数学解析・計算可能解析，そして（多分）数値解析をめぐる省察

―― 最終講義 ――

吉川　敦
九州大学大学院数理学研究院

平成 18 年 3 月 15 日

目 次

1　はじめに

まず，講義自体の概要の背景を §1.1 で述べる．標題の講義に至る経緯は §1.2 に若干述べてあるが，講義では触れない．暇な折にでも目をお通しいただければ幸いである．§1.3 はコメントである．

1.1　この講義の概要

さて，この講義の標題にある数学解析，計算可能解析，数値解析は，よく考えてみると相互に深い関わりがある．数学解析は非可算性と位相的な完備性という実数固有の性質の延長上に展開され，他方，計算可能解析は計算理論の基礎をなす可算集合上の帰納性解析に基づく．しかし，両者は，後述のように，空間の可分性や収束の実効性という点で結びつく．一方，数値解析は，数学解析の命題を（計数型）計算機を通じて現実世界に正確精密に移出するために不可欠なものであり，その信頼性の根拠も数学解析の成果であるが,（計数型）計算機自体は計算理論に基づいている．計算機の存在を前提として数学を再構築するという立場からは，これらは当然総合的に把握されなければならないことである．しかし，これまでのところ，このような意味での十分にわかりやすい議論はなされて来なかったのではないかという感が強い．

この講演は，数学解析，計算可能解析，数値解析のいわば接点にある命題として，可分な Hilbert 空間における Riesz-Fréchet の定理とその変形である Lax-Milgram の定理を取り上げる．これらの定理は数学解析における古典的命題である（§2 で復習する）．しかし，計算可能解析として再解釈する際は可分な Hilbert 空間の具体的な稠密可算集合の導き出す計算可能性構造との整合性が問題になるのである．§3 では計算可能解析の概略を述べた上で，Riesz-Fréchet や Lax-Milgram の定理について計算可能性を検討する．計算可能性構造を担保すべき稠密可算集合としては，具体的な Hilbert 空間，例えば，ある領域上の Sobolev 空間では，その領域に密着した自己共役作用素の固有関数系や，あるいは，その領域の三角形分割とそれに対応する Spline 関数の集合などが考えられる．これらについては，§4 で論じたい．Hilbert 空間は抽象的に定義される．計算可能性の議論そのものも抽象的な設定で行われる．しかし，数値解析は具体性が視野に入って始めて意味が生ずる．

もちろん，具体的な問題に抽象的な定理を適用するためには，適合性の詳細な検証が欠かせない．実際，多くのことが未検証のままであり，§3 では講演者らの最近の考察（[8]）が漸く及んだに過ぎない入り口の部分の紹介しかできず，§4 に関しては，この講演は基本的に問題提起の水準であると考えていただきたい．

ここでとりあげた話題に限らず，数学解析，計算可能解析あるいは数値解析の関わりについて，聴衆の方々に（定式化さえも含めて）それなりに続きを考えていただけたら幸いである．

1.2 経緯

講演者は吉田耕作先生の門を叩いて以来もっぱら数学解析をやってきた[1]．数学の内部，しかも，そのごく一部に関心を注ぐだけで長い間満足していたと言えるだろう．工学部に勤務するようなって，数学の全体像を，数学が現代社会で属すべき文脈を念頭に，真剣に考えるようになった．講演者は，数学者の典型という自負はないが，一般に，数学者は数学を知っているとは言えないのではないかとその頃から思うようになった．その後，九州大学大学院数理学研究科の創設のための概算要求案を書く機会があった．この際の指導理念の設定は難しかった．内輪だけの素朴な数学観では不足があることは明らかではあったが，しかし，第三者的な立脚点をとると一般の数学者には確信の持てない世界が予想され，当然，感情的な反発が強いだろうということも想像できた．実際，概算要求案を作成し，文部省との交渉にも当たったのは，加藤十吉，浜地敏弘，そして講演者の三名であったが，われわれの間でも温度差はあったし，三名の意見がまとまっても，それで九大の数学者集団全体が同じ行動をとってくれるという保証が常にあったわけではなかった．しかし，大学が激変している過程で（九大というよりも日本の）数学者が生き残れるかという不安感がそれ以上に強かったということが研究科設立に繋がったのであろう[2]．

