}(m^2 + n^2)$$

にまず注意しよう。 $u^N(x, y)$ が $L^2(\Omega_{a,b})$ で収束することは

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\frac{f_{m,n}}{\lambda_{m,n}} \right)^2 \leq \left(\frac{\max\{a^2, b^2\}}{\pi^2} \right)^2 \sum_{m,n=1}^{\infty} |f_{m,n}|^2 < +\infty$$

によってわかる。また, 例えば, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u^N(x, y)$ の収束をみるには,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u^N(x, y) = \sum_{1 \leq m, n \leq N} \left(-\frac{f_{m,n}}{\lambda_{m,n}} \frac{\pi^2 m^2}{a^2} \right) u_{m,n}(x, y)$$

だから,

$$\left| \frac{\pi^2 m^2}{\lambda_{m,n} a^2} \right| \leq \frac{\max\{a^2, b^2\}}{a^2} \frac{m^2}{m^2 + n^2} \leq \frac{\max\{a^2, b^2\}}{a^2}$$

によってわかる。他の2階の偏導関数の収束も同様である。

[証明終]

問 2.4.2 $m+n=k$ を満たす $m, n=1, 2, \dots$ について

$$\frac{k}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{m^2 + n^2} \leq k$$

である³⁴ .

問 2.4.3 $\frac{\partial}{\partial x} u^N(x, y), \frac{\partial}{\partial y} u^N(x, y)$ は $N \rightarrow \infty$ のときに $L^2(\Omega_{a,b})$ において収束することを示せ³⁵ .

以上から, $L^2(\Omega_{a,b})$ の元

$$u_{(ij)}(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} u^N(x, y), \quad 0 \leq i+j \leq 2,$$

が定まる. ただし, わずらわしいので, $u_{(00)}(x, y)$ は単に $u(x, y)$ と書こう. したがって, 極限移行により, 次の補題を得る.

補題 2.4.3 $g(x, y)$ は $\Omega_{a,b}$ 内でなめらか (C^2 級) で, しかも, 境界 $\partial\Omega_{a,b}$ の近くでは消えるような任意の関数とする³⁶. このとき, $0 \leq i+j \leq 2$ について,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_{a,b}} u_{(ij)}(x, y) g(x, y) dx dy &= \\ &= (-1)^{i+j} \iint_{\Omega_{a,b}} u(x, y) \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} g(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (2.80)$$

が成り立つ.

(2.80) は, $u_{(ij)}(x, y)$ が $u(x, y)$ の弱い意味での偏導関数

$$u_{(ij)}(x, y) = \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} u(x, y)$$

であることを示す. したがって, $u(x, y)$ は Sobolev 空間³⁷ $H^2(\Omega_{a,b})$ の元である.

補題 2.4.4 $u(x, y)$ は

$$u(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{f_{m,n}}{\lambda_{m,n}} u_{m,n}(x, y) \quad (2.81)$$

で与えられ,

$$\iint_{\Omega_{a,b}} |u(x, y)|^2 dx dy = \frac{ab}{4} \sum_{m,n=1}^{\infty} \left| \frac{f_{m,n}}{\lambda_{m,n}} \right|^2 \quad (2.82)$$

を満足する. しかも, $u(x, y)$ は $\Omega_{a,b}$ で一様収束し, 連続関数を定める.

³⁴図を描けば明らかであろう. なお, このような (m, n) は $k-1$ 個ある.

³⁵補題 2.4.2 の証明と同様.

³⁶このような $g(x, y)$ を $g \in C_0^2(\Omega_{a,b})$ と表す.

³⁷付録 B 参照.

最後の文言だけを確認しよう。(2.81) が実は一様収束することを示せばよい。ところが、

$$|u(x, y)| \leq \sum_{m,n=1}^{\infty} \left| \frac{f_{m,n}}{\lambda_{m,n}} \right| \leq \sqrt{\sum_{m,n=1}^{\infty} |f_{m,n}|^2} \sqrt{\sum_{m,n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\lambda_{m,n}} \right|^2}$$

であるが、問 2.4.2 と (2.78) により、この右辺は収束する。

以上の議論をまとめて、次を得る。

命題 2.4.2 上で得た $u(x, y)$ は Dirichlet 問題 (2.75) (2.74) の弱い意味での解、すなわち、 $u(x, y)$ は (2.74) を満足し、さらに、任意の $g \in C_o^2(\Omega_{a,b})$ に対し、

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_{a,b}} u(x, y) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} g(x, y) \right\} dx dy \\ = \iint_{\Omega_{a,b}} f(x, y) g(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (2.83)$$

を満たすものである。

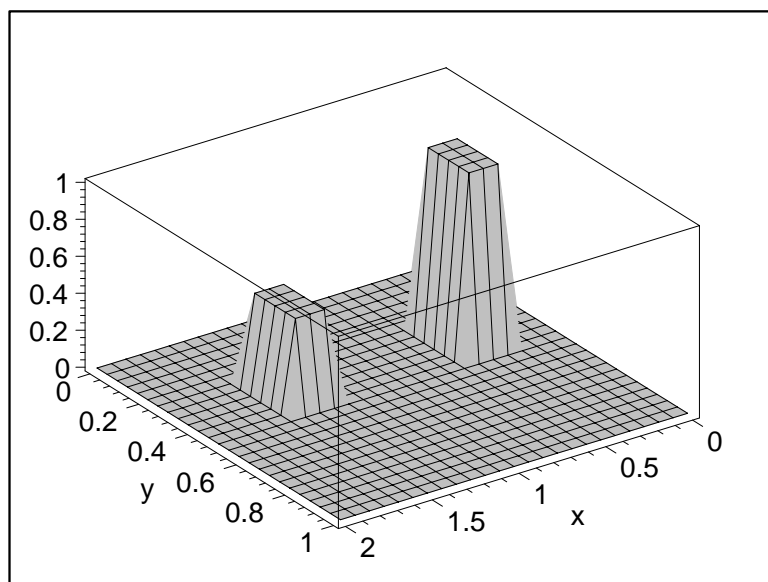


図 2.9: 例 2.4.1 の右辺 $f(x, y)$ のグラフ

例 2.4.1 $\Omega_{2,1}$ で考える .

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0.25 < x < 0.5, 0.25 < y < 0.5 \\ 0.5, & 1.25 < x < 1.5, 0.25 < y < 0.5 \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

に対応して, (2.81) で与えられた (2.75) (2.74) の解を $u(x, y)$ とする . $m, n = 1, 2, \dots$, として,

$$f_{mn} = \frac{2}{mn\pi^2} \left\{ 2 \cos\left(\frac{m\pi}{4}\right) - 2 \cos\left(\frac{m\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{3m\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{5m\pi}{8}\right) \right\} \times \left\{ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right\}$$

であり, m が 16 の倍数, または n が 8 の倍数ならば $f_{mn} = 0$ となることは容易に見て取れる .

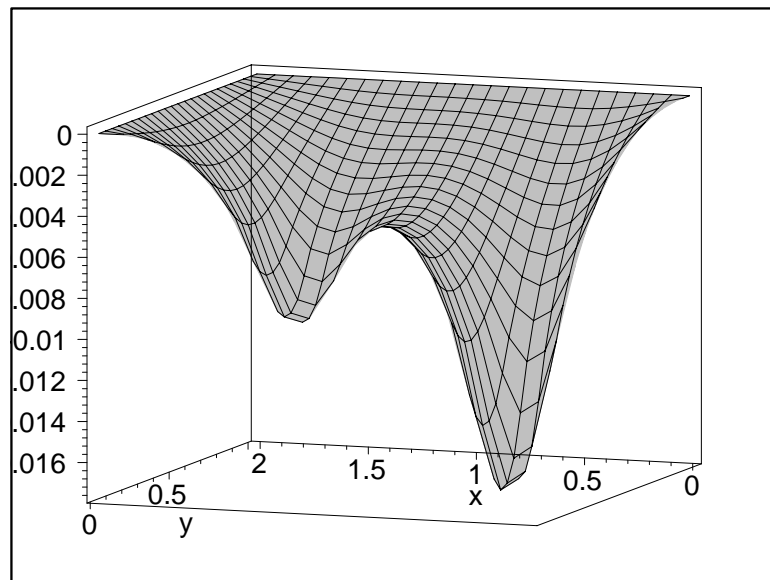


図 2.10: 例 2.4.1 の解 $u(x, y)$ のグラフ

2.5 円板領域と変数分離解

変数分離法は解を発掘するための極めて有力な方法ではあるが、偏微分作用素が働く関数が定義されている領域 Ω が変数の分離を保証する直積構造を持っており、しかも、それが偏微分作用素と整合していなければ全く意味がない。しかし、一旦、直積構造と偏微分作用素との整合性があるならば変数分離法の有効性は定数係数の場合に限定されない。

2.5.1 極座標と調和関数

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ における偏微分方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) h(x, y) = 0 \quad (2.84)$$

の解 $h(x, y)$ を (Ω における) 調和関数という。

例 2.5.1 $\Omega = \mathbb{R}^2$ の関数 $h(x, y)$ で (原点を極, x -軸を始線とする) 極座標³⁸で,

$$\sum_{m=0}^N r^{2m} \{ a_m \cos(2m\theta) + b_m \sin(2m\theta) \}, \quad N = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.85)$$

の形に表されるものは調和関数である³⁹。ここで, a_m, b_m は定数である。実際, (2.5) (2.6) で注意したように,

$$H(r, \theta) = h(r \cos \theta, r \sin \theta) \quad (2.86)$$

とすれば,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) H(r, \theta) = 0 \quad (2.87)$$

となるはずである。ここで, 重要なのは (2.86) ならば, $h(x, y)$ の原点の近くでの正則性から $H(r, \theta)$ は $r \rightarrow 0$ に際して少なくとも有界でなければならないことである。今, 変数分離解を

$$H(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \quad (2.88)$$

として (2.87) に代入すると,

$$\left(R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) \right) \Theta(\theta) + \frac{1}{r^2} R(r) \Theta''(\theta) = 0$$

³⁸ したがって, $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ である。

³⁹ \mathbb{R}^2 と複素平面とを同一視して,

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longleftrightarrow x + \sqrt{-1}y \in \mathbb{C}$$

を対応させると, \mathbb{R}^2 での調和関数は整関数, すなわち, \mathbb{C} 上の正則関数の実部または虚部として特徴付けられる。しかし, 調和関数には正則関数とは独立の興味もある。

あるいは

$$\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = c$$

を得る．ここで， c は適当な定数である．しかも， $\Theta(\theta)$ は θ の周期 2π の関数で， $\neq 0$ であるから， $c = \nu^2$ ， $\nu = 0, 1, 2, \dots$ ，すなわち，

$$\Theta(\theta) = \alpha_\nu \cos(\nu\theta) + \beta_\nu \sin(\nu\theta) \quad (\alpha_\nu, \beta_\nu : \text{定数})$$

とならなければならない．さらに，

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - \nu^2 R(r) = r(rR'(r))' - \nu^2 R(r) = 0$$

から

$$R(r) = \gamma_\nu r^\nu + \delta_\nu r^{-\nu} \quad (\gamma_\nu, \delta_\nu : \text{定数})$$

となる．ここで， $r \rightarrow 0$ で有界に留まるためには $\delta_\nu = 0$ が必要である．それゆえ，(2.88) より，

$$H(r, \theta) = r^\nu \cos(\nu\theta) \quad \text{または} \quad r^\nu \sin(\nu\theta) \quad (2.89)$$

は $r \rightarrow 0$ のときの有界性の条件をみたく (2.87) の解である．さらに， xy -座標で表したときに，原点を含めてのなめらかさを保証するには ν が偶数でなければならない．また，重ね合わせの原理から，(2.89) の1次結合も (2.87) の解である．結局，(2.85) を得る．

問 2.5.1 $r^2 \cos(2\theta)$ ， $r^2 \sin(2\theta)$ は xy -座標系ではどう表されるか．一般に， $r^{2\nu} \cos(2\nu\theta)$ ， $r^{2\nu} \sin(2\nu\theta)$ ，($\nu = 2, 3, \dots$) ではどうか．

問 2.5.2 $r < 1$ のとき，

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} r^\nu \cos(\nu\theta) \quad \text{および} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} r^\nu \sin(\nu\theta)$$

は収束する．これらはどのような関数を表すか⁴⁰．

例 2.5.2 $(x, y) \neq (0, 0)$ において $p(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ は調和である．実際，(2.84) に代入すればよい⁴¹．極座標を用いれば， $p(x, y) = \ln r$ ， $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ ，であり，(2.6) による検証は一層容易である．

⁴⁰Euler の等式

$$e^{\nu\theta\sqrt{-1}} = \cos(\nu\theta) + \sqrt{-1}\sin(\nu\theta)$$

を利用すると総和を計算し易い．

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} r^\nu e^{\nu\theta\sqrt{-1}} = \frac{1}{1 - re^{\theta\sqrt{-1}}} = \frac{1 - r \cos \theta + \sqrt{-1}r \sin \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2}$$

であり，これの実部，虚部を求めることになる．

⁴¹なお，例 A.2.14 参照．

注意 2.5.1 $(x, y) \neq (0, 0)$ で定義された関数

$$P_2(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \log \{x^2 + y^2\},$$

は対数ポテンシャル (の密度関数) である .

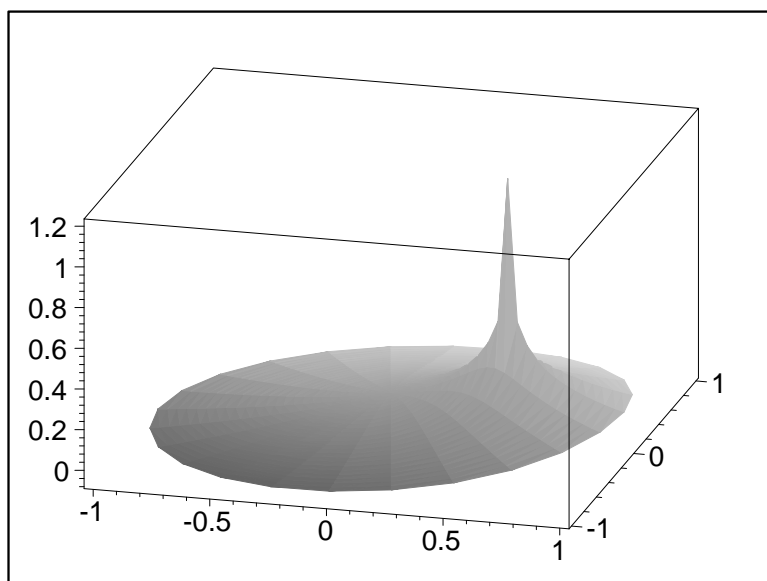


図 2.11: $P_2(x - \frac{1}{2}, y)$ (対数ポテンシャルの平行移動) のグラフ

問 2.5.3 $\epsilon > 0$ とする .

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{\epsilon^2 < x^2 + y^2 < 1} |P_2(x, y)| dx dy$$

の収束を確かめよ⁴² .

問 2.5.4 $f(r)$ を $r \geq 0$ で連続な関数とする . $r > 0$ で C^2 -級の $u(r)$ が

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} u(r) \right) = f(r), \quad 0 < r < 1 \quad (2.90)$$

⁴² 原点を極とする極座標で表せば

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\pi \int_{\epsilon}^1 |\log r| r dr$$

の収束を論ずることになる .

$$u(1) = 0, \quad u(0+) = \lim_{r \rightarrow 0} u(r) \text{ が存在する}$$

を満たすならば,

$$u(0+) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 f(r) r \log r \, dr \quad (2.91)$$

である⁴³. $u(r)$ が満たす微分方程式が (2.90) ではなくて, $n \geq 3$ として,

$$\frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} u(r) \right) = f(r) \quad (2.92)$$

ならば, (2.91) はどう変わるか⁴⁴.

命題 2.5.1 $u(x, y)$ は平面内の領域 Ω において調和であるとする. $(x_0, y_0) \in \Omega$ とし, この点を中心とする半径 $\rho > 0$ の円板が Ω に含まれるとする. このとき,

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + \rho \cos \theta, y_0 + \rho \sin \theta) \, d\theta \quad (2.93)$$

が成り立つ. すなわち, 調和関数の値は, その点を中心とする円周上での関数値の平均になる⁴⁵.

[証明] 点 (x_0, y_0) を極, $y = y_0$ を始線とする極座標を (r, θ) とし, $u(r, \theta) = u(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta)$ および $v(r) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{r}{\rho}$ とおく. $\epsilon > 0$ を十分小さくとって, 領域

$$\Omega_{\rho, \epsilon} = \{(x, y); \epsilon^2 < |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 < \rho^2\} \subset \Omega$$

において, $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$ であり, また,

$$\begin{aligned} \Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v = \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} u \cdot v - u \cdot r \frac{\partial}{\partial r} v \right\} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} u \cdot v - u \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} v \right\} \end{aligned}$$

だから, $r = \rho$ で $v = 0$ となることに注意すると,

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{\Omega_{\rho, \epsilon}} \{\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v\} \, dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-u \cdot r \frac{\partial}{\partial r} v \Big|_{r=\rho} - \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} u \cdot v - u \cdot r \frac{\partial}{\partial r} v \right\} \Big|_{r=\epsilon} \right) d\theta \end{aligned}$$

⁴³ $v(r) = \log r$ とすると,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} u \right) v - u \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} v \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left[\frac{\partial}{\partial r} u \cdot v - u \cdot \frac{\partial}{\partial r} v \right] \right)$$

となる.

⁴⁴ $n \geq 3$ として

$$u(0+) = \frac{1}{2-n} \int_0^1 f(r) r \, dr$$

となる. 詳細は (2.91) の導出と基本的には同様である. ただし, $v(r) = \frac{1}{2-n}(r^{2-n} - 1)$ を $\log r$ の代わりに考察する.

⁴⁵ (2.93) を調和関数の平均値原理ということがある.

が導かれる。 $\epsilon \rightarrow 0$ として, (2.93) を得る。

[証明終]

次に掲げる最大値の原理は (2.93) の帰結である。

命題 2.5.2 連結開集合 Ω における調和関数 $u(x, y)$ が $(x_0, y_0) \in \Omega$ で最大値 M をとるならば, 実は, Ω において $u(x, y) \equiv M$ である。

[証明] $\rho > 0$ が十分小さければ, 中心 (x_0, y_0) , 半径 $\rho > 0$ の円周は, その内部をこめて, Ω に含まれる。(2.93) から, この円周上で $u(x, y)$ の値は M でなければならないことがわかる。したがって, $u(x, y)$ が最大値 M をとる点から成る集合 $\Omega^M = \{(x, y) \in \Omega; u(x, y) = M\}$ は Ω の開部分集合である。一方, Ω^M は, 1点集合 $\{M\}$ の連続関数 u による逆像, $\Omega^M = u^{-1}(\{M\})$, でもあるから, 閉集合でもある。すなわち, Ω の連結性から, $\Omega = \Omega^M$ である。
[証明終]

2.5.2 Poisson の公式

$\Omega_R \subset \mathbb{R}^2$ を, 原点 O を中心とする半径 $R > 0$ の開円板とする。このとき, 境界 $\partial\Omega_R$ は中心 O , 半径 R の円周である (境界 $\partial\Omega_R$ の近くで) 予め与えられた関数と $\partial\Omega$ 上で値が一致するような調和関数を求めよう。すなわち, 極座標で表せば, この境界値問題は, 与えられた周期関数 $g(\theta)$ から

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u(r, \theta) &= 0, \quad 0 < r < R, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \\ u(R, \theta) &= g(\theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi \end{aligned} \quad (2.94)$$

となるような関数 $u(r, \theta)$ を求めることになる。ただし, 直交座標では原点でもなめらかであると考えから, $r \rightarrow 0$ のときに $u(r, \theta)$ は収束するものとする。

命題 2.5.3 (2.94) の解は

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - t) + r^2} g(t) dt \\ & \quad 0 \leq r < R, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \end{aligned} \quad (2.95)$$

で与えられる。(2.95) は Poisson の積分公式とよばれる。

[証明] まず, $g(\theta)$ は周期 2π の関数と考えることができるので, Fourier 級数に展開しよう:

$$g(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\} \quad (2.96)$$

ただし,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \cos nt \, dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \sin nt \, dt, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.97)$$

である. そこで, 境界値が $\cos n\theta$ または $\sin n\theta$ であるような調和関数を要素解として, これらを重ね合わせると, $r < R$ のとき,

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \{a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\}$$

が得られる. (2.97) と余弦関数の加法定理より,

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\theta - t) \right\} g(t) \, dt$$

となる⁴⁶. 一方, $r < R$ ならば,

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\theta - t) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - t) + r^2} \quad (2.98)$$

は容易に示される.

[証明終]

問 2.5.5 (2.98) を検証せよ⁴⁷.

例 2.5.3 $0 < \rho < R$, $0 \leq \phi < 2\pi$ とする. 境界値

$$g(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \log(R^2 - 2R\rho \cos(\theta - \phi) + \rho^2) \quad (2.99)$$

に対して, (2.94) の解を $w(r, \theta; \rho, \phi)$ とすると,

$$w(r, \theta; \rho, \phi) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) \log(R^2 - 2R\rho \cos t + \rho^2)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi - t) + r^2} \, dt$$

と表される. 特に,

$$G_R(r, \theta; \rho, \phi) = -\frac{1}{4\pi} \log(r^2 - 2r\rho \cos(\theta - \phi) + \rho^2) - w(r, \theta; \rho, \phi) \quad (2.100)$$

とおくと, $G_R(r, \theta; \rho, \phi)$ は r, θ の関数として, $(r, \theta) \neq (\rho, \phi)$ において, 調和であり, さらに, 境界値は

$$G_R(r, \theta; \rho, \phi)|_{r=R} = 0 \quad (2.101)$$

となる.

⁴⁶積分記号と総和記号の交換は $r < R$ の基づく.

⁴⁷ $\cos n(\theta - t)$ が $e^{ni(\theta-t)}$ の実数部分であることを利用して左辺を処理せよ. 問 2.5.2 参照.

注意 2.5.2 現実には $G_R(r, \theta; \rho, \phi)$ を例 2.5.3 のように計算するのは得策ではない。点 $Q(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi)$ を円 Ω_R に関して反転した点 Q' を考えよう。 $Q'(\rho' \cos \phi, \rho' \sin \phi)$, $\rho' = \frac{R^2}{\rho}$ である。したがって,

$$w(r, \theta; \rho, \phi) = -\frac{1}{4\pi} \log \left(r^2 - 2\frac{R^2 r}{\rho} \cos(\theta - \phi) + \frac{R^4}{\rho^2} \right) + \frac{1}{2\pi} \log \frac{R}{\rho}$$

である⁴⁸。したがって,

$$G_R(r, \theta; \rho, \phi) = -\frac{1}{4\pi} \log \frac{R^2(r^2 - 2r\rho \cos(\theta - \phi) + \rho^2)}{r^2 \rho^2 - 2R^2 r \rho \cos(\theta - \phi) + R^4}$$

となる。

さて, Ω_R で与えられた有界連続な関数 f に対し, $-\Delta u = f$ を Ω_R で満足し, 境界 $\partial\Omega_R$ の上では消える (つまり, 値が 0 となる) ような有界連続な関数 u を求めよう。すなわち (極座標で表せば) 境界値問題

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u(r, \theta) = -f(r, \theta), \quad (2.102)$$

$$r < R, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

$$u(R, \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (2.103)$$

を考えることになる。 $0 < \epsilon < R - \rho$ とし,

$$\Omega_R^\epsilon(\rho, \phi) = \left\{ (r, \theta); \begin{array}{l} (r \cos \theta - \rho \cos \phi)^2 + (r \sin \theta - \rho \sin \phi)^2 > \epsilon^2, \\ 0 \leq r < R, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \end{array} \right\}$$

とおく。 $\Omega_R^\epsilon(\rho, \phi)$ は, 開円板 Ω_R から中心 $(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi)$, 半径 ϵ の開円板 $B_\epsilon(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi)$ を取り除いて得られる領域を表す。特に, $G(r, \theta; \rho, \phi)$ は, $\Omega_R^\epsilon(\rho, \phi)$ において調和である。一方, $\Omega_R^\epsilon(\rho, \phi)$ の境界は $\partial\Omega_R$ (を反時計廻りに向き付けたもの) と $B_\epsilon(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi)$ の周 $\partial B_\epsilon(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi)$ (を時計廻りに向き付けたもの) からなる。

$u = u(r, \theta)$, $v = G_R(r, \theta; \rho, \phi)$ として,

$$\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} u \cdot v - u \cdot \frac{\partial}{\partial x} v \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} u \cdot v - u \cdot \frac{\partial}{\partial y} v \right)$$

に Green の定理⁴⁹ を適用しよう。

⁴⁸(2.94) の解は後述の注意 2.5.3 と同様にして一意に定まることがわかる。

⁴⁹(xy - (直交) 座標系では) 定理の主張はつぎの通り: 平面領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ は区分的に定めらるかで, 正 (左手に Ω の内部があるよう) に向き付けられているとする。 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ が $\Omega \cup \partial\Omega$ で連続, Ω で微分可能ならば,

$$\iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} P(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} Q(x, y) \right\} dx dy = \int_{\partial\Omega} \{ P(x, y) dy - Q(x, y) dx \}$$

がなりたつ。

$\Omega_R^\epsilon(\rho, \phi)$ では $\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v = -f \cdot v$ であり, u, v のいずれの境界値も境界 $\partial\Omega_R$ で消えるから,

$$\begin{aligned} & - \iint_{\Omega_R^\epsilon(\rho, \phi)} f \cdot v \, dx dy \\ &= - \int_{\partial B_\epsilon(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi)} v \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} u \, dy - \frac{\partial}{\partial y} u \, dx \right) \\ & \quad + \int_{\partial B_\epsilon(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi)} u \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} v \, dy - \frac{\partial}{\partial y} v \, dx \right) \end{aligned} \quad (2.104)$$

である. (2.104) の整理のために, $(x_0, y_0) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi)$ を極. $\theta = \phi$ を始線とする極座標⁵⁰ (r', θ') を利用する. (2.104) 左辺は, $\epsilon \rightarrow 0$ のときに収束し⁵¹, したがって, 積分範囲を Ω_R に改めてよい. $\partial B_\epsilon(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi)$ では

$$\frac{\partial}{\partial x} v \, dy - \frac{\partial}{\partial y} v \, dx = \epsilon \frac{\partial}{\partial r'} v \, d\theta'$$

だから, 特に,

$$\epsilon \frac{\partial}{\partial r'} v = -\frac{1}{2\pi} - \epsilon \frac{\partial}{\partial r'} w$$

であり, したがって, (2.104) 右辺第2項は

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\epsilon(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi)} u \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} v \, dy - \frac{\partial}{\partial y} v \, dx \right) = -u(x_0, y_0)$$

となる. (2.104) 右辺第1項は

$$\epsilon \int_0^{2\pi} \left\{ (\log \epsilon + w) \frac{\partial}{\partial r'} u \right\} d\theta'$$

となり, これは $\epsilon \rightarrow 0$ のとき, 0 に収束する.

ここまでの議論をまとめて, 次の命題を得る.

命題 2.5.4 $f(r, \theta)$ は θ に関し周期 2π の関数で, $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta < 2\pi$ について連続とする. 境界値問題 (2.102)(2.103) の解 $u(r, \theta)$ は

$$u(\rho, \phi) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R G_R(r, \theta; \rho, \phi) f(r, \theta) r dr \quad (2.105)$$

与えられる. ここで, $G_R(r, \theta; \rho, \phi)$ は (2.100) で定めたものであり, この境界値問題の Green 関数とよばれる.

言うまでもないことではあるが, (2.100) や (2.105) は極座標の代わりに直交座標でも表せる. 円板 Ω_R の代わりに, なめらかな境界 $\partial\Omega$ を持つ平面領

⁵⁰ $r' = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \phi)}$, $\theta' = \frac{r}{r'} \arcsin(\theta - \phi)$ となる.

⁵¹ 問 2.5.3 参照. f が Ω_R で有界であれば十分である.

域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ において微分方程式を考察する場合は、一般には、 Ω に即した座標系はないから、 \mathbb{R}^2 の直交座標を使わざるを得ない。まず、 $\partial\Omega$ (の近傍) で与えられた任意の関数 $g(x, y)$ に対し、 $\partial\Omega$ での境界値が $g(x, y)$ と一致するような Ω における調和関数 $w(x, y)$ が求まるとしよう：

$$\begin{cases} \Delta w(x, y) = 0, & (x, y) \in \Omega \\ w(x, y) = g(x, y), & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.106)$$

Ω 内部の点 (x_0, y_0) をとり、 $g(x, y) = \frac{1}{4\pi} \log\{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\}$ を境界値とする Ω における調和関数を求め、 $w(x, y; x_0, y_0)$ と名づけよう。そこで、

$$G_\Omega(x, y; x_0, y_0) = -\frac{1}{4\pi} \log\{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\} - w(x, y; x_0, y_0) \quad (2.107)$$

とおくと、これは (2.100) に相当し、 Ω における境界値問題

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = 0, & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.108)$$

の Green 関数である。ここで、 $f(x, y)$ は、 Ω において積分可能な連続関数とする⁵²。したがって、命題 2.5.4 の (2.105) を導いたのと全く同様に、境界値問題 (2.108) の解 $u(x, y)$ は

$$u(x_0, y_0) = \iint_{\Omega} G_\Omega(x, y; x_0, y_0) f(x, y) dx dy, \quad (x_0, y_0) \in \Omega, \quad (2.109)$$

と表される。

注意 2.5.3 (2.106) が解を持つかどうかは明らかでない。しかし、1 階偏導関数が Ω において二乗可積分であるような解はせいぜい 1 個しかない。実際、 $v(x, y)$ 、 $w(x, y)$ が共通の境界値 $g(x, y)$ をとる (2.106) の解とすれば、両者の差のエネルギー積分

$$\mathcal{E}(u - v) = \iint_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x}(v - w) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}(v - w) \right)^2 \right\} dx dy$$

が消えるからである⁵³。したがって、 $w - v$ は定数となるが、境界で 0 になるから、 $w - v = 0$ とならなければならない。

問 2.5.6 (2.109) の導出を確かめよ。

⁵² $f(x, y)$ に課せられるべき条件については別に論ずることにする。

⁵³ 実際、被積分関数は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left((w - v) \frac{\partial}{\partial x} (w - v) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((w - v) \frac{\partial}{\partial y} (w - v) \right) \\ & - (w - v) (\Delta w - \Delta v) \end{aligned}$$

と書き直せるが、最後の項は消え、残りは Green の定理により、境界 $\partial\Omega$ 上の積分になる。

問 2.5.7 Ω は半平面 $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y); y > 0\}$ とする. $g(x, y)$ が有界連続のとき, (2.106) の解は

$$w(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} g(\xi, 0) d\xi, \quad y > 0, \quad (2.110)$$

で与えられる⁵⁴.

問 2.5.8 $\eta > 0$ とする.

$$g(x, 0) = -\frac{1}{4\pi} \log(x^2 + \eta^2)$$

に対しても (2.110) の $w(x, y)$ は定義できることを確かめよ. この $w(x, y)$ と \mathbb{R}_+^2 における関数

$$-\frac{1}{4\pi} \log\{x^2 + (y + \eta)^2\}$$

との関係はどうか.

問 2.5.9 $\Omega = \mathbb{R}_+^2$ に対する境界値問題 (2.108) の Green 関数として

$$G(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{4\pi} \log \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2} \quad (2.111)$$

が選べることを示せ. このとき, (2.108) の $f(x, y)$ が (2.109) の収束のために満たすべき条件を論ぜよ.

2.5.3 Neumann 問題

さて, 境界条件としては境界値を指定する代わりに, 境界における法線方向微分を指定することも考えられる. 例えば, 円板 Ω_R の内部の調和関数 $u(r, \theta)$ を, 円周 $\partial\Omega_R$ における動径方向微分が (予め与えられていた) 関数 $h(\theta)$ と一致するように決定する: すなわち, 有界な $u(r, \theta)$ を

$$\begin{cases} \Delta u(r, \theta) = 0, & 0 < r < R, 0 \leq \theta < 2\pi \\ \frac{\partial}{\partial r} u(r, \theta) = h(\theta), & r = R, 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases} \quad (2.112)$$

から解くという問題は一例である. この問題は Neumann 問題といわれる.

⁵⁴ $\partial\Omega = \{(x, 0); -\infty < x < +\infty\}$ に注意せよ. $y > 0$ のとき, (2.110) の右辺の積分が収束し, しかも, x, y に関して C^∞ -級であることは明らかであろう. さらに, 被積分関数は x, y の調和関数であることも容易にわかる. 境界条件の検証は, $y \rightarrow 0$ のとき $w(x, y) \rightarrow g(x, 0)$ となることを示せばよい. そのためには,

$$w(x, y) - g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} \{g(\xi, 0) - g(x, 0)\} d\xi$$

の成立に注意し, ついで, 積分変数を $\zeta = y\xi$ に改めてみよ.

命題 2.5.5 (2.112) が解を持つためには

$$\int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta = 0 \quad (2.113)$$

の成立が必要である。

[証明] $w(r, \theta) \equiv 1$ として, Green の公式

$$\int_0^R r dr \int_0^{2\pi} \{\Delta u \cdot w - u \cdot \Delta w\} d\theta = R \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial r} u \cdot w - u \cdot \frac{\partial}{\partial r} w \right) d\theta$$

を利用する. 左辺は消え, 右辺の整理から (2.113) が従う. [証明終]

例 2.5.4 $h(\theta) = \cos n\theta$ または $h(\theta) = \sin n\theta$ ($n = 1, 2, \dots$) として, (2.112) の解を求めよう. (2.89) を考慮すれば, 求める解は

$$u(r, \theta) = \frac{R}{n} \left(\frac{r}{R} \right)^n \cos n\theta \quad \text{または} \quad \frac{R}{n} \left(\frac{r}{R} \right)^n \sin n\theta$$

である.

この結果より, $h(\theta)$ が

$$h(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \{c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta\} \quad (2.114)$$

と Fourier 級数展開される⁵⁵ならば, (2.112) の解 $u(r, \theta)$ は c' を任意の定数として,

$$u(r, \theta) = c' + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{r^n}{R^{n-1}} \{c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta\}$$

と表されるはずである. 以下, 命題 2.5.3 を導いたのと同様に考えよう.

まず, 次のことに注意しよう.

補題 2.5.1 $0 \leq a < 1$ とする.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \frac{\cos n\theta}{n} = -\frac{1}{2} \log(1 - 2a \cos \theta + a^2) \quad (2.115)$$

である.

[証明] $0 \leq a < 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ において, この級数は (広義一様) 収束する. この級数の定める関数を $\nu(a, \theta)$ とおこう. $\nu(a, 0) = -\log(1 - a)$ は明らかであろう. また,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \nu(a, \theta) = -\sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin n\theta$$

⁵⁵(2.97) 参照.

である．右辺は，

$$i \sum_{n=1}^{\infty} (ae^{i\theta})^n = i \frac{ae^{i\theta}}{1 - ae^{i\theta}}$$

の実数部分だから，

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \nu(a, \theta) = -\frac{a \sin \theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2}, \quad \nu(a, 0) = -\log(1 - a)$$

を得る．これを解けば，(2.115) が出る． [証明終]

以上をまとめて，次を得る．

命題 2.5.6 $0 < r < R$ とする．

$$N(r, \theta) = -\frac{R}{2\pi} \log \left(1 - 2\frac{r}{R} \cos \theta + \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (2.116)$$

とおく．(2.113) のもとで，Neumann 問題 (2.112) の解は

$$u(r, \theta) = c + \int_0^{2\pi} N(r, \theta - t) h(t) dt, \quad 0 \leq r < R, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad (2.117)$$

と表される．

Dirichlet 問題 (2.94) と Neumann 問題 (2.112) の関係を調べよう．Poisson の積分公式 (2.95) を熟視すると，

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(t) + r^2} \{g(t + \theta) - g(\theta)\} dt + g(\theta)$$

がわかる．これは，境界 $\partial\Omega_R$ における動径微分の計算の際に予想される積分の特異性の処理に有効であると期待される．特に， $g(\theta)$ の Fourier 級数展開に対する効果をみるために $g(t + \theta) - g(\theta)$ を $\cos n(t + \theta) - \cos n\theta$ または $\sin n(t + \theta) - \sin n\theta$ で代替した積分を考えると，被積分項に $\sin nt$ を含むものは t の奇関数の積分としていずれも消えてしまうことがわかる．したがって，(2.96) から，境界 $\partial\Omega_R$ における動径微分の Fourier 級数展開

$$\frac{\partial}{\partial r} u(r, \theta) \Big|_{r=R} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos nt}{1 - \cos t} dt \right) \{a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\}$$

が出る．

問 2.5.10 $n = 1, 2, \dots$ に対し

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos nt}{1 - \cos t} dt = n$$

となることを示せ⁵⁶．

⁵⁶左辺の積分は， $\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ などにより，複素平面の単位円周 C 上の線積分

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(1 - z^n)^2 dz}{(1 - z)^2 z^n} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(z^{n-1} + \dots + 1)^2}{z^n} dz$$

に帰着される．したがって，留数を計算すればよい．

問 2.5.10 を参考にすれば, Dirichlet 問題 (2.94) と Neumann 問題 (2.112) は, (2.113) のもとで,

$$h(\theta) = \frac{1}{R} \sum_{n=1}^{\infty} n \{a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\} \quad (2.118)$$

によって関係づけられることになる. したがって, Fourier 級数の水準では, (2.113) (2.114) を考慮して, 与えられた $h(\theta)$ の Fourier 係数 から計算した

$$a_n = \frac{R}{n} c_n, \quad b_n = \frac{R}{n} d_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

を Fourier 係数として持つ $g(\theta)$ を境界値とする Dirichlet 問題の解が $h(\theta)$ に対応する Neumann 問題の解を与えるのである.

ところで, (2.118) 右辺は形式的に

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta\} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin n(\theta - t) g(t) dt \right) \end{aligned}$$

を R で除したものと表される. 一方, $0 < a < 1$ として

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin n(\theta - t) = \frac{a \sin(\theta - t)}{1 - 2a \cos(\theta - t) + a^2}$$

であり⁵⁷, しかも

$$\int_0^{2\pi} \frac{a \sin(\theta - t)}{1 - 2a \cos(\theta - t) + a^2} dt = 0$$

である. したがって, $g(\theta)$ がなめらかならば,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta\} \\ &= \lim_{a \rightarrow 1} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a \sin(\theta - t)}{1 - 2a \cos(\theta - t) + a^2} \{g(t) - g(\theta)\} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta - t)}{1 - \cos(\theta - t)} \{g(t) - g(\theta)\} dt \end{aligned}$$

という解釈ができる. (2.118) は, かくて,

$$h(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta - t)}{1 - \cos(\theta - t)} \{g(t) - g(\theta)\} dt \right) \quad (2.119)$$

とかける.

⁵⁷ (2.115) を使え.

注意 2.5.4 Neumann 問題は, Ω_R に替えて一般の領域 Ω としても設定できる. 境界 $\partial\Omega$ が区分的になめらかであるような有界な Ω の場合には, 命題 2.5.5 と全く同様の論法で, (2.113) の類比が成り立つことがわかる.

簡単な非有界な例として, 上半平面 $\Omega = \mathbb{R}_+^2$ の場合を考えよう.

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= 0, \quad -\infty < x < +\infty, y > 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} u(x, 0) &= h(x), \quad -\infty < x < +\infty. \end{aligned} \quad (2.120)$$

$h(x)$ が直線上で可積分, $\frac{\partial}{\partial y} u(x, y)$ が半平面 \mathbb{R}_+^2 上で可積分ならば, この場合も,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx = 0 \quad (2.121)$$

が成り立つことが必要である.

問 2.5.11 (2.121) を検証せよ⁵⁸.

2.5.4 ラプラス作用素の固有値問題

一般の平面領域 Ω において, Dirichlet 境界条件のもとでの固有値問題を考える. すなわち,

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= \lambda u(x, y) \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned} \quad (2.122)$$

が定数 λ と自明でない(実数値)関数 u によって満たされるとしよう. 長方形領域の場合と同じく, λ は固有値であり, 対応する固有関数が u である.

補題 2.5.2 固有値は負の実数 $\lambda = -\mu^2 < 0$ でなければならない.

[証明] まず,

$$\lambda u \cdot u = \Delta u \cdot u = \operatorname{div}(u \cdot \nabla u) - \nabla u \cdot \nabla u$$

に注意しよう. したがって,

$$\lambda = - \frac{\iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u \, dx dy}{\iint_{\Omega} u^2 \, dx dy}$$

となる. 右辺の分子が消えるのは $u \equiv \text{定数}$ のときだが, 境界条件から u は自明, $u \equiv 0$ となり, u に対する非自明という要請に反する. [証明終]

固有値が異なると, 固有関数は直交する.

⁵⁸Green の公式の応用である.

補題 2.5.3 $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$ はそれぞれ固有値 λ_1 , λ_2 に対応する固有関数とする. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば

$$\iint_{\Omega} u_1(x, y) u_2(x, y) dx dy = 0$$

となる.

[証明] Green の公式と境界条件より,

$$\iint_{\Omega} \{\Delta u_1(x, y) \cdot u_2(x, y) - u_1(x, y) \cdot \Delta u_2(x, y)\} dx dy = 0$$

である. ところが, u_1 , u_2 が固有関数だから, 左辺は,

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \iint_{\Omega} u_1(x, y) u_2(x, y) dx dy$$

に他ならない.

[証明終]

半径 $\rho > 0$ の円板 Ω_ρ の場合を考察しよう. 原点を Ω_ρ の中心とし, 原点を極, x -軸を始線とする極座標で考える. 固有値問題 (2.122) は, 次の形になる:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} u(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u(r, \theta) &= -\mu^2 u(r, \theta), \\ u(\rho, \theta) &= 0 \end{aligned} \quad (2.123)$$

を満足する $\mu \neq 0$ と $u(r, \theta) \neq 0$ を求めよ. ただし, $u(r, \theta)$ は Ω_ρ においてなめらかであるべきだから, θ に関しては, 本来, 周期 2π であり, 極では特異性が現われない, つまり, $r \rightarrow 0$ のときに, $u(r, \theta)$ の極限值が存在することを要請しなければならない.