ところで，その頃，Penrose の著書 The emperor’s new mind ([23]) が Time 誌に紹介されるなど世界的に話題になっていた．同書は，Gödel の不完全性定理の解釈に基づいて，人工知能について否定的な見解を述べている．すなわち，真偽が明白な命題なのに，アルゴリズムに基づいての論証では自己言及の罠にはまってしまって，真偽の判断ができなくなるということを，まさに計数型（ディジタル）計算機の原理的な限界とする一方で，人間の脳による判断では真偽の弁別は明白であり，これこそ脳の優位性を示すと言うのである．Penrose の議論には続きがあって，人間による認識は本質的に自由意志に基づいており，しかも，自由意志の源泉は脳の活動が量子力学的原理に基づいていることにあるに違いないと主張している．ただし，脳活動と量子力学の関係は現在の物理学では説明できることではなく，恐らく，重力場の量子化が秘密を解く鍵になるだろうとする．実際，Penrose に従えば，脳の活動の典型である数学的了解は計数的なものではなくて最終的にはイデアの

[1] 学位の主査は小松彦三郎先生であった．白田平先生にご心配をお掛けした．縁あって山口昌哉先生には盛りたてていただいた．溝畑茂先生にもお世話になった．九大転任では藤田宏先生にお力添えいただいた．もちろん枚挙に暇がないほどの多くの先輩同輩後輩に迷惑を掛けてきた．J.-L. Lions 先生のもとにも一応はいた（[43]）．すべてが，もう昔のことになりつつあるが，後一二年はこの方々の教えを噛み締めながらも数学やその周辺を徘徊するつもりではある．

[2] もちろん，数学者が生き残るかどうかということは数学者が意義ある存在として自他共に認められるかどうかと関係する．数学自体が重要かどうかが問題になっているわけではないが,（例えば，在来型の）数学者が重要と思い込んでいる数学の部分だけが重要かどうかの反省は常々欠かせないはずのことであった．世紀末を控え，20 世紀の古典的な数学の転換が世界的に期待されていたということもあっただろう．なお，少し後に，講演者が「応用数理」に書いた数理学研究科関連の記事に，概算要求案用に作った，人類文化史（！）と数学史を対比した年表を付したものがある（[39]）．

共有という直観の作用によってなされるものであるとされるが，ここは同意する数学者も多いところであろう[3]．Penrose は，さらに，直観によってイデアの把握ができることはまさに自由意志の結果だと言う．Penrose は決して神学的あるいは倫理学的な意味を自由意志に与えているわけではないと思うが，間違いなく西欧の伝統的発想の子である．自由意志，脳，量子力学三者の関連についての提起は面白い見方ではあっても納得することは簡単ではない．Penrose はその後もこの方向の議論を続けているが，脳活動と重力場の量子化との関連を支持する研究成果は得られていないようである．

ところで，Penrose が計数型計算機の限界を表す例として，さらに Pour-El & Richards [25] による波動方程式や Schrödinger 方程式の初期値問題の解が初期値の計算可能性を失うという結果を引用している．ただし，この結果については，例えば，Hadamard[4] 以来の well-posedness（bien posé 適切性[5]）と比較すると明らかなように，数学的には問題に応じた関数空間の適切な設定の議論が関わっており，後に改めて言及するが，Penrose の引用は文脈としては相当のものではないように思われる．

しかし，この本 [23] は，数学的思考における計算機の役割の可能性を改めて考えさせてくれた．計算機だけの人工知能は無理でも，人間と計算機が連携すれば，数学の研究や教育，あるいは思考の深化，強化，高度化あるいは拡大ができるのではないか，という想いを抱くようになったのである．当時の文部省科学研究費補助金「萌芽的研究」として，研究課題「計算機環境での理論的解析学遂行のための基礎研究」[6]が採択され，また，京都大学数理解析研究所の共同研究集会などで類似の研究課題も採用され，計算機科学，数学解析，数値解析に至るいろいろな人たちの研究に接する機会はできたが，講演者にとっては，いわば研究上の混乱の始まりでもあった[7]．その頃であったが，同僚の一人に，夢を抱くのはいい，しかし，茫漠とした夢想に耽るだけで結果が出なければそもそも意味がない，何らかの具体的な成果をどの位の期間内で出そうと思っているのか，と追及された．健全な姿勢の同僚はありがたい．計算機利用での数学研究や教育の効率化は，今日では各種の商業化された数学ソフトによって相当程度実現されている．講演者の想いは，このような形のものとどう違うのか，確かに，その辺りは依然として曖昧である．文字通り，浅学菲才のゆえに，方向性も対象も的確に絞れなかったということはあるだろう．数学情報のデータベースやそのようなものに基づくエキス

[3]ただし，数学の現状を見回すと，対象の拡大や概念の細分化，技法の精密化が相互依存しつつ進んでおり，数学がイデアという静的な不変理想概念に基づいているとすることは必ずしも適切ではないのではないかとも思わせられる．

[4]うろ覚えで確かではない．Hadamard[14] は correctement posé という（p.39）．

[5]溝畑 [20] による訳語．

[6]平成 10-11 年度．課題番号 10874032．これは丁寧な成果報告書を印刷した．今，読み返してみると，確かに萌芽的研究であるが，ある程度進めるべき方向は示せていたように見える．続けての科学研究費の申請をこの線で行ないながら採択には至らなかったことが，やや研究動機を削いで来た感はある．

[7]数研の講究録 [42]，[44]，[45] がある．茫漠としたエッセイ（[46]）もある．

パート・システム[8]だけを想定していたわけではなく，数学の特性ゆえに，ここが大切なところだが，計算機上で数学的情報を，新たに，必要に応じて当然生成させなければならないし，データベースとしては，結果利用のための便宜性だけではなく生成機能をも含むべきものと考えてはいた．当時，誤解を招きやすい言い方だが,「数学の工学化」というようなことを唱えていたが,その意図は，敢えて言えば，数学の全分野を計算機に載せることを前提に整理しなおしたら，あるいは，数学としての体系性，総合性を計算機を鍵として見直したら，具体的な数理構造相互の関わりが明確に見えてくるのではないか，ということであったろうか．

1.3 重要な課題

ところで，§1.2 に述べたようなことを漠然と考えていた頃，講演者は日本数学会の学術委員会に関与していた．会議のついでに数学辞典の改訂がよく話題になった．講演者は，当然，利用者と計算機との相互作用を前提とした，ある程度の数学ソフトの機能も持つような動的な辞書が開発されるものと思っていたが，改版であって従来型の辞書に近いものを準備中と聞いて，残念に思ったことを覚えている．通常の商業用数学ソフトと違い，深い純粋数学の分野の成果も数学ソフト化して利用者からの動的な接近が可能になるようなダイナミックな情報媒体の開発を目指してほしかったが，商業上は確かに大変なことではある．しかし，すでに，個別にはいろいろなプログラムが開発されており，それらは専門家の間では適当に流通はしていた．問題は総合性，体系性であり，互換性である．

当時は数学系の重点領域として無限可積分系が取り上げられていた．つぎのというか喫緊の重大な課題は，計算機時代に相応しい数学と計算機の連携と体系化であり，当然，重点領域として全数学者が関与して遂行されるべきことと考え，日本数学会の幹部に話したこともある．しかし，幹部からは，それは確かに数学会挙げて取り組まなければいけないことだが…という以上の反応は得られなかった[9]．講演者も一度は重点領域提案の科学研究費補助金の企画調査の調書は書いたが，関連学会に影響力があったわけでもなく，また，説いてまわるというようなこともしなかった．要するに，講演者に限って言えば，思いつきの範囲を出ているとは言い難いことであった．

幸い，似たようなことを考えている人はたくさんいて，しかも構想力も行

[8] このようなものは，今日の商業数学ソフトでかなり実現されている．

[9] この幹部には，別の機会に，日本の数学研究の特徴を把握しておくことが必要なのではないか，差し当たっては MR などを全国の数理統計系の研究者に協力を求めて学生の実習や演習などの形で統計処理してもらう，というようなことが考えられるだろう，と言ったことがある．回答は関心がないというものだった．およそ日本の数学というものの運営には興味がないと答えたことになるのに気づいていたのだろうか．なお，卑近なところでは,「数学通信」記載の修士論文や学位論文の一覧も（MSC を付すなど）データとしての 2 次利用が可能な形に整理してあると，全国的な数学研究の方向性の把握や実態に基づいた政策提言のために役立つだろうと思うのだが，最近の議論は見当違いの方向にあるようである．