まず, $u(r, \theta)$ を変数分離型 $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ として検討しよう. この際, $\Theta(\theta)$ は 2π だから

$$\Theta(\theta) = \cos n\theta \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{または} \quad \sin n\theta \quad (n = 1, 2, \dots)$$

として考える. $R(r)$ については

$$R(\rho) = 0 \quad \text{および} \quad \lim_{r \rightarrow 0} R(r) \quad \text{が存在する}$$

ことを要請する. $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ を (2.123) に代入すれば,

$$R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) - \frac{n^2}{r^2} R(r) = -\mu^2 R(r)$$

すなわち

$$r^2 R''(r) + r R'(r) + (\mu^2 r^2 - n^2) R(r) = 0 \quad (2.124)$$

が従う.

ところで，常微分方程式

$$t^2 y''(t) + t y'(t) + (t^2 - n^2) y(t) = 0 \quad (2.125)$$

は， n -次の Bessel の微分方程式とよばれ（変数 t を複素領域まで広げて）詳しく研究されている．(2.125) には正則な解があり，第1種 n -次 Bessel 関数 $J_n(t)$ とよばれる． $J_n(t)$ の詳細な性質に立ち入る余裕はないが，(2.124) を満たす $R(r)$ は（定数倍を除いて）

$$R(r) = J_n(\mu r)$$

と表されることがわかる．さらに， $R(\rho) = 0$ の要請は

$$J_n(\mu \rho) = 0$$

となるから， $J_n(t)$ の零点の情報から，(2.123) の固有値 μ もわかる．すなわち，固有値問題 (2.123) は，Bessel 関数の情報に集約されてしまうのである．

第一種 n -次 Bessel 関数 $J_n(t)$ の正の零点を $0 < a_{n0} < a_{n1} < a_{n2} < \dots$ とする．すると，上の注意から，(2.123) の固有値は

$$-\left(\frac{a_{nk}}{\rho}\right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

となる．対応する固有関数は

$$J_n\left(\frac{a_{nk}}{\rho} r\right) \cos n\theta, \quad J_n\left(\frac{a_{nk}}{\rho} r\right) \sin n\theta$$

である．

第3章 1階の偏微分方程式

3.1 1階の偏微分方程式

\mathcal{D} を適当な d -次元領域とし, $\mathcal{D} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ で定義されたなめらかな実数値関数

$$F(x, z, p), \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathcal{D}, \quad (z, p) = (z, p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d,$$

が, 超曲面 $F(x, z, p) = 0$ において (p) のいずれかに依存している, すなわち,

$$\left(\frac{\partial}{\partial p_1} F(x, z, p), \dots, \frac{\partial}{\partial p_d} F(x, z, p) \right) \neq (0, \dots, 0) \quad (3.1)$$

が成立つとする.

このような F に対し, \mathcal{D} 上の実数値の量 (関数) $u(x) = u(x_1, \dots, x_d)$ とその偏導関数 $\partial_1 u(x), \dots, \partial_d u(x)$ の間の関係が, F における z, p_1, \dots, p_d にそれぞれ $u(x), \partial_1 u(x), \dots, \partial_d u(x)$ を代入して

$$F(x, u(x), \partial_1 u(x), \dots, \partial_d u(x)) = 0, \quad x \in \mathcal{D}, \quad (3.2)$$

と表されるとしよう. (3.2) は $u(x)$ の1階までの偏導関数を含む関数等式であり, $u(x)$ についての1階の偏微分方程式とよばれる. $d = 2$ ならば, 平面 \mathbb{R}^2 から原点を除いた領域 \mathcal{D} 上の

$$x_1 p_1 + x_2 p_2, \quad x_2 p_1 - x_1 p_2,$$

を F とすれば,

$$x_1 \partial_1 u(x_1, x_2) + x_2 \partial_2 u(x_1, x_2) = 0, \quad x_2 \partial_1 u(x_1, x_2) - x_1 \partial_2 u(x_1, x_2) = 0,$$

は (3.2) の例になる.

問 3.1.1 $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$ とし,

$$z p_1 + p_2, \quad \dots$$

とおく. (3.2) に対応する1階偏微分方程式を求めよ¹.

¹求める方程式は

$$u(x_1, x_2) \partial_1 u(x_1, x_2) + \partial_2 u(x_1, x_2) = 0$$

である. 非粘性 Burgers 方程式という.

3.1.1 ベクトル場と積分曲線

d -次元領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ において、なめらかな関数 $v_j(x)$, $j = 1, \dots, d$, を係数とする1階の線形偏微分作用素

$$\mathfrak{V} = \sum_{j=1}^d v_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (3.3)$$

を考えよう。係数を成分とするベクトル $(v_1(x), \dots, v_d(x))$ は、 Ω にベクトル場

$$\mathbf{v}(x) = (v_1(x), \dots, v_d(x))$$

と対応する常微分方程式系

$$\dot{x} = \mathbf{v}(x) \quad \text{すなわち} \quad \dot{x}_1 = v_1(x), \dots, \dot{x}_d = v_d(x) \quad (3.4)$$

を定める ($\dot{}$ は $x = x(t)$ として $\frac{d}{dt}$ を表す)。

命題 3.1.1 ベクトル場 $\mathbf{v}(x)$ は Ω 上いたるところ 0 にならないとする。任意の $y \in \Omega$ に対し、 $t = 0$ で y (すなわち、 $x(0) = y$) となる常微分方程式系 (3.4) の (局所) 解 $x = x(t)$ がただ一つ存在する。この解を改めて $x = X(t; y)$ とかけば、 $x = X(t; y)$ は Ω 内の点 y を通る曲線を定める。この曲線はベクトル場 $\mathbf{v}(x)$ の積分曲線である。

これは常微分方程式の一般論から従う。ただし、解が $-\infty < t < +\infty$ に対して存在するかどうかは Ω の形状や $\mathbf{v}(x)$ の構造に依存することなので、ここではこれ以上言及しない²。当分、話を簡単にするために、必要なら Ω をさらに制限することにより、 Ω において $v_1(x) \neq 0$ が成り立つと仮定する。

例 3.1.1 $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ 上のベクトル場 $\mathbf{v}(x) = (x_1, x_2)$ を考える。 $y = (y_1, y_2) \neq (0, 0)$ を通る積分曲線は

$$X(t; y) = (y_1 e^t, y_2 e^t), \quad -\infty < t < +\infty$$

である。特に、 $x_1 = y_1 e^t \neq 0$ の範囲では、 $e^t = \frac{x_1}{y_1}$ によって、 t が消去できて、 $x_2 = \frac{y_2}{y_1} x_1$ となる。

例 3.1.2 $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ 上のベクトル場 $\mathbf{v}(x) = (x_2, -x_1)$ を考える。 $y = (y_1, y_2) \neq (0, 0)$ を通る積分曲線は

$$X(t; y) = (y_1 \cos t + y_2 \sin t, y_2 \cos t - y_1 \sin t), \quad -\infty < t < +\infty$$

すなわち、中心が $(0, 0)$ 、半径が $\sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ の円周を描く。特に、 $(y_1, y_1) = (0, \rho)$, $\rho > 0$, の近傍で、 t が十分に小さいときは、 t を消去して $x_2 = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 - x_1^2}$ と表すことができる。

²文献、例えば、Arnold を見られたい。

命題 3.1.2 ベクトル場 $\mathbf{v}(x)$ において $v_1(x) = 1$ とする . 点 $y^0 \in \Omega$ の近傍の任意の点 $y = (y_1^0, y')$ を通る積分曲線を

$$x_1 = x_1, x_2 = X_2(x_1, y), \dots, x_d = X_d(x_1, y),$$

と表すことができる . 特に , $x_1 = y_1^0$ の近傍で

$$(x_1, y_2, \dots, y_d) \mapsto (x_1, X_2(x_1, y), \dots, X_d(x_1, y)) \quad (3.5)$$

は微分同相である .

実際 , 命題 3.1.1 のパラメータ t によると , $x_1 = X_1(t, y) = t + y_1^0$ となるべきだから , $t = x_1 - y_1^0$ となり , $X_2(t, y)$ 以下にこの t を代入したものを改めて $X_2(x_1, y)$ などと書き表すことができる . あるいは , $v_1(x) \equiv 1$ より ,

$$\frac{d}{dx_1} x_2 = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{v_2(x)}{1} = v_2(x), \dots,$$

と書くこともできる . (3.5) は微分方程式系の解だから 1対1 は明らかである . 逆写像の微分可能性はヤコビアン

$$\begin{aligned} J(x_1) &= \det \left(\frac{\partial(x_1, X_2(x_1, y), \dots, X_d(x_1, y))}{\partial(x_1, y_2, \dots, y_d)} \right) \\ &= \det \left(\frac{\partial(X_2(x_1, y), \dots, X_d(x_1, y))}{\partial(y_2, \dots, y_d)} \right) \end{aligned}$$

を計算する . $J(y_1^0) = 1$ であって , さらに ,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} J(x_1) = \left(\sum_{j=2}^d \frac{\partial}{\partial x_j} v_j(x) \right) \Bigg|_{x=X(x_1, y)} J(x_1) \quad (3.6)$$

だから , $J(x_1)$ が意味を持つ限り , $J(x_1) > 0$ である . したがって , (3.5) は局所的な微分同相である .

問 3.1.2 (3.6) の成立を確かめよ .

(3.5) の逆写像

$$(x_1, x') \mapsto (x_1, Y'(x_1, y_1^0, x')) \quad (3.7)$$

は点 y^0 の近傍での座標変換 $(x_1, x') \mapsto (x_1, y')$ を引起す . ここで , $'$ は , $x' = (x_2, \dots, x_d)$ のように , 添え数が $2, \dots, d$ の部分を表す .

命題 3.1.3 ベクトル場 $\mathbf{v}(x)$ において $v_1(x) \equiv 1$ とする . このとき , y^0 の近傍における座標系 (x_1, y') で , 1階偏微分作用素 \mathfrak{D} は $\frac{\partial}{\partial x_1}$ に変換される .

実際, $U(x_1, y')$ を x -座標に引き戻すには $u(x_1, x') = U(x_1, Y'(x_1, y_1^0, x'))$,
あるいは $U(x_1, y') = u(x_1, X'(x_1, y))$ だから,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} U(x_1, y') = \mathfrak{A}(u)(x_1, X'(x_1, y))$$

である.

問 3.1.3 (3.5) (3.7) において,

$$X'(x_1, y_1^0, Y'(x_1, y_1^0, x')) = x', \quad Y'(x_1, y_1^0, X'(x_1, y_1^0, y')) = y'$$

が成り立つことを示せ.

問 3.1.4 $i, j = 2, \dots, d$ について,

$$\sum_{k=2}^d \frac{\partial}{\partial y_k} X_i(x_1, y_1^0, y') \Big|_{y'=Y'(x_1, y_1^0, x')} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} Y_k(x_1, y_1^0, x') = \delta_{ij}$$

が成り立つことを確かめよ. ただし,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

(クロネッカーのデルタ) である.

問 3.1.5 $i, j = 2, \dots, d$ について

$$\sum_{k=2}^d \frac{\partial}{\partial x_k} Y_i(x_1, y_1^0, x') \Big|_{x'=X'(x_1, y_1^0, y')} \cdot \frac{\partial}{\partial y_j} X_k(x_1, y_1^0, y') = \delta_{ij}$$

が成り立つことを確かめよ.

つぎの問は命題 3.1.3 の別な表現でもある.

問 3.1.6 $i = 2, \dots, d$ について,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} Y_i(x_1, y_1^0, x') + \sum_{k=2}^d v_k(x_1, x') \frac{\partial}{\partial x_k} Y_i(x_1, y_1^0, x') = 0$$

が成り立つことを示せ.

3.1.2 1階線形微分方程式の局所解

$g(x)$ は Ω 上の関数とする. 偏微分方程式

$$\mathfrak{A}(u)(x) = \sum_{j=1}^d v_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} u(x) = g(x) \quad (3.8)$$

を考えよう ((3.3) 参照). Ω において $v_1(x) \neq 0$ とする . このとき , 必要なら (3.8) の両辺を $v_1(x)$ で割っておくことにより , $v_1(x) \equiv 1$ と仮定することができる .

命題 3.1.4 $g(x)$ は Ω 上の連続関数とする . 1階線形偏微分方程式 (3.8) は (局所的に) 解ける .

実際 , y^0 の近傍で , 命題 3.1.3 で採用した座標系 (x_1, y') に (3.8) を変換すると

$$\frac{\partial}{\partial x_1} U(x_1, y') = G(x_1, y') \quad (3.9)$$

となる . ただし ,

$$U(x_1, y') = u(x_1, X'(x_1, y_1^0, y')), \quad G(x_1, y') = g(x_1, X'(x_1, y_1^0, y'))$$

である . したがって ,

$$\begin{aligned} U(x_1, y') &= U(y_1^0, y') + \int_{y_1^0}^{x_1} G(s, y') ds \\ &= u(y_1^0, y') + \int_{y_1^0}^{x_1} g(s, X'(s, y_1^0, y')) ds \end{aligned}$$

となる . もとの座標系にもどすには , (3.7) によって , $y' = Y'(x_1, y_1^0, x')$ を代入すればよい .

注意 3.1.1 上の構成により , 任意に $(d-1)$ -変数の連続関数 $h(x')$ をとり , $x_1 = y_1^0$ において ,

$$u(y_1^0, x') = h(x') \quad (3.10)$$

を指定して (3.8) の局所解が得られることがわかる . しかも , そのような局所解は一意的である . 実際 , $g(x) = 0$ および $u(y_1^0, x') = 0$ を満足する解は , y^0 の近傍で $u(x) \equiv 0$ だけである . すなわち , (3.9) では , $G(x_1, y') = 0$, $U(0, y') = 0$ であり , したがって , 微分可能な解は , $U(x_1, y') = 0$, もとの座標系で , $u(x) = 0$ しかない .

注意 3.1.2 $u_0(x) = u(y_1^0, Y'(x_1, y_1^0, x'))$ が $\mathfrak{D}(u_0)(x) = 0$ を満たすことが , 問 3.1.6 を利用すると直ちにわかる . 同様に ,

$$g_1(x) = \int_{y_1^0}^{x_1} g(s, X'(s, y_1^0, Y'(x_1, y_1^0, x'))) ds$$

が $\mathfrak{D}(g_1)(x) = g(x)$ を満足することも容易に確かめられる .

例 3.1.3 $\Omega = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ; x_1 > 0 \}$ において , 方程式

$$\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) u(x_1, x_2) = 0$$

を考える． $F(\tau)$ を τ の微分可能な任意の関数とする． $u(x_1, x_2) = F\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ は解である．実は，この方程式の場合，原点を極， x_1 -軸を始線とする極座標

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta$$

が自然な座標系である．事実，極座標に改めると，方程式は

$$r \frac{\partial}{\partial r} U(r, \theta) = 0, \quad U(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta),$$

となり，解 $U(r, \theta)$ は r に依存せず， θ のみの関数でなければならないことがわかる．また，領域 Ω は $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ にまで自然に拡張される．

問 3.1.7 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (の適当な部分領域) において，偏微分方程式

$$\left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) u(x_1, x_2) = 0$$

を解け．

3.2 1階非線型偏微分方程式

さて，1階偏微分方程式 (3.2) は，一般的には， $u(x)$ に関する線形性は期待できない．しかし，解 $u(x)$ の状況については，局所理論が中心ではあったが，昔から詳しく調べられている．

まず，偏微分方程式 (3.2)

$$F(x, u(x), \partial u(x)) = 0$$

の解 $u(x)$ の満たすべき条件を洗い出そう³． $x^0 \in \mathcal{D}$ の近くで定義された $(x^0, z^0, p^0) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ を通る偏微分方程式 (3.2) とは， $\mathcal{D} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ 内の d -次元の部分集合 $\mathcal{E} = \{(x, z(x), p(x)); F(x, z(x), p(x)) = 0\}$ であって

$$F(x, z(x), p(x)) = 0, \quad z^0 = z(x^0), \quad p^0 = p(x^0) \quad (3.11)$$

を満たし，しかも， \mathcal{D} 上のなめらかな⁴関数 $u(x)$ が存在して

$$z(x) = u(x), \quad p(x) = \partial u(x) \quad (3.12)$$

が成り立つようなものを指す⁵．当然，(3.2) が成り立つ ($u(x)$ は解である)．

³Carathéodory, C., *Calculus of Variations and partial differential equations of the first order. Part I: Partial differential equations of first order*, Holden-Day, Inc., 1965 参照．

⁴少なくとも2回連続微分可能な

⁵もってまわった表現であるが，(3.11) と (3.12) の内容の違いをはっきりと意識するためである．特に，(3.12) の第2式は \mathcal{D} の座標系の選択に依存する．ただし，ここでは座標変換の効果は追求しない．

3.2.1 特性ベクトル場

1階偏微分方程式 (3.2) の解を求める準備として, $F(x, z, p)$ から自然に従うベクトル場

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_F(x, z, p) = & \left(\frac{\partial F}{\partial p_1}(x, z, p), \dots, \frac{\partial F}{\partial p_d}(x, z, p), \sum_{k=1}^d p_k \frac{\partial F}{\partial p_k}(x, z, p), \right. \\ & \left. -\frac{\partial F}{\partial x_1}(x, z, p) - p_1 \frac{\partial F}{\partial z}(x, z, p), \dots, -\frac{\partial F}{\partial x_d}(x, z, p) - p_d \frac{\partial F}{\partial z}(x, z, p) \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

と対応する1階偏微分作用素

$$\begin{aligned} B_F = & \sum_{i=1}^d \frac{\partial F}{\partial p_i}(x, z, p) \frac{\partial}{\partial x_i} + \left(\sum_{k=1}^d p_k \frac{\partial F}{\partial p_k}(x, z, p) \right) \frac{\partial}{\partial z} \\ & - \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, z, p) + p_j \frac{\partial F}{\partial z}(x, z, p) \right) \frac{\partial}{\partial p_j} \end{aligned} \quad (3.14)$$

を考えよう. (3.13) を F の特性ベクトル場あるいは Lagrange-Charpit のベクトル場, (3.14) を F の特性微分作用素あるいは Lagrange-Charpit の偏微分作用素という⁶. F の特性ベクトル場の積分曲線を F の特性曲線という.

命題 3.2.1 $\mathbf{b}_F(x, z, p)$ の特性曲線に沿って $F(x, z, p)$ は一定である. すなわち,

$$B_F(F)(x, z, p) = 0, \quad (x, z, p) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d,$$

が成り立つ.

実際に, 代入計算を実行すればよい.

注意 3.2.1 Lagrange-Charpit の偏微分作用素 B_F の意味を説明しよう. (3.2) の解 $u(x)$ が得られているとする. (3.2) を x_j で偏微分すれば,

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} + \frac{\partial F}{\partial z} \partial_j u + \sum_{i=1}^d \frac{\partial F}{\partial p_i} \partial_j \partial_i u = 0 \quad (3.15)$$

となる. ここで, x^0 を通る \mathcal{D} 内のなめらかな曲線 $x = X(t)$, $X(0) = x^0$, を想定しよう. $\mathcal{D} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ に拡張するために,

$$Z(t) = z(X(t)) = u(X(t)), \quad P(t) = p(X(t)) = \partial u(X(t)) \quad (3.16)$$

とおこう. パラメータ t で微分すると,

$$\dot{Z} = \sum_{i=1}^d \partial_i u \dot{X}_i, \quad \dot{P}_j = \sum_{i=1}^d \partial_i \partial_j u \dot{X}_i \quad (3.17)$$

⁶いずれも本稿だけの用語である.