動力も備えている人も多いので，最近は，Open Math Project などに結実しつつあるけれど，まだ，思想性や総合性には増強の余地はあり，依然として，日本数学会や日本応用数理学会など関連学会が連携して取り組むべき重要な課題ではあるだろう．数学は公共財でもある — 数学者の内輪だけの議論では方向性は定まらないのではないだろうか．

2 数学解析としての Riesz-Fréchet の定理

聴衆は必ずしも数学解析の専門家ばかりではないと思われる．定義の確認などの基礎的なところから始めるが，形式的な議論を意図しているわけではない．

Riesz-Fréchet の定理の証明についても概略的なアイデアは説明するが，厳格な議論自体は既に確立しているところであり，わざわざ紹介する必要はないだろう．関心はむしろ定理自体の内容の拡がりにある．

応用例も線形（偏）微分方程式の極めて初等的なものしか挙げない[10]．

2.1 Hilbert 空間と Riesz-Fréchet の定理

Hilbert 空間とは，正定値な内積が定義された実数または複素数をスカラーとするベクトル空間で，内積から誘導される距離に関して完備なものをいう．以下では，記法上の簡便さゆえに，Hilbert 空間は実数をスカラーとしているとして議論を進める．すなわち，$\mathbb{X}$ が実数をスカラーとする Hilbert 空間であるとは，

1) まず，$\mathbb{X}$ はベクトル空間である，つまり，ベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{X}$ とスカラー $a, b \in \mathbb{R}$ とからなる 1 次結合 $a\mathbf{x} + b\mathbf{y}$ が $\mathbb{X}$ のベクトルとして定義されるものであり，

2) さらに，$\mathbb{X}$ は内積空間である，つまり，$\mathbb{X}$ には内積とよばれる $\mathbb{X}$ 上の対称[11]な双 1 次形式

$$\mathbb{X} \times \mathbb{X} \ni (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbb{R}$$

で，正値性

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \quad \text{かつ} \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

を満たすものがあり，

3) しかも，$\mathbb{X}$ は内積から誘導される距離

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{X},$$

[10] [8] では応用例としては 2 階常微分方程式しか扱わなかった．

[11] 複素数をスカラーとする場合は，$\langle\ ,\ \rangle$ は複素数値の双 1 次形式で Hermite 対称，すなわち，$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$（複素共役）を満たすことを要請する．

に関して完備な空間である，つまり，$\mathbb{X}$ の任意の基本列 $\{\mathbf{x}_n\}$ に対し，必ずあるベクトル $\mathbf{x}$ が極限として存在する： 適当な $N:\mathbb{R}_+\to\mathbb{N}$ のもとで

$$\|\mathbf{x}_n-\mathbf{x}_m\|<\epsilon\quad\big(n,m\geq N(\epsilon)\big)\quad\Longrightarrow\quad\lim_{n\to\infty}\|\mathbf{x}_n-\mathbf{x}\|=0$$

が成り立つという，3 条件が満たされる空間であることを意味する．なお，

$$\|\mathbf{x}\|=\sqrt{\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle}$$

は $\mathbf{x}\in\mathbb{X}$ のノルムである[12]．

Hilbert 空間の理念は概ね 1 世紀前に生まれた．今日の数学や物理学では本質的な位置を占めるものに成長しているが，揺籃期の様子を丹念に調べようと思ったことはこれまでなかった[13]．しかし，本講演の標題にあるような，数学解析，計算可能解析，数値解析の接点あるいは交点に想いを馳せると，Riesz-Fréchet の定理といわれるものに象徴的な意味があるように思われたので，初出の論文にあたってみようという気になった．ちなみに，同じ動機で後述の Lax-Milgram の定理が提唱された論文 [17] を読んだとき，われわれが通例 Riesz の定理とよんでいる定理をかれらが Fréchet-Riesz の定理として引用していたことも気になった． 実際に，Comptes Rendus Académie des Sciences Paris **144** (1907) に Riesz の論文 [27] と Fréchet の論文 [13] がほぼ引き続いて掲載されている．