となる。(3.17)の第2式と(3.15)から

$$\dot{P}_j + \frac{\partial F}{\partial x_j} + \frac{\partial F}{\partial z} \partial_j u = \sum_{i=1}^d \partial_j \partial_i u \left(\dot{X}_i - \frac{\partial F}{\partial p_i} \right), \quad j = 1, \dots, d, \quad (3.18)$$

が得られる。そこで、 $X(t)$ が

$$\dot{X}_i = \frac{\partial F}{\partial p_i}(X(t), u(X(t)), \partial u(X(t))), \quad i = 1, \dots, d, \quad (3.19)$$

を満足しているとすれば、(3.18)の右辺が消え、左辺は

$$\begin{aligned} \dot{P}_j &= -\frac{\partial F}{\partial x_j}(X(t), u(X(t)), \partial u(X(t))) \\ &\quad - \frac{\partial F}{\partial z}(X(t), u(X(t)), \partial u(X(t))) \partial_j u(X(t)) \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$j = 1, \dots, d,$$

となる。また、(3.19)から、(3.17)の第1式は

$$\dot{Z} = \sum_{i=1}^d \partial_i u(X(t)) \frac{\partial F}{\partial p_i}(X(t), u(X(t)), \partial u(X(t))) \quad (3.21)$$

と書きなおされる。(3.16)を考慮すると、 $x = X(t), z = Z(t), p = P(t)$ は、 $\mathcal{D} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ 内の

$$\begin{aligned} \dot{X}_i &= \frac{\partial F}{\partial p_i}(X(t), Z(t), P(t)), \\ \dot{P}_j &= -\frac{\partial F}{\partial x_j}(X(t), Z(t), P(t)) - \frac{\partial F}{\partial z}(X(t), Z(t), P(t)) P_j(t) \\ \dot{Z} &= \sum_{k=1}^d P_k(t) \frac{\partial F}{\partial p_k}(X(t), Z(t), P(t)) \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$i = 1, \dots, d, \quad j = 1, \dots, d,$$

を満たす曲線、すなわち、ベクトル場 \mathbf{b}_F の積分曲線、特性曲線である。

例 3.2.1 $d = 2$ とし、

$$F(x, z, p) = zp_1 + p_2 \quad (3.23)$$

を考える。

$$\mathbf{b}_F = (z, 1, zp_1 + p_2, -p_1^2, -p_1 p_2)$$

と対応する偏微分作用素

$$\mathcal{B}_F = z \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + (zp_1 + p_2) \frac{\partial}{\partial z} - p_1^2 \frac{\partial}{\partial p_1} - p_1 p_2 \frac{\partial}{\partial p_2}$$

である .

$$B_F(zp_1 + p_2) = 0$$

の成立は明らかである . また , $(\xi_1, \xi_2, \zeta, \eta_1, \eta_2)$ を通る b_F の積分曲線は

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(\eta_2 + \eta_1\zeta)t^2 + \zeta t + \xi_1, \quad x_2 = t + \xi_2, \\ z &= (\eta_2 + \eta_1\zeta)t + \zeta, \quad y_1 = \frac{\eta_1}{\eta_1 t + 1}, \quad y_2 = \frac{\eta_2}{\eta_1 t + 1}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

で与えられる . したがって , $\eta_1 t + 1 > 0$ となるような t に対してのみ積分曲線は意味を持つ .

3.2.2 特性曲線の方法による偏微分方程式の局所解の構成

さて , 偏微分方程式 (3.2) を解くという観点からは , b_F の積分曲線が微分形式

$$\omega = dz - \sum_{i=1}^d p_i dx_i \quad (3.25)$$

に及ぼす効果を確認することが重要である⁷ . (x^0, z^0, p^0) の近傍に , パラメータ $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ に依存する m -次元曲面

$$\Sigma : x = \xi(\lambda), \quad z = \zeta(\lambda), \quad p = \eta(\lambda) \quad (3.26)$$

$(x^0 = \xi(\lambda^0), z^0 = \zeta(\lambda^0), p^0 = \eta(\lambda^0))$ を考えよう . Σ 上では , (3.25) は

$$\omega = \sum_{k=1}^m \omega_k^0(\lambda) d\lambda_k, \quad \omega_k^0(\lambda) = \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda_k}(\lambda) - \sum_{i=1}^d \eta_i(\lambda) \frac{\partial \xi_i}{\partial \lambda_k}(\lambda)$$

である . この曲面 Σ を通る b_F の積分曲線の族を

$$x = X(t, \lambda), \quad z = Z(t, \lambda), \quad p = P(t, \lambda)$$

と表そう ($(X(0, \lambda) = \xi(\lambda), Z(0, \lambda) = \zeta(\lambda), P(0, \lambda) = \eta(\lambda))$) . この積分曲線族に沿って , (3.25) は

$$\omega = \omega_0 dt + \sum_{k=1}^m \omega_k d\lambda_k$$

となる . ただし ,

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \dot{Z}(t, \lambda) - \sum_{i=1}^d P_i(t, \lambda) \dot{X}_i(t, \lambda) \\ \omega_k &= \frac{\partial}{\partial \lambda_k} Z(t, \lambda) - \sum_{i=1}^d P_i(t, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda_k} X_i(t, \lambda) \end{aligned} \quad (3.27)$$

⁷ z, p_1, \dots, p_d が独立変数 $x = (x_1, \dots, x_d)$ の関数ならば

$$\omega = 0 \iff p_i(x) = \partial_i z(x), \quad i = 1, \dots, d$$

である . $\omega = 0$ を $x = (x_1, \dots, x_d)$ について直接示す代わりに , 特性ベクトル場と相性がよく , しかも x に変換できる変数系で試みる .

である．まず， $\omega_0 = 0$ となることは (3.22) から直ちにわかる． ω_k , $k \geq 1$, を調べよう．

$$\dot{\omega}_k = \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \dot{Z}(t, \lambda) - \sum_{i=1}^d \dot{P}_i(t, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda_k} X_i(t, \lambda) - \sum_{i=1}^d P_i(t, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \dot{X}_i(t, \lambda)$$

に注意して，(3.22) を適用すると，

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_k &= \sum_{i=1}^d \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial p_i}(X(t, \lambda), Z(t, \lambda), P(t, \lambda)) \frac{\partial}{\partial \lambda_k} P_i(t, \lambda) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial F}{\partial x_i}(X(t, \lambda), Z(t, \lambda), P(t, \lambda)) \frac{\partial}{\partial \lambda_k} X_i(t, \lambda) \right) \right\} \\ &\quad + \frac{\partial F}{\partial z}(X(t, \lambda), Z(t, \lambda), P(t, \lambda)) \sum_{i=1}^d P_i(t, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda_k} X_i(t, \lambda) \end{aligned}$$

となる．右辺をさらに整理し，命題 3.2.1 を利用しすると，

$$\omega_k + \frac{\partial F}{\partial z}(X(t, \lambda), Z(t, \lambda), P(t, \lambda)) \omega_k = \frac{\partial}{\partial \lambda_k} F(\xi(\lambda), \zeta(\lambda), \eta(\lambda)) \quad (3.28)$$

$$k = 1, \dots, m$$

が得られる．

以上を次のようにまとめられる．

命題 3.2.2 m -次元曲面 Σ の上で， $F(x, z, p) = \text{定数}$ とする． Σ 上で微分形式 $\omega = 0$ ならば， Σ を通る特性曲線族の上で $\omega = 0$ である．

例 3.2.2 例 3.2.1 を再度取り上げる．微分可能な関数 $\phi(\lambda)$ を予め選んでおく． $\xi_1 = \lambda$, $\xi_2 = 0$, $\zeta = \phi(\lambda)$, $\eta_1 = \phi'(\lambda)$ とし， $\eta_2 = \phi'(\lambda)\phi(\lambda)$ として，(3.24) の積分曲線を考える．このとき，

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1(t, \lambda) = \phi(\lambda)t + \lambda, \quad x_2 = X_2(t, \lambda) = t, \quad z = Z(t, \lambda) = \phi(\lambda), \\ p_1 &= P_1(t, \lambda) = \frac{\phi'(\lambda)}{\phi'(\lambda)t + 1}, \quad p_2 = P_2(t, \lambda) = -\frac{\phi(\lambda)\phi'(\lambda)}{\phi'(\lambda)t + 1} \end{aligned}$$

となる．一方， η_2 の選び方より， $F(\xi, \zeta, \eta) = 0$ である ((3.23) 参照) ． $m = 1$ として (3.28) を扱うことになるが， $t = 0$ において $\omega_1 = 0$ だから，積分曲線が意味を持つ限り， $\omega_1 = 0$ である．一方，ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(t, \lambda)} = \begin{pmatrix} \phi(\lambda) & \phi'(\lambda)t + 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

だから， $\phi'(\lambda)t + 1 \neq 0$ ならば， t, λ を x_1, x_2 で

$$t = T(x_1, x_2), \quad \lambda = \Lambda(x_1, x_2)$$

と表すことができる．さらに，

$$u(x_1, x_2) = \phi(\Lambda(x_1, x_2))$$

とおけば，

$$u(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1, x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} u(x_1, x_2) = 0, \quad u(x_1, 0) = \phi(x_1)$$

の成立がわかる⁸．

問 3.2.1 $\phi(\lambda) = e^{-\lambda^2}$, $-\infty < \lambda < +\infty$, とし，変換 $(t, \lambda) \mapsto (x_1, x_2)$ について論ぜよ．

例 3.2.2 の議論を一般化すれば，偏微分方程式 (3.2) の (局所) 解の構成ができる．

命題 3.2.3 点 (x^0, z^0, p^0) において，

$$F(x^0, z^0, p^0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p_1}(x^0, z^0, p^0) \neq 0 \quad (3.29)$$

とする．このとき，適当ななめらかな関数 $u(x)$ が $x = x^0$ の近傍で

$$F(x, u(x), \partial u(x)) = 0, \quad u(x^0) = x^0, \quad \partial u(x^0) = p^0$$

を満足する．

実際，(3.29) により，適当ななめらかな関数 $f(x, z, p')$, $y' = (p_2, \dots, p_d)$, によって， (x^0, z^0, p^0) の近傍で， $F(x, z, p) = 0$ と

$$p_1 = f(x, z, p'), \quad p_1^0 = f(x^0, z^0, p'^0),$$

とが同値になる．また，必要なら平行移動によって， $x_1^0 = 0$ と仮定できる． $x'^0 = (x_2^0, \dots, x_d^0) = \lambda^0$ の $((d-1)$ -次元) 近傍で定義されたなめらかな関数 $u^0(\lambda)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{d-1})$, を (任意に) とる． $\partial' = (\partial_2, \dots, \partial_d) = \partial_\lambda$ とし，

$$v_1(\lambda) = f(0, \lambda, u^0(\lambda), \partial' u^0(\lambda))$$

とすれば，

$$F(0, \lambda, u^0(\lambda), v_1(\lambda), \partial' u^0(\lambda)) = 0$$

である．そこで，

$$x = (0, \lambda), \quad z = u^0(\lambda), \quad p = (v_1(\lambda), \partial' u^0(\lambda))$$

⁸ただし， $\phi'(\lambda)\lambda + 1 \neq 0$ に相当する条件の制約があり，一般には局所的にしか意味のない解である．

を通る b_F の積分曲線を

$$x = X(t, \lambda), \quad z = Z(t, \lambda), \quad p = P(t, \lambda)$$

とすれば, (3.27) により,

$$\omega_k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m = d - 1,$$

である. ところで, (x^0, z^0, p^0) で, ヤコビアン

$$\frac{\partial(X(t, \lambda))}{\partial(t, \lambda)} \Big|_{(x^0, z^0, p^0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial p_1}(x^0, z^0, p^0) & \cdots & & & & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \end{pmatrix}$$

は正則だから, この点の近傍で, $x = X(t, \lambda)$ から t, λ を x の関数として表せる. したがって, $Z(t, \lambda)$ を x の関数 $u(x)$ に変換できる. この $u(x)$ は (3.2) を (x^0, z^0, p^0) の近傍で満たすとともに,

$$u(0, x') = u^0(x') \quad (3.30)$$

を満足する.

問 3.2.2 $\phi = \phi(x_1, x_2, x_3)$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, であって,

$$\phi_{x_1}^2 - \phi_{x_2}^2 - \phi_{x_3}^2 = 0, \quad \phi(0, x_2, x_3) = \eta_2 x_2 + \eta_3 x_3$$

をみたすものを求めよ. ただし, η_2, η_3 は, $\eta_2^2 + \eta_3^2 > 0$ であるような定数とする⁹.

例 3.2.3 1階の偏微分方程式に対して, 特性曲線の方法が常に簡便とは限らず, また, よい解を導くとも言えない.

$$F(p_1, p_2) = p_1^2 + p_2^2 - 1$$

⁹ $F(x, z, p) = p_1^2 - p_2^2 - p_3^2$ である. $\eta_1 = \pm \sqrt{\eta_2^2 + \eta_3^2}$ とすれば, $\eta_1^2 - \eta_2^2 - \eta_3^2 = 0$ となる. 特性曲線は

$$x_1 = 2\eta_1 t = \pm 2\sqrt{\eta_2^2 + \eta_3^2} t, \quad x_2 = \xi_2 - 2\eta_2 t, \quad x_3 = \xi_3 - 2\eta_3 t$$

したがって, t, ξ_2, ξ_3 を x_1, x_2, x_3 で表すと

$$t = \pm \frac{x_1}{2\sqrt{\eta_2^2 + \eta_3^2}}, \quad \xi_2 = x_2 \pm \frac{\eta_2 x_2}{\sqrt{\eta_2^2 + \eta_3^2}}, \quad \xi_3 = x_3 \pm \frac{\eta_3 x_3}{\sqrt{\eta_2^2 + \eta_3^2}}$$

となり,

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3 = x_2 \eta_2 + x_3 \eta_3 \pm \sqrt{\eta_2^2 + \eta_3^2} x_1$$

が求める解である. 検算も容易である.

を考えよう．対応する偏微分方程式は， $u(x)$ ， $x = (x_1, x_2)$ ，はなめらかとして，

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\right)^2 - 1 = 0 \quad (3.31)$$

である．特性ベクトル場は， $p_1^2 + p_2^2 = 1$ として， $(2p_1, 2p_2, 2, 0, 0)$ ，だから， $\phi(\xi)$ ， $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ ，について， $F(\phi_{\xi_1}, \phi_{\xi_2}) = 0$ ならば， $(\xi_1, \xi_2, \phi, \phi_{\xi_1}, \phi_{\xi_2})$ を通る特性曲線を考えて上で，

$$x_1 = 2\phi_{\xi_1}(\xi)t + \xi_1, \quad x_2 = 2\phi_{\xi_2}(\xi)t + \xi_2,$$

から， ξ を t ， x の関数として表し， $z = 2t + \phi(\xi)$ に代入すれば， $z = u(x)$ が得られるはずである．ここで，例えば，

$$\phi(\xi) = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \quad (3.32)$$

とすると，

$$x_1 = \phi_{\xi_1}(\xi)(2t + \phi(\xi)), \quad x_2 = \phi_{\xi_2}(\xi)(2t + \phi(\xi)),$$

したがって，

$$z = 2t + \phi(\xi) = \pm\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (3.33)$$

となる．この解は $(x_1, x_2) = (0, 0)$ においてなめらかさを失う．一方，

$$\phi(\xi) = (\cos \alpha)\xi_1 + (\sin \alpha)\xi_2 \quad (3.34)$$

ならば，

$$\xi_1 = x_1 - 2(\cos \alpha)t, \quad \xi_2 = x_2 - 2(\sin \alpha)t$$

だから

$$z = u(x) = (\cos \alpha)x_1 + (\sin \alpha)x_2 \quad (3.35)$$

となる．この解は，すべての x に関してなめらかである．解 (3.35) は変数分離法でも得られる．すなわち， $u(x) = a(x_1) + b(x_2)$ を想定し，(3.31) に代入すると， $a'(x_1)^2 + b'(x_2)^2 = 1$ だから，

$$a'(x_1)^2 = 1 - b'(x_2)^2 = c^2 = \text{定数}$$

となる．ここで， $c = \cos \alpha$ とおくことができる．

付録 A 補遺としての種々の話題

偏微分方程式の実際上の取り扱いで重要な話題でありながら，余りにも技術的過ぎるという印象を与えるものがいくつかある．いずれも何らかの意味で合理的な計算の遂行に関わることであるが，それゆえ，体系性が見えにくい．付録としてまとめる所以である．

A.1 偏微分方程式を扱うための道具立て

偏微分方程式は基本的に古典的な微積分学の言葉で記述される．しかし，独立変数や従属変数の数も多く，関係する偏導関数の階数もさまざまである．したがって，表現が煩雑にならないように記法上の規約を設けることは重要なことである．

A.1.1 記号と規約

議論が d -次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^d の部分集合 \mathcal{R} で行われていれば， \mathcal{R} の一般の点を (x_1, \dots, x_d) という d 成分の座標で表すことができる．このとき，導関数は座標を利用して計算できる．微積分の教科書などで，偏微分の順序が重要であるとして，麗々しく，

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} u(x_1, x_2) \right) \neq \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1, x_2) \right)$$

となるような $u(x_1, x_2)$ と点 (x_1, x_2) の例が挙げてある．しかし，なめらかな関数に対しては偏微分をする順序は導関数の値に影響しない．われわれは今後必ずしもなめらかではない「関数」も考察の対象にするけれども，その場合，偏微分についてその順序が結果に影響するかもしれない解釈を採用しなければならないことだけは当面排除したいと考えている．なぜか．偏微分をするということを，作用素（あるいは演算子）として把握したいからである．特に， x_1 に関する偏微分が m あり， $\dots x_d$ に関する偏微分が n あるとき，その順序がどうであれ，皆同じ表現

$$\frac{\partial^{m+\dots+n}}{\partial x_1^m \dots \partial x_d^n}$$

を用いられるためには，偏微分の結果が順序に関係しないことが重要だからである．

さて、座標系が特定されているときは、 (x_1, \dots, x_d) で表される点を x とかき、

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad \partial_1 \partial_d = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_d}, \quad \dots$$

などと略記¹しよう。さらに、

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_d^{\alpha_d} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d), \quad (\text{A.1})$$

という簡便な表現も多用する。ここで、 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ は (d -次元の) 多重指標と呼ばれる。 ∂^α の階数は $\alpha_1 + \dots + \alpha_d$ であるが、これを

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d \quad (\text{A.2})$$

とかき、多重指標 α の長さという。また、(A.1) に対応して、

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d} \quad (\text{A.3})$$

とかくこともある。多重指標は一般的な記法として便利である。

多重指標の比較は辞書式の順序 \succ で行う。すなわち、 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ 、 $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$ に対し、

$$\alpha \succ \beta \iff \begin{cases} \alpha_1 > \beta_1 \\ \text{または} \\ \alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 > \beta_2 \\ \dots \\ \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_{d-1} = \beta_{d-1}, \alpha_d > \beta_d \\ \text{または} \\ \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_d = \beta_d \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

という順序を定めることができる。

問 A.1.1 α, β, γ は多重指標とする。次の関係式を確かめよ。

$$\begin{aligned} \alpha &\succ \alpha \\ \alpha &\succ \beta, \beta \succ \alpha &\implies & \alpha = \beta \\ \alpha &\succ \beta, \beta \succ \gamma &\implies & \alpha \succ \gamma \end{aligned}$$

さて、 $\alpha \succ \beta$ に対し、多重指標の差

$$\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_d - \beta_d) \quad (\alpha \succ \beta) \quad (\text{A.5})$$

も多重指標になる。

¹座標系を示唆する

$\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_1} \partial_{x_d}, \dots$

などの表現の意味も明らかであろう。

問 A.1.2 α, β は多重指標とする .

$$\partial^\beta(x^\alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} x^{\alpha - \beta}, & \alpha \succ \beta \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

である . ここで , $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_d!$ は多重指標の階乗を意味する .

一方 , 多重指標の和

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_d + \beta_d) \quad (\text{A.7})$$

は順序の制限なしに定義される多重指標である .

A.1.2 Leibniz の公式と微分作用素

なめらかな二つの関数 $u(x)$ と $v(x)$ の積 $u(x) \cdot v(x)$ の偏導関数は

$$\begin{aligned} \partial_1 \{u(x) \cdot v(x)\} &= \partial_1 u(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot \partial_1 v(x), \\ \partial_1^2 \{u(x)v(x)\} &= \partial_1^2 u(x) \cdot v(x) + 2\partial_1 u(x) \cdot \partial_1 v(x) + u(x) \cdot \partial_1^2 v(x), \\ \partial_1 \partial_2 \{u(x)v(x)\} &= \partial_1 \partial_2 u(x) \cdot v(x) + \partial_1 u(x) \cdot \partial_2 v(x) \\ &\quad + \partial_2 u(x) \cdot \partial_1 v(x) + u(x) \cdot \partial_1 \partial_2 v(x) \\ &\quad \dots \end{aligned}$$

と計算される .

命題 A.1.1 一般には ,

$$\partial^\alpha \{u(x)v(x)\} = \sum_{\alpha \succ \beta} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha - \beta} u(x) \cdot \partial^\beta v(x) \quad (\text{A.8})$$

が成り立つ² . ただし , $\alpha \succ \beta$ に対し ,

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} \quad (\text{A.9})$$

である³ .

²これを Leibniz の公式ということがある .

³(A.9) を多項係数 ということがある . 多項定理は

$$(x_1 + \dots + x_d)^m = m! \sum_{|\alpha|=m} \frac{x^\alpha}{\alpha!}, \quad x = (x_1, \dots, x_d),$$

の形に表される . $d = 2$ ならば 2 項定理に帰着する .

d -変数 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ の m -次多項式

$$Q(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \xi^\alpha \quad (\text{A.10})$$

において各 ξ_j を ∂_j で置き換えれば、偏微分作用素

$$Q(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha \quad (\text{A.11})$$

を得る。

問 A.1.3 β は (長さが m 以下の) 多重指標とする。

$$Q^{(\beta)}(\xi) = \partial_\xi^\beta Q(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial_\xi^\beta (\xi^\alpha)$$

は $(m - |\beta|)$ -次の多項式である。

問 A.1.4 なめらかな関数 $u(x)$, $v(x)$ に対し,

$$Q(\partial)(u(x)v(x)) = \sum_{|\beta| \leq m} \frac{1}{\beta!} Q^{(\beta)}(\partial)(u(x)) \partial^\beta v(x)$$

が成り立つ⁴。

さて, (A.11) の係数 c_α が x になめらかに依存するとき, $Q(\xi)$ を

$$Q(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha(x) \xi^\alpha \quad (\text{A.12})$$

とかき, また, ξ に ∂ を「代入」して

$$Q(x, \partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha(x) \partial^\alpha \quad (\text{A.13})$$

とかくことができる。 $Q(x, \partial)$ は偏微分作用素, すなわち, 本来なめらかな関数 $u(x)$ に働いて,

$$\sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha(x) \partial^\alpha u(x)$$

として意味を持つものである。 $c_\alpha(x) \neq 0$ となる $|\alpha| = m$ があれば, (A.13) は確かに m -階の偏微分を含む。このとき, 偏微分作用素 $Q(x, \partial)$ の階数は m , あるいは, $Q(x, \partial)$ は m -階という。一方, (A.12) に基づけば, 当然, 多重指標 β に対し, $Q^{(\beta)}(x, \xi) = \partial_\xi^\beta Q(x, \xi)$ となる。したがって,

$$Q^{(\beta)}(x, \partial) = \sum_{|\alpha| \leq m, \alpha > \beta} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} c_\alpha(x) \partial^{\alpha - \beta} \quad (\text{A.14})$$

⁴命題 A.1.1 の応用である。一般化された Leibniz の公式とよばれることがある。

である。また、

$$\partial^\beta(Q(x, \partial)(u(x))) = \sum_{\beta > \gamma} \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{\beta!}{(\beta - \gamma)! \gamma!} (\partial^{\beta - \gamma} c_\alpha(x)) \partial^{\alpha + \gamma} u(x)$$

となる。そこで、

$$Q_{(\beta)}(x, \xi) = \partial^\beta Q(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\beta c_\alpha(x)) \xi^\alpha \quad (\text{A.15})$$

とかげば、

$$\partial^\beta(Q(x, \partial)(u(x))) = \sum_{\beta > \gamma} \binom{\beta}{\gamma} Q_{(\beta - \gamma)}(x, \partial)(\partial^\gamma u(x))$$

と表される。

A.2 数式処理ソフトによる偏微分演算

偏微分演算は関与する変数も多く注意深い丹念な計算が必要である。みずから頭と手を働かせてのこのような計算は、問題そのものに対する数学的な実体験の獲得上欠かせないものではある。しかし、検算や予測の手段として、数値計算だけではなく、形式的な演算のかなりの部分が計算機の助けを借りて実行できるのである。この講義は計算機の利用を前提にはしておらず、また、特定のソフトを強調するわけにはいかないものの、実際に、計算機を利用して、記号処理としての偏微分演算の有効性を Maple 6⁵ によって示しておく。

A.2.1 基礎となる偏微分演算

まず、偏微分階数の多重指標に相当する自然数のリスト $M = [m_1, \dots, m_n]$ 、変数のリスト $X = [x_1, \dots, x_n]$ 及び偏微分すべき関数の記号 u が与えられたとき、 $u(x_1, \dots, x_n)$ の偏導関数

$$\frac{\partial^{m_1}}{\partial x_1^{m_1}} \cdots \frac{\partial^{m_n}}{\partial x_n^{m_n}} u(x_1, \dots, x_n)$$

を記号として出力するプロシデュアを掲げる。

プロシデュア A.2.1 変数 (のリスト) X の関数 u に対する階数 (のリスト) M の偏導関数の計算は

```
> pdo := proc(M::list, X::list, u)
```

⁵Maple 6 は Waterloo Maple Inc. の登録商標である。ちなみに、以下は (このノートの時点では最新の) Maple 7 でも動く (から、多分、Maple x 、 $x \geq 8$ でも可ならむ)。

```

> local i, deriv, S :
> S:={}:
> for i from 1 to nops(M) do
> if M[i]>0 then S:=S union {i} end if:
> end do:
> deriv:=u(seq(X[i],i=1..nops(X))):
> for i from 1 to nops(S) do
> deriv:=diff(deriv,X[S[i]]$M[S[i]])
> end do:
> deriv:
> end:

```

で実行できる。

このプロシデュアの鍵は $u(X_1, \dots, X_n)$ を

```
> deriv:=u(seq(X[i],i=1..nops(X))):
```

とおいてから、変数 $X[i]$ に対する $M[i]$ 階偏導関数を計算するコマンド

```
> diff(deriv,X[i]$M[i])
```

を利用することである。計算を反復させるために、プロシデュア内では演算結果を改めて `deriv` とおいている。このコマンドだけでは $M[i]=0$ の場合に対応できないために $M[i]>0$ を満たす添え数の集合 S を作り、 S に属する添え数についてだけ上のコマンドを使うようにしてある。このために、このプロシデュアは S を含むやや複雑な構造になった。なお、`nops` はリストに対しては成分の個数を示す。

つぎに、プロシデュア `pdo` の使用例を挙げる。

例 A.2.1 $u(x, y)$ を $(0, 0)$ -階、すなわち、全く偏微分しないものと、 $(1, 0)$ -階、すなわち、 x に関する 1 階の偏導関数を与えている。

```
> 'pdo([0,0],[x,y],u)'=pdo([0,0],[x,y],u),
```

```
> 'pdo([1,0],[x,y],u)'=pdo([1,0],[x,y],u);
```

$$\text{pdo}([0, 0], [x, y], u) = u(x, y), \text{pdo}([1, 0], [x, y], u) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, y)$$

なお、ここでは、偏導関数の (x, y) での値を表す記号になっていることに注意してほしい。

プロシデュア `pdo` を利用して、係数 $C_{[1]}(x), \dots, C_{[N]}(x)$ と階数の多重指標 $\alpha_{[1]}, \dots, \alpha_{[N]}$ から偏微分作用素

$$\sum_{i=1}^N C_{[i]}(x) \partial^{\alpha_{[i]}}$$

を生成するプロシデュアを与えることができる。

プロシデュア A.2.2 データは、係数のリスト $C=[C[1], \dots, C[N]]$, 多重指標 (階数) のリスト $A=[A[1], \dots, A[N]]$ および変数 (のリスト) X と関数の記号 u である . 係数は X の関数として扱われる .

```

> PDO:=proc(C::list,A::list,X::list,u)
> local i,j,n,m,v,Z,W:
> if nops(C)<>nops(A) then RETURN('bad input') end if:
> n:=nops(C):
> Z:=seq(X[i],i=1..nops(X)):
> for j from 1 to n do
> W[j]:=C[j](Z)*pdo(A[j],X,u)
> end do:
> unapply(sum(W[m],m=1..n),Z):
> end:

```

出力は、 X から対応する偏微分作用素を u に施したものの X での値への写像である .

プロシデュア中の $nops(C)<>nops(A)$ は、係数の個数と多重指標の個数が一致していない場合を排除するためである . ただし、ここでは、 A の成分である多重指標がすべて同じ次元であるかどうかの判定はしていない . プロシデュア中の Z はリスト X の成分を関数の独立変数として利用するために掛けている手間である . $W[j]$ は、係数 $C[j](Z)$ (つまり、 Z での値) と多重指標 $A[j]$ 階の $u(Z)$ の偏導関数との積であり、これらの和 (Z での値) を計算してから、 $unapply$ というコマンドによって、 Z に計算結果を対応させる写像として、最終的に出力させている .

計算例をいくつか挙げる .

例 A.2.2 2変数の例である . 係数の関数を $C_{[1]}$, $C_{[2]}$ は、それぞれ、変数の組の第 1 , 第 2 成分への射影として与えてある .

```

> C[1]:=(x,y)->x:C[2]:=(x,y)->y:
> 'PDO([C[1],C[2]],[[1,0],[0,1]],[p,q],u)'
> =PDO([C[1],C[2]],[[1,0],[0,1]],[p,q],u);

```

$PDO([C_1, C_2], [[1, 0], [0, 1]], [p, q], u) = ((p, q) \rightarrow p \operatorname{diff}(u(p, q), p) + q \operatorname{diff}(u(p, q), q))$

すなわち、

$$(p, q) \mapsto p \frac{\partial}{\partial p} u(p, q) + q \frac{\partial}{\partial q} u(p, q)$$

が出力されている . 変数を (p, q) として、 PDO を実行していることに注意してほしい .

例 A.2.3 PDO(C,A,X,u) は, C をリスト X の成分を独立変数とする関数と認識するので, c の成分が具体的な関数として与えられていなくても, 変数を補って関数として扱う.

```
> 'PDO([a,b],[[1,0],[0,1]],[x,y],f)'
```

```
> =PDO([a,b],[[1,0],[0,1]],[x,y],f);
```

$$\text{PDO}([a,b],[[1,0],[0,1]],[x,y],f) = ((x,y) \mapsto a(x,y) \text{diff}(f(x,y),x) + b(x,y) \text{diff}(f(x,y),y))$$

すなわち,

$$(x,y) \mapsto a(x,y) \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) + b(x,y) \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$$

が出力される. 定数係数を扱うためには, 定数値の関数を改めて定義しなければならない.

```
> aa:=(x,y)->alpha: bb:=(x,y)->beta:
```

```
> 'PDO([a,b],[[1,0],[0,1]],[x,y],f)'
```

```
> =PDO([aa,bb],[[1,0],[0,1]],[x,y],f);
```

$$\text{PDO}([a,b],[[1,0],[0,1]],[x,y],f) = ((x,y) \mapsto \alpha \text{diff}(f(x,y),x) + \beta \text{diff}(f(x,y),y))$$

つまり, 出力結果は

$$(x,y) \mapsto \alpha \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) + \beta \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$$

となった. ただし, 数値定数の場合は, これらをリスト c にまとめておけばよい.

```
> 'PDO([1,1],[[1,0],[0,1]],[x,y],u)'
```

```
> =PDO([1,1],[[1,0],[0,1]],[x,y],u);
```

$$\text{PDO}([1,1],[[1,0],[0,1]],[x,y],u) = ((x,y) \mapsto \text{diff}(u(x,y),x) + \text{diff}(u(x,y),y))$$

すなわち,

$$(x,y) \mapsto \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) + \frac{\partial}{\partial y} u(x,y)$$

が出力されている.

例 A.2.4 プロシデュア PDO(C,A,X,u) は u を X の成分を変数とする関数として認識し, 計算結果を X の成分の関数と捉え, 変数の組から計算結果への写像の形で出力している. したがって, 変数の組を与えれば, 計算結果をその変数に対する記号値として表す.

```
> 'PDO([a,b],[[1,0],[0,1]],[x,y],f)(t,s)'
```

```
> =PDO([a,b],[[1,0],[0,1]],[x,y],f)(t,s);
```

$$\text{PDO}([a,b],[[1,0],[0,1]],[x,y],f)(t,s) = a(t,s) \left(\frac{\partial}{\partial t} f(t,s)\right) + b(t,s) \left(\frac{\partial}{\partial s} f(t,s)\right)$$

プロシデュア PDO を使うことにより, いろいろな偏微分作用素を定義し, 記号として計算機上で操作できる. しかし, 作用素としての反復や相互作用の考察には直接 PDO を利用するよりも, PDO から作った補助的なプロシデュアが便利である. 次の例では, いわば,

$$P = a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

と

$$Q = c(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + d(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

をプロシデュアとして作っている.

例 A.2.5 まず, 1階偏微分作用素 P を

```
> P:=proc(u)
> PDO([a,b],[[1,0],[0,1]],[x,y],u):
> end:
```

によって, 定義し, ついで, Q を

```
> Q:=proc(u)
> PDO([c,d],[[1,0],[0,1]],[x,y],u):
> end:
```

によって定める. しかる後に, $P(Q(u))(x, y) - Q(P(u))(x, y)$ を計算し, w と置いている.

```
> w:=simplify(P(Q(u))(x,y)-Q(P(u))(x,y));
```

$$\begin{aligned} w := & a(x, y) \left(\frac{\partial}{\partial x} c(x, y) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x, y) \right) + a(x, y) \left(\frac{\partial}{\partial x} d(x, y) \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} u(x, y) \right) \\ & + b(x, y) \left(\frac{\partial}{\partial y} c(x, y) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x, y) \right) + b(x, y) \left(\frac{\partial}{\partial y} d(x, y) \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} u(x, y) \right) \\ & - c(x, y) \left(\frac{\partial}{\partial x} a(x, y) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x, y) \right) - c(x, y) \left(\frac{\partial}{\partial x} b(x, y) \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} u(x, y) \right) \\ & - d(x, y) \left(\frac{\partial}{\partial y} a(x, y) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x, y) \right) - d(x, y) \left(\frac{\partial}{\partial y} b(x, y) \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} u(x, y) \right) \end{aligned}$$

実は, w は

$$w = f(x, y) \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) + g(x, y) \frac{\partial}{\partial y} u(x, y)$$

の形をしている. $f(x, y)$ は, すなわち,

```
> coeff(w,diff(u(x,y),x),1);
```

$$a(x, y) \left(\frac{\partial}{\partial x} c(x, y) \right) + b(x, y) \left(\frac{\partial}{\partial y} c(x, y) \right) - c(x, y) \left(\frac{\partial}{\partial x} a(x, y) \right) - d(x, y) \left(\frac{\partial}{\partial y} a(x, y) \right)$$

である. $g(x, y)$ は

```
> coeff(w,diff(u(x,y),y),1);
```

$$a(x, y) \left(\frac{\partial}{\partial x} d(x, y) \right) + b(x, y) \left(\frac{\partial}{\partial y} d(x, y) \right) - c(x, y) \left(\frac{\partial}{\partial x} b(x, y) \right) - d(x, y) \left(\frac{\partial}{\partial y} b(x, y) \right)$$

と計算される.

A.2.2 動径方向微分と回転方向微分

やや複雑な作用素，例えば，動径方向微分

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \quad (\text{A.16})$$

などは，PDO(C,A,X,u) を利用したプロシデュア化によって，いろいろな計算を実行できる．係数となる関数のリスト c の第 j-成分の関数は，変数のリスト X の第 j-成分に相当する．これを関数として生成するプロシデュアを示す．

プロシデュア A.2.3 このプロシデュア prj には，変数のリスト X と番号 j を与える．prj は j が X の成分の個数 (nops(X)) 以下であることを確認してから，X の全成分を改めて変数 v として整理し，v に X の第 j-成分 X[j] を対応させる写像を出力させる．

```
> prj:=proc(X::list,j::posint)
> local i,v,f:
> if j>nops(X) then RETURN('inappropriate input') end if:
> v:=(X[i],i=1..nops(X)):
> v->X[j]:
> end:
```

出力例も示しておく．

```
> 'prj([x,y,z],2)'=prj([x,y,z],2),
> 'prj([x,y,z],2)(x,y,z)'=prj([x,y,z],2)(x,y,z);
prj([x,y,z],2)=(v->[x,y,z]_2), prj([x,y,z],2)(x,y,z)=y
```

写像としてはプロシデュア prj の内部パラメータの v が顔を出してしまうが，(x,y,z) での値を評価すれば第 2 変数 y になるのである．

プロシデュア PDO に適用するためには，これらを係数関数のリストとして整理しなければならない．

プロシデュア A.2.4 これは本来プロシデュア A.2.3 と一括して扱われるべきものである．

```
> crd:=proc(X::list)
> local i:
> [seq(prj(X,i),i=1..nops(X))]:
> end:
```

prj の出力結果を列として並べてリストを作っているだけであることは，出力例

```
> 'crd([x,y,z])'=crd([x,y,z]);
      crd([x,y,z])=[v → [x,y,z]1, v → [x,y,z]2, v → [x,y,z]3]
```

から明らかであろう。

(A.16) を $\text{PDO}(C,A,X,u)$ によって実現するためには多重指標のリスト A を与えなければならない。 A の成分である多重指標は、単位多重指標、すなわち、いずれかの 1 成分のみが 1 で他の成分はすべて 0 であるようなものである。そこで、 N を与えて、 N 次元の単位多重指標をすべて羅列するプロシデュアをまず掲げよう。

プロシデュア A.2.5 このプロシデュアは $N \times N$ の 2 次元配列 $M[i,j]$ を対角線成分が 1、他は 0 になるように作り、 i 番目の単位多重指標 $L[i]$ を $[M[i,1], \dots, M[i,N]]$ として定めて、列 $L[1], \dots, L[N]$ を出力する。

```
> Indc:=proc(N::posint)
> local i,j,L,M;
> for i from 1 to N do
> for j from 1 to N do
> if j=i then M[i,j]:=1
> else M[i,j]:=0
> end if;
> end do;
> end do;
> for i from 1 to N do
> L[i]:=[seq(M[i,j],j=1..N)]
> end do;
> seq(L[i],i=1..N)
> end;
```

$N=3$ の出力例は次の通り：

```
> 'Indc(3)'=Indc(3);
      Indc(3)=[ [1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1] ]
```

PDO は、これら多重指標を成分とするリストを要求するので、 Indc の出力結果を $[]$ に入れて利用する。

以上をまとめると、動径方向微分 (A.16) を生成するプロシデュアを作ることができる。

プロシデュア A.2.6 変数のリスト X と関数の記号 u が与えられたとき、

```
> rad:=proc(X::list,u)
```

```

> local i,j,N,C,A:
> N:=nops(X):
> C:=crd(X):
> A:=[Indc(N)]:
> PDO(C,A,X,u):
> end:

```

は X の成分を変数とする (A.16) を u に働かせる．出力は PDO 同様写像である．

出力例をいくつか挙げる．最初のものは出力の検証である．

例 A.2.6 $X=[x,y,z]$ の例である．

```

> 'rad([x,y,z],u)'=rad([x,y,z],u);
rad([x,y,z],u) = ((x,y,z) -> x diff(u(x,y,z),x) + y diff(u(x,y,z),y) + z diff(u(x,y,z),z))
すなわち,

```

$$(x,y,z) \mapsto x \frac{\partial}{\partial x} u(x,y,z) + y \frac{\partial}{\partial y} u(x,y,z) + z \frac{\partial}{\partial z} u(x,y,z)$$

が得られる．

つぎの例は, rad を $r(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ に作用させた計算結果を示すものである．

例 A.2.7 最初に $r(x,y,z)$ を写像として定義する．

```

> r:=(x,y,z)->(x^2+y^2+z^2)^(1/2):'r(x,y,z)'=r(x,y,z);
r(x,y,z) = sqrt(x^2+y^2+z^2)

```

次に, $r(x,y,z)$ に rad を適用すると,

```

> 'rad([x,y,z],r)'(x,y,z)=simplify(rad([x,y,z],r)(x,y,z));
rad([x,y,z],r)(x,y,z) = sqrt(x^2+y^2+z^2)

```

となる．人力での計算でも結果は同じ記号値である．

例 A.2.8 rad を作用素として反復適用する例である．

```

> 'rad([x,y,z],rad([x,y,z],u))(x,y,z)'
> =simplify(rad([x,y,z],rad([x,y,z],u))(x,y,z));

```

$$\begin{aligned}
\text{rad}([x,y,z], \text{rad}([x,y,z], u))(x,y,z) &= x \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x,y,z) \right) + x^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y,z) \right) \\
&+ 2xy \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u(x,y,z) \right) + 2xz \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial x} u(x,y,z) \right) + y \left(\frac{\partial}{\partial y} u(x,y,z) \right) \\
&+ y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y,z) \right) + 2yz \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial y} u(x,y,z) \right) + z \left(\frac{\partial}{\partial z} u(x,y,z) \right) + z^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} u(x,y,z) \right)
\end{aligned}$$

出力結果には Maple 6 固有の計算方式が反映し、このままでは見にくい。見易い形への整理は、しかし、ソフトに関する話題であるから、ここでは立ち入らない。

プロシデュア PDO の応用例として、回転方向微分

$$x_m \frac{\partial}{\partial x_n} - x_n \frac{\partial}{\partial x_m} \quad (m < n) \quad (\text{A.17})$$

を生成するプロシデュアを作成しよう。

プロシデュア A.2.7 データは変数のリスト X, 自然数 m, n および関数の記号 u である。このプロシデュアは, $m < n$ として, m-軸から n-軸への回転を表す偏微分作用素 (A.17) を生成する。m と n の大小関係が想定通りかどうか判定させ、また、これらが本来 X の成分に振られた番号なのだから、成分の個数を超えていないことを確かめさせてから、出力すべき PDO の作成をする。

```
> rot:=proc(X::list,m::posint,n::posint,u)
> local N,Y,a,b,L:
> if m>=n then RETURN('inappropriate input 0') end if:
> N:=nops(X):
> if n>N then RETURN('inappropriate input 1') end if:
> Y:=seq(X[i],i=1..N):
> a:=(Y)->X[m]:
> b:=(Y)->-X[n]:
> L:=Indc(N):
> PDO([a,b],[L[n],L[m]],X,u):
> end:
```

例 A.2.9 計算例を挙げる。

```
> 'rot([x,y,z],1,2,u)'=rot([x,y,z],1,2,u);
rot([x,y,z],1,2,u) = ((x,y,z) -> x diff(u(x,y,z),y) - y diff(u(x,y,z),x))
すなわち、出力は
```

$$(x,y,z) \mapsto x \frac{\partial}{\partial y} u(x,y,z) - y \frac{\partial}{\partial x} u(x,y,z)$$

という写像である。

この場合も、特定の計算をするには、さらに、プロシデュア化しておくべきだろう。

プロシデュア A.2.8 3次元で、座標 (x, y, z) の場合に扱いが限定されているときを考える。Rot[z] は z -軸の回りの（無限小の）回転であって、 x -軸の正の向きから y -軸の正の向きに向かうものである。Rot[y], Rot[x] も同様である。これらの偏微分作用素をまず生成させる。

```
> Rot[z]:=proc(u)
> rot([x,y,z],1,2,u):
> end:
> Rot[x]:=proc(u)
> rot([x,y,z],2,3,u):
> end:
> Rot[y]:=proc(u)
> -rot([x,y,z],1,3,u):
> end:
```

計算例を示す。

例 A.2.10

```
> 'Rot[y](u)(x,y,z)'=Rot[y](u)(x,y,z);
Roty(u)(x,y,z) = -x(∂z u(x,y,z)) + z(∂x u(x,y,z))
```

例 A.2.11 Rot[z] と Rot[x] の交換子を計算したら、 $-\text{Rot}[y]$ が得られることを示唆する⁶。

```
> 'Rot[z](Rot[x](u))(x,y,z)-Rot[x](Rot[z](u))(x,y,z)'
```

$$\text{Rot}_z(\text{Rot}_x(u))(x,y,z) - \text{Rot}_x(\text{Rot}_z(u))(x,y,z) = x\left(\frac{\partial}{\partial z} u(x,y,z)\right) - z\left(\frac{\partial}{\partial x} u(x,y,z)\right)$$

A.2.3 標準的な偏微分作用素

d -次元のラプラス作用素、波動作用素、熱作用素を生成するプロシデュアを掲げておく。

まず、 d -次元のラプラス作用素

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}$$

を生成するプロシデュアを示す。

⁶このような表現をしたのは、ソフトによる計算結果を鵜呑みにしないという趣旨である。

プロシデュア A.2.9 データは、次元 d 、変数のリスト X 、関数の記号 u である。 $d < \#X$ は、変数と次元の整合性の検証のためである。 $\text{PDO}(C, A, X, u)$ を使うために、係数のリスト C を全成分が 1 のものとして作り、多重指標のリスト A は $\text{Indc}(d)$ の成分を 2 倍にしたものとする。

```
> laplace:=proc(d::posint,X::list, u)
> local C,i,A,L:
> if nops(X)<>d then
> RETURN('inconsistent data')
> end if:
> C:=[seq(1,i=1..d)]:
> A:=map(L->2*L,[Indc(d)]):
> PDO(C,A,X,u):
> end:
```

計算例を示す。

例 A.2.12

```
> 'laplace(2,[x,y],u)'=laplace(2,[x,y],u);
laplace(2,[x,y],u) = ((x,y) -> diff(diff(u(x,y),x),x) + diff(diff(u(x,y),y),y))
```

すなわち、

$$(x, y) \mapsto \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y)$$

が出力される。(x, y) での記号値で表せば、

```
> 'laplace(2,[x,y],u)(x,y)'=laplace(2,[x,y],u)(x,y);
laplace(2,[x,y],u)(x,y) = ( $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y)$ ) + ( $\frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y)$ )
```

となる。

具体的な関数を与えて、それに `laplace` を適用してみよう。

例 A.2.13 3次元のラプラス作用素の基本解に相当する関数を考察する。

```
> v:=(x,y,z)->(x^2+y^2+z^2)^(-1/2):'v(x,y,z)'=v(x,y,z);
```

$$v(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

```
> 'laplace(3,[x,y,z],v)(x,y,z) '=
> simplify(laplace(3,[x,y,z],v)(x,y,z));
```

$$\text{laplace}(3, [x, y, z], v)(x, y, z) = 0$$

$v(x, y, z)$ は関数としては $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ で定義されている。しかし、数式処理ソフトは $v(x, y, z)$ を記号としてのみ認識しており、解析的な意味での定義域には無頓着である。

例 A.2.14 2次元の場合の同様の例である。

```
> w:=(x,y)->ln((x^2+y^2)^(1/2)): 'w(x,y)'=w(x,y);
      w(x,y) = ln(sqrt(x^2+y^2))
> 'laplace(2,[x,y],w)(x,y) '=
> simplify(laplace(2,[x,y],w)(x,y));
      laplace(2,[x,y],w)(x,y) = 0
```

解析的には $w(x, y)$ は $(x, y) \neq (0, 0)$ でのみ定義されていることに注意してほしい。

つぎに、 d -次元の波動作用素

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}$$

を生成するプロシデュアを示す。 $d \geq 2$ である。

プロシデュア A.2.10 プロシデュアのアイデアは基本的に laplace と同様である。

```
> wave:=proc(d::posint,X::list,u)
> local i, C, A, L:
> if d<2 then
> RETURN('small input')
> end if:
> if nops(X)<>d then
> RETURN('inconsistent data')
> end if:
> C:=[1,seq(-1,i=1..d-1)]:
> A:=map(L->2*L,[Indc(d)]):
> PDO(C,A,X,u):
> end:
```

なお、 $d \geq 2$ は $C=[1,-1,\dots,-1]$ となるために必要なのである。

出力例を挙げる。

例 A.2.15 2次元の波動作用素を計算する .

```
> 'wave(2,[x,y],u)'=wave(2,[x,y],u);
```

$\text{wave}(2, [x, y], u) = ((x, y) \rightarrow \text{diff}(\text{diff}(u(x, y), x), x) - \text{diff}(\text{diff}(u(x, y), y), y))$

すなわち ,

$$(x, y) \mapsto \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y)$$

が出力されている . (x, y) での記号値は

```
> 'wave(2,[x,y],u)'(x,y)=wave(2,[x,y],u)(x,y);
```

$$\text{wave}(2, [x, y], u)(x, y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y)\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y)\right)$$

によって計算される .

つぎの計算も記号処理の範疇に属する .

例 A.2.16 まず , 記号的に関数を定義する .

```
> w:=(x,y)->f(x+y)+g(x-y):'w(x,y)'=w(x,y);
```

$$w(x, y) = f(x + y) + g(x - y)$$

この w について $\text{wave}(2, [x, y], w)$ の (x, y) における記号値を計算すると消える .

```
> 'wave(2,[x,y],w)(x,y)'=wave(2,[x,y],w)(x,y);
```

$$\text{wave}(2, [x, y], w)(x, y) = 0$$

最後に , d -次元の熱作用素

$$\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}$$

を生成するプロシデュアを示す .

プロシデュア A.2.11 `laplace` や `wave` と同様のアイデアであるが , 偏微分に低階のものがあるということの処理が新しい .

```
> heat:=proc(d::posint,X::list,u)
> local i,C,B,M,L,A:
> if d<2 then
> RETURN('small input')
> end if:
> if nops(X)<>d then
> RETURN('inappropriate input')
> end if:
> C:=[1,seq(-1,i=1..d-1)]:
> B:=[1,seq(0,i=1..d-1)]:
```

```

> M:=map(L->2*L,[Indc(d)]):
> A:=[B,seq(M[i],i=2..d)]:
> PDO(C,A,X,u):
> end:

```

なお, $d \geq 2$ は A の構成に必要である.

出力例を示す.

例 A.2.17 2次元の場合を試みる.

```

> 'heat(2,[t,x],u)'=heat(2,[t,x],u);
heat(2,[t,x],u) = ((t,x) -> diff(u(t,x),t) - diff(diff(u(t,x),x),x))

```

すなわち,

$$(x,y) \mapsto \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x)$$

が出力される. (x,y) での記号値は

```

> 'heat(2,[x,y],u)(x,y)'=heat(2,[x,y],u)(x,y);
heat(2,[x,y],u)(x,y) = (\frac{\partial}{\partial x} u(x,y)) - (\frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y))

```

によって得られる.

具体的な関数を与えて記号処理を行うこともできる.

例 A.2.18 熱核関数あるいは Gauss-Weierstrass 関数といわれるものを与える.

```

> v:=(t,x)->1/2*(Pi*t)^(-1/2)*exp(-(x-a)^2/(4*t)):
> 'v(t,x)'=v(t,x);

```

$$v(t,x) = \frac{1}{2} \frac{e^{(-1/4) \frac{(x-a)^2}{t}}}{\sqrt{\pi t}}$$

プロシデュア heat を適用すると消える.

```

> 'heat(2,[t,x],v)(t,x)'=simplify(heat(2,[t,x],v)(t,x));
heat(2,[t,x],v)(t,x) = 0

```

解析的には $t > 0$ が $v(t,x)$ の定義に必要である.

A.3 フーリエ級数の収束

$f(t)$ を直線上の周期 2π の関数とする. $f(t)$ は, フーリエ係数が定義できるためには Lebesgue 可積分であればよいが, 級数の収束を論ずるためには, 収束の程度に応じた正則性が必要になる.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.18})$$

を $f(t)$ の余弦係数といい,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.19})$$

を正弦係数という. 三角級数

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos nt + b_n \sin nt\} \quad (\text{A.20})$$

は $f(t)$ の Fourier 級数とよばれる.

注意 A.3.1 周期関数 $f(t)$ の挙動の記述という立場からは, Fourier 級数の第 1 項 $\frac{1}{2}a_0$ は (1 周期上の) 平均値として, $f(t)$ の振舞いの基準線を示し, 第 2 項以下は, 基準線のまわりでの振動を表すものと解釈できる.

(A.20) の収束を論ずるために, 関数 $f(t)$ が有界変動な場合を考えよう. 考察を, 1 周期, すなわち, 区間 $[0, 2\pi]$ の上に限定することにする. 区間 $[0, \theta]$, $0 < \theta \leq 2\pi$, 内に有限個の分点をとって, 分割

$$\Delta_N(\theta) : 0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_N = \theta \quad (N = 1, 2, \dots)$$

を定める.

$$\text{Var}(f, \Delta_N(\theta)) = \sum_{j=1}^N |f(\theta_j) - f(\theta_{j-1})|$$

は分割 $\Delta_N(\theta)$ に関する $f(t)$ の変動量である. これらの上限

$$\text{Var}_f(\theta) = \sup_{\Delta_N(\theta)} \text{Var}(f; \Delta_N(\theta))$$

が $f(t)$ の区間 $[0, \theta]$ における全変動量を表す. 全変動量 $\text{Var}_f(\theta)$ が θ の単調増大関数であることは定義から明らかであろう. $f(t)$ は, 周期上での全変動が有界, すなわち, $\text{Var}_f(2\pi) < +\infty$ のとき, 有界変動といわれる.

例 A.3.1 Lipschitz 連続な周期関数 $f(t)$ は有界変動である. また, $f(t)$ が, 微分可能で, 可積分な導関数 $f'(t)$ を持てば, $f(t)$ は有界変動である. 実際, $f(t)$ が Lipschitz 連続ならば, $|f(t) - f(t')| \leq L|t - t'|$ が成り立つような定数⁷ $L > 0$ がある. したがって, $\text{Var}_f(\theta) \leq L\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ が成り立つ. $f'(t)$ が可積分な場合は, $M = \int_0^{2\pi} |f'(\theta)| d\theta$ として, $f(t)$ は (M を Lipschitz 定数とする) Lipschitz 連続な関数である.

問 A.3.1 周期内で

$$\bar{f}(\theta) = \frac{\text{Var}_f(\theta) + f(\theta)}{2}, \quad \underline{f}(\theta) = \frac{\text{Var}_f(\theta) - f(\theta)}{2}$$

は共に単調増大関数である.

⁷Lipschitz 定数という.

周期的な有界変動関数 $f(t)$ は周期上の単調増大関数の差 $(t) = \overline{f}(t) - \underline{f}(t)$ として表せる。したがって、周期内の不連続点はたかだか可算個であり、しかも、各点 θ において

$$f(\theta \pm 0) = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} f(\theta \pm \epsilon)$$

が存在する。言うまでもなく、 $f(t)$ が θ で連続なことは

$$f(\theta) = f(\theta - 0) = f(\theta + 0)$$

が成り立つことと同値である。

Fourier 級数の収束に関する古典的かつ基本的な命題を次に掲げる。

命題 A.3.1 $f(t)$ は周期 2π の有界偏導関数とする。Fourier 級数 (A.20) は、各点 $0 < \theta \leq 2\pi$ で収束し、その極限值は $f(\theta - 0)$ 、 $f(\theta + 0)$ の相加平均である：

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\} = \frac{f(\theta - 0) + f(\theta + 0)}{2} \quad (\text{A.21})$$

[証明] $0 < \theta < 2\pi$ とする。任意の $N = 1, 2, \dots$ に対し、

$$S_N(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N \{a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\}$$

とおく。Dirichlet の核関数を用いると

$$S_N(\theta) = \int_0^{2\pi} f(\theta - t) D_N(t) dt = \int_0^{2\pi} D_N(\theta - t) f(t) dt$$

となる。右辺は、さらに、

$$\int_0^{\theta} D_N(\theta - t) f(t) dt + \int_{\theta}^{2\pi} D_N(\theta - t) f(t) dt$$

と表すことができる。右辺第 1 項、第 2 項は、 $N \rightarrow \infty$ のとき、それぞれ、 $\frac{1}{2}f(\theta - 0)$ 、 $\frac{1}{2}f(\theta + 0)$ に収束する。実際、第 1 項ならば

$$\int_0^{\theta} D_N(\theta - t) \{f(t) - f(\theta - 0)\} dt + \int_0^{\theta} D_N(\theta - t) dt f(\theta - 0)$$

だからである⁸。 $\theta = 0$ (または $\theta = 2\pi$) のときも周期性を利用した補正によって同様の議論に帰着できる。 [証明終]

⁸ $0 \leq a < b \leq 2\pi$ とする。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b D_N(t) dt = \begin{cases} 1, & a < 0 < b, \\ \frac{1}{2}, & a = 0 \text{ または } b = 0 \\ 0, & b < 0 \text{ または } a > 0 \end{cases}$$

である。

付録B 関数解析から

偏微分方程式に伴う無限次元性の処理は微積分学の水準では間に合わない．必要となる関数解析の基礎的な事項を確認しておきたい．

B.1 ヒルベルト空間

B.1.1 定義と例

\mathbb{X} は実数体 \mathbb{R} (または複素数体 \mathbb{C}) をスカラー体とするベクトル空間とする．すなわち, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{X}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ (または \mathbb{C}) に対し, 1次結合 $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \in \mathbb{X}, \dots$ が定義され, これについて

$$1\mathbf{u} = \mathbf{u}, \quad \alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$$

$$\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}, \quad (\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

が成り立ち, さらに, ゼロ・ベクトル $\mathbf{0} \in \mathbb{X}$ が存在して,

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}, \quad 0\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

および, \mathbf{u} に対しては \mathbf{u}' が存在し

$$\mathbf{u} + \mathbf{u}' = \mathbf{u}' + \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

が成立している． \mathbf{u}' は通例 $-\mathbf{u}$ と書き表され, $\mathbf{u} + (-\mathbf{v})$ は $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ と略記される．

\mathbb{X} の上の対称形式

$$B : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \ni (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R} \quad (\text{B.1})$$

すなわち,

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = B(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \quad (\text{B.2})$$

$$B(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \alpha B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \beta B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad (\text{B.3})$$

が¹ , さらに ,

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0 \quad (\text{B.5})$$

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 \implies \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (\text{B.6})$$

を満たすとき , 内積とよばれる² .

問 B.1.1 $B(\cdot, \cdot)$ はベクトル空間 \mathbb{X} の内積とする . $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{X}$ に対し ,

$$|B(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \sqrt{B(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \sqrt{B(\mathbf{v}, \mathbf{v})} \quad (\text{B.7})$$

が成り立つ³ .

注意 B.1.1 $B(\cdot, \cdot)$ はベクトル空間 \mathbb{X} の内積とする .

$$N(\mathbf{u}) = \sqrt{B(\mathbf{u}, \mathbf{u})}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{X}, \quad (\text{B.8})$$

とおく . $N(\cdot)$ は \mathbb{X} 上のノルム , すなわち ,

$$N(\mathbf{u}) \geq 0, \quad N(\mathbf{u}) = 0 \implies \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (\text{B.9})$$

$$N(\alpha \mathbf{u}) = |\alpha| N(\mathbf{u}) \quad (\alpha \text{ はスカラー}) \quad (\text{B.10})$$

および

$$N(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \leq N(\mathbf{u}) + N(\mathbf{v}) \quad (\text{B.11})$$

の 3 条件を満足する⁴ . 実際 , いずれも内積の性質 (と問 B.1.1) から直ちに
従うことである . 特に , \mathbb{X} のベクトル \mathbf{u}, \mathbf{v} に対し , 点と見た両者の距離と
して $N(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ を採用することにより , \mathbb{X} を幾何的に取り扱う道が開かれる .

以下では , 内積は $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (あるいは , 単に (\cdot, \cdot) など) で表し , ノルム
は $\|\cdot\|$ (あるいは , 単に $|\cdot|$ など) で表す .

内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ の定義されたベクトル空間 \mathbb{X} の点列 (ベクトルの列) $\{\mathbf{u}_n; n = 1, 2, \dots\}$ は , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ から導かれたノルム $\|\cdot\|$ に関して

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_m\| = 0 \quad (\text{B.12})$$

¹ スカラー体は \mathbb{R} とする . スカラー体が \mathbb{C} のときは Hermite 対称形式 : (B.2) を

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \overline{B(\mathbf{u}, \mathbf{v})} \quad (\text{B.4})$$

に改めたものとする .

² 内積の定義されているベクトル空間を内積空間あるいは前ヒルベルト空間ということがある .

³ Cauchy の不等式とよばれる . なお , スカラー体が \mathbb{C} のときは証明に若干の注意が要る . 例えば , 文献にあたられたい .

⁴ ノルムが定義されているベクトル空間をノルム空間ということがある . 内積空間はノルム空間にもなるのである .

を満たすとき⁵に基本列または Cauchy 列とよばれる。さらに、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\| = 0 \quad (\text{B.13})$$

となる $\mathbf{u} \in \mathbb{X}$ が存在する⁶とき、この点列は収束列とよばれる。

すべての基本列が収束列であるような内積空間⁷を Hilbert 空間という。

例 B.1.1 Ω を d -次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^d の領域 (連結開集合) とする。 Ω 上の (Lebesgue 可測な) 関数 $f(x)$ で二乗可積分条件

$$\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < +\infty \quad (\text{B.14})$$

を満たすものの全体を $L^2(\Omega)$ とおく⁸。ただし、二つの関数 $f(x)$, $f_1(x)$ がほとんど到るところで一致する:

$$\{x \in \Omega; f(x) \neq f_1(x)\} \text{ が } d\text{-次元の零集合である}$$

ときは、これらは区別しない(できない)ものとする⁹。このとき、 $L^2(\Omega)$ はその要素 $f(x)$, $g(x)$ の 1 次結合を $t \mapsto \alpha f(x) + \beta g(x)$ の定める関数¹⁰とすることにより、ベクトル空間になる。実数値の関数のみを考察するときはスカラーは実数とすべきであるが、複素数値のものも許容するときは複素数体をスカラー体とするのがよい。このとき (実数値の場合も複素数値の場合も通用する表現では)

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dt, \quad f, g \in L^2(\Omega) \quad (\text{B.15})$$

が $L^2(\Omega)$ の内積であって、これにより、 $L^2(\Omega)$ は Hilbert 空間になる。完備性の検証の詳細は積分論の教科書をご覧ください。

⁵正式には、任意に $\epsilon > 0$ を採る毎に適当な自然数 N_{ϵ} が得られて

$$\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_m\| < \epsilon, \quad n, m > N_{\epsilon},$$

が成り立つとき

⁶このことを、文脈の上で誤解のおそれがない場合には、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{u}_n = \mathbf{u}$$

と略記することがある。

⁷基本列が収束列になるかどうかはノルムについて述べられている。すべての基本列が収束列になることを完備という。ノルム空間であって完備なものは Banach 空間とよばれる。

⁸ Ω 上の二乗可積分関数の空間あるいは Ω 上のエルトウ空間という。なお、 Ω が直線上の区間 $I = (a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ のときは、 $L^2(I)$ の代わりに $L^2(a, b)$ と書くことも多い。

⁹この意味で、 $f(x)$ と $f_2(x)$ も区別しないとすれば、 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ も区別できないことに注意せよ。すなわち、

$$\{x; f_1(x) \neq f_2(x)\} \subset \{x; f_1(x) \neq f(x)\} \cup \{x; f_2(x) \neq f(x)\}$$

であるが、右辺の集合はいずれも零集合なのである。

¹⁰すなわち、 $(\alpha f + \beta g)(x)$ と書くべきだが、 $\alpha f(x) + \beta g(x)$ と略記しよう。

Hilbert 空間 \mathbb{Y} は Hilbert 空間 \mathbb{X} のベクトル空間としての部分空間であって、 \mathbb{Y} の内積は \mathbb{X} の内積を \mathbb{Y} に制限したものに一致するとする。しかも、 \mathbb{Y} が \mathbb{X} の閉部分集合であるとき、 \mathbb{Y} は \mathbb{X} の閉部分空間 とよばれる。一般に、Hilbert 空間 \mathbb{X} の線形部分空間 \mathbb{W} の直交補空間

$$\mathbb{W}^\perp = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{X}; \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0, \mathbf{w} \in \mathbb{W} \} \quad (\text{B.16})$$

は (\mathbb{W} が閉部分空間でなくても) \mathbb{X} の閉部分空間になる。

例 B.1.2 1次元の区間 $[-L, L]$ 上の二乗可積分関数の空間 $L^2[-L, L]$ の任意の関数 $h(x)$ は

$$\begin{aligned} h(x) &= h^o(x) + h^e(x), \\ h^o(x) &= \frac{h(x) - h(-x)}{2}, \quad h^e(x) = \frac{h(x) + h(-x)}{2} \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

と奇関数と偶関数の一意的な和(直和)¹¹に分解される。すなわち、 $L^2[-L, L]$ に属する奇関数の全体および偶関数の全体のなす部分空間を、それぞれ、 $L^2_{\text{odd}}[-L, L]$ および $L^2_{\text{even}}[-L, L]$ で表せば、直和分解

$$L^2[-L, L] = L^2_{\text{odd}}[-L, L] \oplus L^2_{\text{even}}[-L, L] \quad (\text{B.18})$$

が成り立つ。 $L^2_{\text{odd}}[-L, L]$ も $L^2_{\text{even}}[-L, L]$ も $L^2[-L, L]$ の閉部分空間である。しかも、

$$u(x) \in L^2_{\text{odd}}[-L, L], \quad v(x) \in L^2_{\text{even}}[-L, L] \implies \int_{-L}^L u(x) v(x) dx = 0 \quad (\text{B.19})$$

が成立する。すなわち、 $L^2_{\text{odd}}[-L, L]$ と $L^2_{\text{even}}[-L, L]$ は相互に直交補空間である。

例 B.1.3 実数(または複素数)の無限数列 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ であって、二乗総和可能性、すなわち、

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty \quad (\text{B.20})$$

を満たすものの全体を ℓ^2 と書き、二乗総和可能な数列空間(またはスモールエルトゥー空間)という¹²。 ℓ^2 は成分毎の和、成分毎のスカラー倍を經由して、 \mathbb{R} (または \mathbb{C}) 上のベクトル空間になる。 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \ell^2$ に対し、内積を

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y_n} \quad (\text{B.21})$$

¹¹ 奇関数かつ偶関数となるのは0の値をとる定数関数だけである。

¹² 数列の添え数集合は、この例のように、 $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ にとるとは限らない。 $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ のこともあるし、偶数全体や奇数全体など、状況に応じた可算集合が用いられる。必要な場合には、 $\ell^2(\mathbb{N})$, $\ell^2(\mathbb{Z})$ などと添え数集合が明示される。

によって定義する¹³ . したがって, $\mathbf{x} \in \ell^2$ のノルムは

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} \quad (\text{B.22})$$

である. ℓ^2 の基本列は $\{\mathbf{x}_m; m = 1, 2, \dots\}$ ($\mathbf{x}_m = (x_{m1}, x_{m2}, \dots)$) であって,

$$\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_k\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_{mn} - x_{kn}|^2 \rightarrow 0, \quad m, k \rightarrow \infty$$

を満たすものである. 特に, 各 n について, $\lim_{m \rightarrow \infty} x_{mn} = x_m$ が存在し, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ という数列が定まる. しかも,

$$\mathbf{x} \in \ell^2, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}\| = 0$$

が成り立つ. つまり, 任意の基本列が収束するから, ℓ^2 は完備, 言い換えれば, Hilbert 空間である.

\mathbb{X} を内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ の Hilbert 空間とする. \mathbb{X} のベクトルの系 $\{\mathbf{e}_n; n = 1, 2, \dots\}$ は,

$$\langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \rangle = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \quad (\text{B.23})$$

および $\mathbf{v} \in \mathbb{X}$ について

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_n \rangle = 0, \quad n = 1, 2, \dots \implies \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (\text{B.24})$$

を満たすときに, \mathbb{X} の正規直交基底とよばれる.

正規直交基底が存在すれば, 任意のベクトルが, その1次結合の極限として表される.

命題 B.1.1 $\{\mathbf{e}_n; n = 1, 2, \dots\}$ はヒルベルト空間 \mathbb{X} の正規直交基底とする. 任意の $\mathbf{u} \in \mathbb{X}$ について

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_n \rangle \mathbf{e}_n \quad (\text{B.25})$$

が成り立つ¹⁴. しかも,

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_n \rangle|^2 \quad (\text{B.26})$$

¹³ スカラーが複素数の場合も通用する形に表した. この内積の定義可能性には証明が要る.

¹⁴ ここで, (B.25) の等号は, $\mathbf{u}^N = \sum_{n=1}^N \langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_n \rangle \mathbf{e}_n$ として, $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^N\| = 0$ を意味する. なお,

$$\|\mathbf{u}\|^2 - \sum_{n=1}^N |\langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_n \rangle|^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^N\|^2 \geq 0$$

である. 特に, (B.26) の右辺は収束し, (B.25) の右辺が \mathbb{X} のベクトルを定める. (B.25) の等号の成立は (B.24) に拠る.

が成立する．特に，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_n \rangle = 0 \quad (\text{B.27})$$

となる．

詳細は省略する．(B.25) は Fourier 級数展開の一般化である．以下に正規直交基底の例を掲げる．このような具体的な場合に始めて変数の値の水準での級数展開ともとの関数との比較が可能になる．

命題 B.1.2 Hilbert 空間 \mathbb{X} に正規直交基底 $\{\mathbf{e}_n; n = 1, 2, \dots\}$ があるとする．このとき，写像

$$\varphi: \mathbb{X} \ni \mathbf{v} \mapsto \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^2, \quad x_n = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_n \rangle, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (\text{B.28})$$

は， \mathbb{X} から ℓ^2 の上へのユニタリ写像，すなわち，線形全単射写像で，内積を保存する：

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v}) \rangle. \quad (\text{B.29})$$

ただし，左辺は \mathbb{X} で，右辺は ℓ^2 での内積である．

検証は省略する．関数解析の教科書を見られたい．

例 B.1.4 直線の上の周期 L の二乗可積分関数全体のなす Hilbert 空間を区間 $[0, L]$ ($L > 0$) の上の $L^2[0, L]$ と同一視して扱うことにする．三角関数系

$$\frac{1}{\sqrt{L}}, \quad \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right), \quad \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (\text{B.30})$$

は $L^2[0, L]$ の正規直交基底である．実際， $L^2[0, L]$ において，任意の $g(x)$ を周期 L のなめらかな関数の列 $g_t(x)$ で近似できることに注意しよう¹⁵．ところが， $g(x)$ がなめらかならば，

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{L} \int_0^L g(z) dz \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \int_0^L g(z) \cos\left(\frac{2n\pi}{L}z\right) dz \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \int_0^L g(z) \sin\left(\frac{2n\pi}{L}z\right) dz \sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

¹⁵ $W_t(x)$ を Gauss-Weierstrass 関数とすると， $g_t(x) = \int_{-\infty}^{\infty} W_t(x-y) g(y) dy$ はなめらかな周期関数である．しかも，(2.50) より

$$|g(x) - g_t(x)|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} W_t(x-y) dy \int_{-\infty}^{\infty} W_t(x-y) |g(y) - g(x)|^2 dy$$

である．右辺第 1 因子は 1 である．第 2 因子の積分変数を $y = x + \sqrt{t}z$ によって z に改めてから，両辺を $[0, L]$ 上で x で積分せよ．積分の順序と範囲に注意しながら， $t \rightarrow 0$ とすれば，右辺，したがって，左辺の $[0, L]$ 上の積分は 0 に収束する．

が、周期上で一様収束する。したがって、

$$\int_0^L g(x) dx = 0, \\ \int_0^L g(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) dx = 0, \quad \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) dx = 0, \\ n = 1, 2, \dots,$$

ならば、当然、 $g(x) \equiv 0$ となる。

例 B.1.5 $L^2[0, L]$ において、関数系

$$\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{B.32})$$

は正規直交基底である。実際、 $L^2[0, L]$ の関数 $f(x)$ は奇関数

$$f^\circ(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < L \\ -f(-x), & -L < x < 0 \end{cases} \quad (\text{B.33})$$

として、区間 $[-L, L]$ に拡張（し、さらに、全直線上に周期 $2L$ の関数 $\hat{f}(x)$ として拡張）することができる。しかも、(B.33) は

$$L^2[0, L] \ni f(x) \mapsto f^\circ(x) \in L^2_{\text{odd}}[-L, L]$$

の線形全単射であり、さらに、 $f(x), g(x) \in L^2[0, L]$ に対し、

$$\int_{-L}^L f^\circ(x) g^\circ(x) dx = 2 \int_0^L f(x) g(x) dx$$

が成り立つ。一方、 $L^2[-L, L]$ の正規直交系として三角関数系

$$\frac{1}{\sqrt{2L}}, \sqrt{\frac{1}{L}} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n \geq 1, \\ \sqrt{\frac{1}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n \geq 1,$$

を考えると、前半は $L^2_{\text{even}}[-L, L]$ に属し、後半が $L^2_{\text{odd}}[-L, L]$ に属する。以上を整理すれば、(B.32) が $L^2[0, L]$ の正規直交系をなすことがわかる。

問 B.1.2 三角関数系

$$\frac{1}{\sqrt{L}}, \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (\text{B.34})$$

は $L^2[0, L]$ の正規直交基底である。

例 B.1.6 単項式関数 t^n , $n = 0, 1, 2, \dots$ は区間 $[-1, 1]$ の上の二乗可積分関数の空間 $L^2[-1, 1]$ に属し, しかも, この区間で, 任意の連続関数を多項式列で一様に近似することができる¹⁶から,

$$f(t) \in L^2[-1, 1], \int_{-1}^1 t^n f(t) dt = 0, n = 0, 1, 2, \dots \implies f(x) = 0 \quad (\text{B.35})$$

である. t^n , $n = 0, 1, 2, \dots$ は 1 次独立な系であるが, 必ずしも互いに直交しない. これらから正規直交系を作り出そう. \mathbb{P}_m を次数が m を超えない多項式の全体とする ($m = 0, 1, 2, \dots$). \mathbb{P}_m は $L^2[-1, 1]$ の $m+1$ -次元の閉部分空間であり, 特に, $\mathbb{P}_0 = \mathbb{R}$, $t^{m+1} \notin \mathbb{P}_m$ である. $q_m(t) \in \mathbb{P}_m$ を

$$\int_{-1}^1 |t^{m+1} - q_m(t)|^2 dt = \inf_{q(t) \in \mathbb{P}_m} \int_{-1}^1 |t^{m+1} - q(t)|^2 dt$$

となるように求めよう. $q_m(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m$ とおき,

$$\int_{-1}^1 \{t^{m+1} - q_m(t)\} t^n dt = 0, \quad n = 0, 1, \dots, m \quad (\text{B.36})$$

から, a_0, \dots, a_m を決めればよい¹⁷. その結果,

$$p_0(t) = 1, p_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} t, \dots, p_{m+1}(t) = \frac{1}{\nu_{m+1}} \{t^{m+1} - q_m(t)\}, \dots,$$

ただし, $\nu_{m+1}^2 = \int_{-1}^1 (t^{m+1} - q_m(t))^2 dt$, とおけば¹⁸,

$$\int_{-1}^1 p_j(t) p_k(t) dt = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases}$$

である. すなわち, $\{p_n(t); n = 0, 1, 2, \dots\}$ は $L^2[-1, 1]$ の正規直交基底をなす¹⁹.

B.1.2 強収束と弱収束

\mathbb{X} は, 内積 \langle, \rangle , ノルム $\| \cdot \|$ のヒルベルト空間とする. \mathbb{X} のベクトルの列 u_n がベクトル u に収束するということは (B.13) を意味するのであった. しかし, ヒルベルト空間には, 内積を利用しても収束が定義できる.

¹⁶Weierstrass の多項式近似定理.

¹⁷(B.36) は $q(t) \in \mathbb{P}_m$ として,

$$d_m(\epsilon) = \int_{-1}^1 |t^{m+1} - q_m(t) - \epsilon q(t)|^2 dt$$

が $\epsilon = 0$ で最小値をとる条件であり,

$$t^{m+1} - q_m(t) \in \mathbb{P}_m^\perp$$

に他ならない. $q_m(t)$ は t^{m+1} の \mathbb{P}_m への直交射影 (または, 正射影) である.

¹⁸他にも

$$p_2(t) = 3 \sqrt{\frac{5}{8}} \left(t^2 - \frac{1}{3} \right), \quad p_3(t) = 5 \sqrt{\frac{7}{8}} \left(t^3 - \frac{3}{5} t \right), \dots$$

である.

¹⁹これらは n -次の Legendre 多項式をそのノルムで除して得られる多項式と一致する.

任意のベクトル $w \in \mathbb{X}$ との内積が収束するとしよう。すなわち、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, w \rangle = \langle u, w \rangle, \quad w \in \mathbb{X}. \quad (\text{B.37})$$

このとき、 u_n は u に弱収束するという。これに対し、(B.13) の収束を強収束という²⁰。

補題 B.1.1

1. 強収束列は弱収束する。
2. 強収束列のノルムは収束する。
3. 弱収束列が強収束するための必要十分条件はノルムが収束することである。

[証明] 3. だけ確認して置こう。必要性は 1. 2. による。逆を示すために、 u_n が u に弱収束しているとする。

$$\|u_n - u\|^2 = \|u_n\|^2 + \|u\|^2 - 2\langle u_n, u \rangle$$

に注意しよう。右辺第 3 項は、 $-2\|u\|^2$ に収束するから、

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|^2 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \{\|u_n\|^2 - \|u\|^2\}$$

である。

[証終]

弱収束固有の現象の例を挙げよう。

例 B.1.7 $\{e_n; n = 1, 2, \dots\}$ はヒルベルト空間 \mathbb{X} の正規直交基底とする。 e_n はゼロベクトル 0 に弱収束する。実際、(B.27) の主張に他ならない。しかし、 $\|e_n\| = 1$ だから、強収束はしない。

例 B.1.8 $L^2[0, L]$ の正規直交系 (B.32) を思い出そう。任意の $f(x) \in L^2[0, L]$ に対し、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right) dx = 0 \quad (\text{B.38})$$

である。ちなみに、 $f(x)$ が区間 $(0, L)$ の部分区間 (a, b) ($0 < a < b < L$) の上で定数値ならば (B.38) はすぐ分かる。したがって、 $f(x)$ が階段関数、すなわち、このような関数の 1 次結合の場合にも成り立つことは明らかである。一般の二乗可積分関数は階段関数列の (強収束による) 極限として表されるから、(B.38) は、この場合、ほとんど直接に証明できる²¹。

²⁰ このノートでの強弱の収束の区別は、主に用語の使い分けの便宜のためである。より深くは、関数解析の専門書をご覧いただきたい。

²¹ $f(x)$ を近似する階段関数の列を $\{g_s(x)\}$ とし、

$$\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right) dx = \int_0^L g_s(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right) dx + \int_0^L \{f(x) - g_s(x)\} \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right) dx$$

B.1.3 Riesz の定理

(内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ノルム $\|\cdot\|$ の) ヒルベルト空間 \mathbb{X} からスカラー体 \mathbb{R} (または \mathbb{C}) への写像は汎関数といわれる. 特に, 汎関数 L が線形性を満たすとき, すなわち, ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{X}$ とスカラー a, b に対し

$$L(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aL(\mathbf{u}) + bL(\mathbf{v})$$

が成り立つとき, L は線形汎関数といわれ, さらに, 有界性, すなわち, 適当な正数 $C > 0$ に対し,

$$|L(\mathbf{u})| \leq C\|\mathbf{u}\|, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{X}$$

が満足される²²ならば, L は有界線形汎関数といわれる.

例 B.1.9 任意の $\mathbf{v} \in \mathbb{X}$ に対し, $L(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ とおくと, L は有界線形汎関数である.

例 B.1.9 の逆の主張が Riesz の定理である.

命題 B.1.3 L は \mathbb{X} 上の有界線形汎関数とする. このとき, \mathbf{w} がただ一つ定まって,

$$L(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{X} \tag{B.39}$$

が成り立つ.

[証明] \mathbf{w} の一意性は明らかであろう (内積の性質から). $L(\mathbf{u}) \equiv 0$ ならば $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ にとればよい. そうでないときは, L の零空間

$$\mathcal{N} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{X}; L(\mathbf{u}) = 0\}$$

の直交補空間 \mathcal{N}^\perp を考える. \mathcal{N} は \mathbb{X} の閉部分空間 ($\neq \mathbb{X}$) である. $\mathbf{v} \in \mathcal{N}^\perp$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ならば $L(\mathbf{v}) \neq 0$ であり, したがって, 必要なら $L(\mathbf{v})$ で割ればよいから, $\mathbf{v} \in \mathcal{N}^\perp$ を $L(\mathbf{v}) = 1$ を満たすようにとれる. 一方, 任意の $\mathbf{u} \in \mathbb{X}$ に対し, $\mathbf{u} - L(\mathbf{u})\mathbf{v} \in \mathcal{N}$ である. したがって, $\langle \mathbf{u} - L(\mathbf{u})\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ となる. 定理は,

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{N}^\perp, L(\mathbf{v}) = 1$$

ととることにより証明される.

[証明終]

Riesz の定理は Hilbert 空間論の基本であり, 応用上も重要である. しかし, ここではこれ以上立ち入らない.

に注意する. 右辺第二項の絶対値は s を選んであらかじめ指定しておいた (いくらでも小さい) 数 $\frac{1}{2}\epsilon > 0$ より小さくできる. この $g_s(x)$ は階段関数だから, 右辺第 1 項は n を十分大きくして, その絶対値を $\frac{1}{2}\epsilon$ より小さくでき, したがって, 左辺は ϵ を超えない.

²² C の下限を有界線形汎関数 L のノルムといい, $\|L\|_*$ と表すことがある:

$$\|L\|_* = \sup_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{X} \\ \mathbf{u} \neq \mathbf{0}}} \frac{|L(\mathbf{u})|}{\|\mathbf{u}\|}.$$

B.1.4 導関数概念の拡張

d -次元領域 Ω で定義された C^∞ -級のなめらかな関数で, Ω の境界の近傍では消えるようなものの全体を $C_0^\infty(\Omega)$ と書き表す.

そのような関数が実際に構成できる例を挙げる.

例 B.1.10 直線上の関数

$$\eta(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \quad (\text{B.40})$$

は C^∞ -級のなめらかさを持つことに注意しよう²³. したがって,

$$\eta_1(t) = \frac{1}{\int_0^1 \eta(z)\eta(1-z) dz} \int_{-\infty}^t \eta(\theta) \eta(1-\theta) d\theta \quad (\text{B.41})$$

は, $t \leq 0$ で $\eta_1(t) = 0$, $t \geq 1$ では $\eta_1(t) = 1$ を満足する非減少な C^∞ -級の関数である.

直線上の関数

$$\rho(t) = \eta_1(1-t^2) \quad (\text{B.42})$$

は, $|t| \geq 1$ で $\rho(t) = 0$, $-1 < t < 1$ では $0 < \rho(t) \leq 1$ となる C^∞ -級の関数で

$$\rho(0) = 1, \quad \rho^{(k)}(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (\text{B.43})$$

を満足する.

\mathbb{R}^d の場合, $x = (x_1, \dots, x_d)$ の関数

$$\rho_d(x) = \rho(|x|) = \eta_1(1 - |x|^2), \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2} \quad (\text{B.44})$$

は, 単位球の外部 $|x| \geq 1$ では消え, 内部 $|x| < 1$ では正, かつ $\rho_d(x) - 1$ が $x = 0$ において無限次の零点をもつ.

また,

$$\omega(x) = \frac{1}{\varpi} \rho_d(x), \quad \varpi = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_d(x) dx > 0 \quad (\text{B.45})$$

²³実際に問題になるのは, $t = 0$ におけるなめらかさだけである. $t > 0$ として, k -階導関数を $2k$ -次の多項式 $p_k(\tau)$ を利用して

$$\eta^{(k)}(t) = p_k\left(\frac{1}{t}\right) \eta(t), \quad k = 0, 1, \dots$$

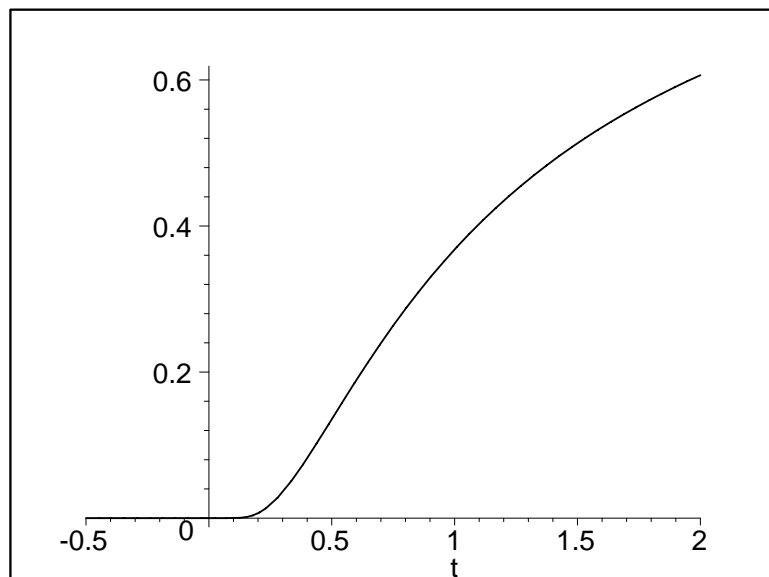
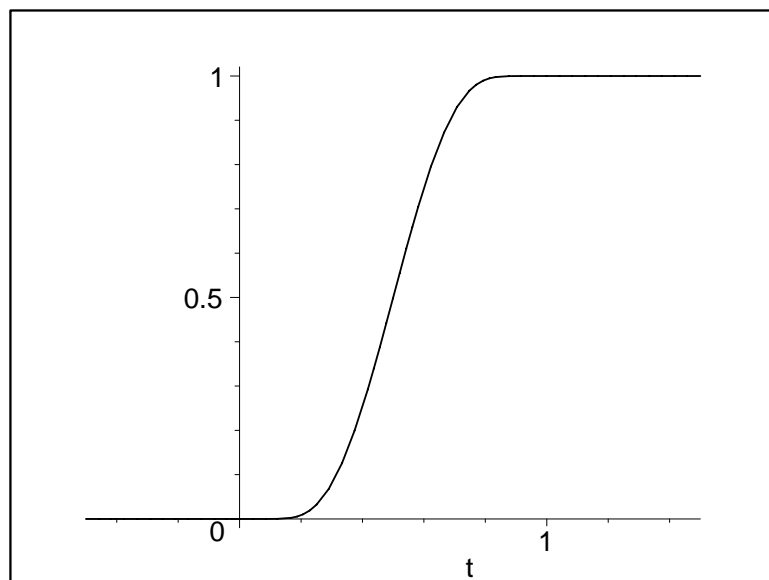
と表せる. ここで,

$$p_0(\tau) = 1, \quad p_{k+1}(\tau) = \tau^2 p_k(\tau) - \tau^2 p_k'(\tau)$$

である. したがって, すべての k について

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \eta^{(k)}(t) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} p_k(\tau) e^{-\tau} = 0$$

となる.

図 B.1: $t = 0$ の近くでの関数 $\eta(t)$ のグラフ図 B.2: $\eta_1(t)$ のグラフ

は, $|x| \geq 1$ で消え, $|x| < 1$ で正, かつ

$$\int_{\mathbb{R}^d} \omega(x) dx = 1 \quad (\text{B.46})$$

を満足する C^∞ -級関数である.

補題 B.1.2 $\epsilon > 0$ とし,

$$\omega_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^d} \omega\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

とおく. 任意の $u(x) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対し,

$$u_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \omega_\epsilon(x-y) u(y) dy \quad (\text{B.47})$$

とおくと, $u_\epsilon(x)$ は C^∞ -級の二乗可積分関数であり, しかも,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} |u_\epsilon(x) - u(x)|^2 dx = 0 \quad (\text{B.48})$$

が成り立つ²⁴.

[証明] $u_\epsilon(x)$ のなめらかさは, (B.47) における $\omega_\epsilon(x-y)$ のなめらかさに拠る. (B.46) から, $\int \omega_\epsilon(x) dx = 1$, したがって,

$$u_\epsilon(x) - u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \omega_\epsilon(x-y) \{u(y) - u(x)\} dy$$

である. 積分変数を $x-y = \epsilon z$ を満たす z に改めると, 右辺は

$$\int_{\mathbb{R}^d} \omega(z) \{u(x-\epsilon z) - u(x)\} dz$$

となる²⁵. この積分の絶対値の二乗は,

$$\int_{|z| \leq 1} \omega(z) dx \int_{|z| \leq 1} \omega(z) |u(x-\epsilon z) - u(x)|^2 dz$$

を超えないから, (B.48) の検証は

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{|z| \leq 1} \omega(z) |u(x-\epsilon z) - u(x)|^2 dz dx = 0$$

を示すことに帰着する. これは, 上の積分の順序を変更し, $u(x) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ の平行移動に関する連続性を用いればよい. [証終]

²⁴(B.47) の左辺を $J_\epsilon u(x)$ と書いて, この操作を作用素 J_ϵ として認識すると, (B.48) は J_ϵ が恒等作用素の近似であることを意味する. 作用素 J_ϵ は必ずしもなめらかではない関数をなめらかに (あるいは軟らかく [to mollify]) する効果を持つので, 軟化子と呼ばれる.

²⁵実際の積分範囲は $|z| \leq 1$ である.

\mathbb{R}^d の (境界が区分的になめらかな) 一般の領域 Ω の場合は, 次のように考える. まず, $R > 0$ として,

$$\Omega^R = \{ x \in \Omega \mid |x| < R \}$$

とおけば, Ω^R は Ω の有界な部分領域である. Ω が有界であることは, 十分に大きな $R > 0$ に対し, $\Omega^R = \Omega$ が成立することとすることができる. 一方, 点 $x \in \Omega^R$ と境界 $\partial\Omega^R$ の距離は

$$\text{dist}(x, \partial\Omega^R) = \inf_{y \in \partial\Omega^R} |x - y| \quad (\text{B.49})$$

で与えられる. $R > 0$ が十分に大きく, $\delta > 0$ が十分に小さいとき,

$$\Omega_\delta^R = \{ x \in \Omega^R \mid \text{dist}(x, \partial\Omega^R) > \delta \}$$

は, Ω の部分領域である. Ω_δ^R の特性関数は

$$\chi_\delta^R(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_\delta^R \\ 0, & x \notin \Omega_\delta^R \end{cases}$$

である. $\chi_\delta^R(x)u(x) \in L^2(\Omega)$ が $u(x) \in L^2(\Omega)$ に対して成り立ち, しかも,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u(x) - \chi_\delta^R(x)u(x)|^2 dx = 0$$

を満たすことは明らかであろう.

補題 B.1.3 $0 < \epsilon < \delta$ とする. 任意の $u(x) \in L^2(\Omega)$ に対し,

$$u_{\delta, \epsilon}^R(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \omega_\epsilon(x-y) \chi_\delta^R(y) u(y) dy$$

とおく. $u_{\delta, \epsilon}^R(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ であって, かつ,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u_{\delta, \epsilon}^R(x) - u(x)|^2 dx = 0$$

となる.

実際, この補題は基本的に補題 B.1.2 の応用として得られる. この補題の意義は, $L^2(\Omega)$ において, $C_0^\infty(\Omega)$ が稠密, すなわち, 任意の $u(x) \in L^2(\Omega)$ に対し, $C_0^\infty(\Omega)$ の関数列 $u_\nu(x)$, $\nu = 1, 2, \dots$ を

$$\int_{\Omega} |u(x) - u_\nu(x)|^2 dx \rightarrow 0, \quad \nu \rightarrow \infty,$$

が成り立つように選び出せることを示していることにある.

今, $u(x) \in L^2(\Omega)$ に (C^∞ -級の) なめらかな近似列 $u_\nu(x) \in L^2(\Omega)$ があり, その α 階の偏導関数の列 $\partial^\alpha u_\nu(x)$ も $L^2(\Omega)$ で収束するとしよう. この極限を $u^{(\alpha)}(x)$ と表し, $u(x)$ の α 階の一般化された偏導関数とよぶ.

例 B.1.11 $L^2[-1, 1]$ において, 関数 $u(t) = 1 - |t|$ はなめらかな関数列

$$u_\nu(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)\pi t, \quad \nu = 1, 2, \dots,$$

で近似される. 導関数列

$$u'_\nu(t) = -\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)\pi t$$

は $\nu > \mu \rightarrow \infty$ のとき

$$\int_{-1}^1 |u'_\nu(t) - u'_\mu(t)|^2 dt = \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=\mu+1}^{\nu} \frac{1}{(2k-1)^2} \rightarrow 0$$

だから, $\{u'_\nu(t)\}$ は $L^2[-1, 1]$ で収束する. 実際,

$$-\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)\pi t$$

は, $u(t)$ の一般化された導関数

$$v(t) = \begin{cases} -1, & 0 < t < 1 \\ 1, & -1 < t < 0 \end{cases}$$

の正弦級数展開であり, 通常の微分演算でも $t \neq 0$ では, $u'(t) = v(t)$ である.

この観察は次の補題に整理される.

補題 B.1.4 (実数値) 関数 $u(x) \in L^2[-1, 1]$ の三角級数展開が

$$u(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t\} \quad (\text{B.50})$$

で与えられているとする. $u(t)$ が一般化された導関数を持つための必要十分条件は

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \{a_n^2 + b_n^2\} < +\infty \quad (\text{B.51})$$

の成立である. このとき, $u(t)$ の一般化された導関数 $u'(t)$ の三角級数展開は

$$u'(t) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \{nb_n \cos n\pi t - na_n \sin n\pi t\} \quad (\text{B.52})$$

で与えられる.

導関数の概念の拡張には別な筋もある. $u(x) \in L^2(\Omega)$ に対し, 適当な $v(x) \in L^2(\Omega)$ が決まって, 等式

$$\int_{\Omega} u(x) \partial^\alpha g(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(x) g(x) dx \quad (\text{B.53})$$

が $g(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ を任意に選んで成立するときは, $v(x)$ は $u(x)$ の α 階の弱い意味の偏導関数とよばれる²⁶. この $v(x)$ も $u^{(\alpha)}(x)$ と書くことにする. さらに, $\partial^\alpha u(x)$ と書き表すこともある.

問 B.1.3 (2.45) の $f(x)$ を考える. $f(x) \in L^2[0, 1]$ であり, 弱い意味の導関数 $f^1(x)$ を持つ. ここで,

$$f^1(x) = \begin{cases} 2, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ -2, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

である. また, $f^1(x)$ には弱い意味の導関数は存在しない²⁷.

補題 B.1.5 $u(x) \in L^2(\Omega)$ には α 階の一般化された偏導関数 $u^{(\alpha)}(x)$ があるとする. この $u^{(\alpha)}(x)$ は弱い意味の偏導関数でもある.

実際, $u_\nu(x)$ を $u(x)$ のなめらかな近似列, $g(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ とすると,

$$(-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u^{(\alpha)}(x) g(x) dx = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \partial^\alpha u_\nu(x) g(x) dx$$

である. 右辺は, 部分積分により

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_\nu(x) \partial^\alpha g(x) dx = \int_{\Omega} u(x) \partial^\alpha g(x) dx$$

となる.

注意 B.1.2 $\Omega = \mathbb{R}^d$ の場合, 弱い意味の偏導関数は一般化された偏導関数である. 実際, $v(x) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ は $u(x) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ の α -階の弱い意味の偏導関数とする. $u_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \omega_\epsilon(x-y) u(y) dy$, $\epsilon > 0$, とおき, $v_\epsilon(x)$ も同様に定義すると,

$$\partial_x^\alpha \{\omega_\epsilon(x-y)\} = (-1)^{|\alpha|} \partial_y^\alpha \{\omega_\epsilon(x-y)\}$$

だから, $\partial^\alpha u_\epsilon(x) = v_\epsilon(x)$ である. したがって, $\epsilon \rightarrow 0$ のとき, $\partial^\alpha u_\epsilon(x)$ は $v(x)$ に収束する. 一般の Ω の場合, 本ノートのように区分的になめらかな境界を考えている場合には, 弱い意味の偏導関数は一般化された偏導関数となり, したがって, 両者を区別する必要はない²⁸. しかし, 境界 $\partial\Omega$ の形状によっては, 弱い意味の導関数は必ずしも一般化された導関数とはならない.

²⁶Riesz の定理を念頭に置けば

$$g \mapsto \int_{\Omega} u(x) \partial^\alpha g(x) dx$$

が $L^2(\Omega)$ 上の有界線形汎関数に拡張されることを意味する.

²⁷ $f^1(x)$ に弱い意味の導関数が存在したとすると, 任意の $\phi(x) \in C_0^1(0, 1)$ に対し,

$$\phi \mapsto \int_0^1 f^1(x) \phi'(x) dx = -4 \phi\left(\frac{1}{2}\right)$$

が $L^2[0, 1]$ 上の有界な線形汎関数に拡張されなければならない. ところで, $\rho(x) = 0$, $|x| > \frac{1}{2}$, $\rho(0) = 1$, かつ $\int |\rho(x)|^2 dx = 1$ を満たす (実数値) 関数 $\rho(x)$ を選び, 上式に $\phi(x) = n^{1/4} \rho(n(x - \frac{1}{2}))$ ($n \geq 1$) を適用してみよ.

²⁸詳細は省略する.

補題 B.1.6 $u_\nu(x)$ は $u(x)$ に弱収束する $L^2(\Omega)$ の元の列とし, 各 $u_\nu(x)$ には α -階の弱い意味の導関数 $u_\nu^{(\alpha)}(x) \in L^2(\Omega)$ が存在するとする. $u_\nu^{(\alpha)}(x)$ が $v(x) \in L^2(\Omega)$ に弱収束するならば, $v(x)$ は $u(x)$ の α -階の弱い意味の導関数である.

実際, $g(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ に対し,

$$\int_{\Omega} u_\nu(x) \partial^\alpha g(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u_\nu^{(\alpha)}(x) g(x) dx$$

において, $\nu \rightarrow \infty$ とすれば,

$$\int_{\Omega} u(x) \partial^\alpha g(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(x) g(x) dx$$

となる.

注意 B.1.3 補題 B.1.6 は, 弱収束を強収束に改めて成立する. このとき, 当然

$$\int_{\Omega} |u_\nu^{(\alpha)}(x) - v(x)|^2 dx \rightarrow 0$$

である.

B.1.5 Sobolev 空間

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ は区分的になめらかな境界を持つ領域とする. $m = 1, 2, \dots$ に対し, Ω 上の二乗可積分関数 $u(x)$ であって, m -階までの弱い意味の導関数 $u^{(\alpha)}(x) \in L^2(\Omega)$, $|\alpha| \leq m$, が存在するようなもの全体のなす空間を m -階の Sobolev 空間といい, $\mathbf{H}^m(\Omega)$ で表す. $L^2(\Omega)$ は 0-階の Sobolev 空間とも考えて $\mathbf{H}^0(\Omega)$ と表すことがある.

命題 B.1.4 Sobolev 空間 $\mathbf{H}^m(\Omega)$ は Hilbert 空間になる. その内積は

$$\langle u, v \rangle_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} u^{(\alpha)}(x) \overline{v^{(\alpha)}(x)} dx \quad (\text{B.54})$$

で与えられる²⁹.

[証明] (B.54) が内積を定めていることは明らかであろう. この内積が定めるノルムを $\|\cdot\|_m$ とする. $u_\nu(x) \in \mathbf{H}^m(\Omega)$ がこのノルムに関する基本列であるとしよう. 各 α について, $u_\nu^{(\alpha)}$ が $L^2(\Omega)$ における基本列になることに注意しよう. したがって, 補題 B.1.6 とその後の注意により, $u_\nu(x)$ は $\mathbf{H}^m(\Omega)$ で収束する. [証終]

²⁹ 実数値関数だけを考えているときは $\overline{}$ は不要である.

注意 B.1.4 $m > n$ ならば, $\mathbf{H}^m(\Omega) \subset \mathbf{H}^n(\Omega)$ は明らかであろう. しかも,

$$\|u\|_n \leq \|u\|_m, \quad u \in \mathbf{H}^m(\Omega)$$

である.

問 B.1.4 例 2.2.3 で構成した $u(x, y)$ は, 各 y において x の関数として, Sobolev 空間 $\mathbf{H}^1(0, 1)$ に属することを確かめよ.

半空間 $\Omega = \mathbb{R}_+^{n+1} = \{ (x, t) ; x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \}$ の場合, 境界

$$\partial\Omega = \{ (x, 0) ; x \in \mathbb{R}^n \}$$

を \mathbb{R}^n で表すことができる. したがって, $\partial\Omega$ 上の Sobolev 空間を考え易い. これと Ω 上の Sobolev 空間と比較しよう.

補題 B.1.7 $u(x, t) \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}_+^{n+1})$ とする. このとき, $u(x, 0) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ であり,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x, 0)|^2 dx \leq c \|u\|_1^2 \quad (\text{B.55})$$

が成り立つ. $c > 0$ は適当な定数である.

[証明] $u(t, x)$ は t について微分可能としてよい. したがって,

$$u(0, x) = u(t, x) - \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} u(\tau, x) d\tau$$

から,

$$|u(0, x)| \leq |u(t, x)| + \sqrt{t} \sqrt{\int_0^\infty \left| \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \right|^2 dt}$$

が導かれる. 両辺に $e^{-t^2/4}$ を乗じて, さらに, t で積分すれば,

$$\sqrt{\pi} |u(x, 0)| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\int_0^\infty |u(x, t)|^2 dt} + \sqrt{2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \sqrt{\int_0^\infty \left| \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \right|^2 dt}$$

となる. 両辺を二乗して x で積分すれば, (B.55) を得る. [証終]

注意 B.1.5 (B.55) は, $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}_+^{n+1})$ の元は境界値 $u(x, 0) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ をとることを意味する. しかも, $u_\nu \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}_+^{n+1})$ が $u(x, t)$ に収束するならば, 境界値 $u_\nu(x, 0)$ も $u(x, 0)$ に収束する. 特に,

$$\mathbf{H}_o^1(\mathbb{R}_+^{n+1}) = \{ u(x, t) \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}_+^{n+1}); u(x, 0) = 0 \} \quad (\text{B.56})$$

は $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}_+^{n+1})$ の閉部分空間である.

索引

- ラプラシアン, 31
 - 1 階の偏微分方程式, 55
 - 一般化された偏導関数, 102
 - 一般化された Leibniz の公式, 72
- エネルギー積分, 19, 47
 - m 階, 8
- エルトゥー空間, 91
- 解, 8
 - 階数, 72
 - 階数低下法, 25
 - 階段関数, 97
- 回転方向微分, 81
- Gauss-Weierstrass 関数, 26, 86, 94
- 拡散方程式, 25
- 重ね合わせの原理, 9
- 完備, 91
- 消える, 45
- 基本列, 91
- 境界条件, 2
- 強収束, 97
- Green 関数, 46
- Green-Stokes の定理, 45
- 弦の振動の方程式, 12
- Cauchy の不等式, 90
- Cauchy 列, 91
- 誤差関数, 27
- 固有関数, 33
- 固有値, 33
- 固有値問題, 33
- 最大値の原理, 43
- 三角級数展開, 15
- 二乗可積分関数の空間, 91
- 二乗可積分条件, 91
- 二乗総和可能な数列空間, 92
- 辞書式の順序, 70
- 弱収束, 97
- 収束列, 91
- 初期条件, 2, 10
- 初期値, 15
- 進行波解, 9
- 数式処理ソフト, 73
- スモールエルトゥー空間, 92
- 整関数, 39
- 正規直交基底, 93
- 正弦係数, 87
- 正射影, 96
- 積分曲線, 56
- ゼロ・ベクトル, 89
- 線形, 7
- 線形汎関数, 98
- 線形偏微分作用素, 8
- 線形偏微分方程式, 8
- 前ヒルベルト空間, 90
- 全変動量, 87
- Sobolev 空間, 36
- 対数ポテンシャル, 41
- 多項係数, 71

- 多項定理, 71
- 多重指標, 70
- 多重指標の階乗, 71
- 多重指標の差, 70
- 多重指標の長さ, 70
- 多重指標の和, 71
- D'Alembert の公式, 10, 12
- 単位多重指標, 79
- 稠密, 102
- 調和関数, 39
- 直和, 92
- 直和分解, 92
- 直交射影, 96
- 定数係数偏微分作用素, 8
- Dirichlet の核関数, 16
- Dirichlet 問題, 34
- 動径方向微分, 78
- 同次方程式, 8
- 解く, 8
- 特性曲線, 61
- 特性微分作用素, 61
- 特性ベクトル場, 61
- 内積, 90
- 内積空間, 90
- 軟化子, 101
- 2項定理, 71
- 熱核関数, 26, 86
- 熱作用素, 82, 85
- 熱方程式, 25
- Neumann 問題, 48
- ノルム, 90
- ノルム空間, 90
- 波動作用素, 82, 84
- Banach 空間, 91
- 汎関数, 98
- 非同次方程式, 8
- 非粘性 Burgers 方程式, 55
- Hilbert 空間, 91
- フーリエ級数, 3
- 分割, 87
- 平均値原理, 42
- 閉部分空間, 92
- ベクトル空間, 89
- ベクトル場, 56
- Bessel 関数, 54
- Bessel の微分方程式, 54
- 変数分離解, 13
- 変数分離法, 13, 67
- 変動量, 87
- 偏微分作用素, 72
- 偏微分方程式, 2
- Poisson の積分公式, 43
- Maple 7, 73
- Maple 6, 73
- 有界線形汎関数, 98
- 有界変動, 87
- ユニタリ写像, 94
- 要素解, 13
- 余弦係数, 87
- 弱い意味の偏導関数, 36, 104
- Leibniz の公式, 71
- Lagrange-Charpit のベクトル場, 61
- Lagrange-Charpit の偏微分作用素, 61
- ラプラス作用素, 31, 82
- ラプラス作用素の基本解, 83
- Riesz の定理, 98
- Riemann-Lebesgue の定理, 19
- Lipschitz 定数, 87
- Lipschitz 連続, 87

兩立条件, 20

零空間, 98