さて，Hilbert 空間の古典的な例をいくつか挙げておこう．

例 1　数列 $\mathbf{x}=\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}|x_n|^2<+\infty$$

を満たすとき，2 乗総和可能な数列といわれる．2 乗総和可能な数列の全体 ℓ_2 は（自然な 1 次結合の定義により）ベクトル空間になる．しかも，

$$\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=\sum_{n\in\mathbb{N}}x_n\,y_n,\quad\mathbf{x}=\{x_n\},\ \mathbf{y}=\{y_n\}\in\ell_2,$$

は ℓ_2 に内積を定め，これによって ℓ_2 は Hilbert 空間になる．

例 2　区間 $I=(0,2\pi)$ 上の（可測）関数 $f(t)$ は

$$\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,dt<+\infty$$

[12] ベクトル空間 $\mathbb{X}$ と内積 $\langle\,,\,\rangle$ を対にして Hilbert 空間が定義される．内積の記号をいちいち選ぶのは煩雑なので，$\langle\,,\,\rangle$ を用い，必要なときは空間を明示する添え字を付ける．例えば，$\langle\,,\,\rangle_{\mathbb{X}}$ のように．ノルム $\|\ \|$ に関しても同様とする．

[13] 講演者は，もはや数学史に属することであろうが，Hilbert 空間という言葉が最初に用いられた論文についてさえ知らない．今の段階では詳細に調査していると講義原稿が書けなくなってしまう．手元の Nicholas Bourbaki の数学史 [5] （特に, pp. 235–238）は手がかりになりそうである．

のとき，2 乗積分可能といわれる．I 上の 2 乗積分可能な関数の全体 $\mathscr{L}^2(I)$ は（自然な 1 次結合の定義により）ベクトル空間になる．しかも，

$$\langle f, g\rangle = \int_I f(t)\, g(t)\, dt, \quad f(t),\, g(t) \in \mathscr{L}^2(I),$$

は，$\mathscr{L}^2(I)$ における非負定値な対称双一次形式になる．特に，同値関係

$$f \sim f_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{ほとんどすべての } t \in I \text{ に対し } f(t) = f_1(t) \text{ が成り立つ}$$

による同値類の全体，すなわち $L^2(I)\bigl(= \mathscr{L}^2(I)/\sim\bigr)$ は Hilbert 空間になる．

昔からよく知られているように，区間 $I = (0, 2\pi)$ における Fourier 級数展開

$$\Phi:\ L^2(I) \ni f(t) \quad \mapsto \quad (a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots) \in \ell_2$$

ただし，

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_I f(t)\, dt,$$

$$a_{2m} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_I f(t)\, \cos mt\, dt,\ b_{2m} = \frac{1}{\pi} \int_I f(t)\, \sin mt\, dt, \quad (m = 1, 2, \cdots)$$

は $L^2(I)$ から ℓ_2 の上への 1 対 1 の線形写像で，

$$\langle f, g\rangle_{L^2(I)} = \langle\, \Phi(f),\, \Phi(g)\rangle_{\ell_2}$$

を満足する．なお，Φ の逆作用素は

$$\ell_2 \ni \{x_n\} \quad \mapsto \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x_0 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \bigl(x_{2k}\ \cos kx + x_{2k-1}\ \sin kx\bigr) \in L^2(I)$$

となる．

ちなみに，上掲の Riesz の論文は，空間 $L^2(I)$ に Euclid 空間のものと類似の幾何構造が入る，つまり，$L^2(I)$ が Hilbert 空間となることを示したものであり，Fischer が似た結果を得ていると聞いて，準備中の論文を編集して急いで発表したもののようである．Riesz-Fréchet の定理に相当する部分は文末のいわば付けたりの 1 項であったように見える（もう 1 項は，稠密な部分集合に直交するベクトルは 0 しかないという注意である）．

さて，（内積が $\langle\, ,\, \rangle$ の）Hilbert 空間 $\mathbb{X}$ からスカラー体 $\mathbb{R}$ への写像 $U : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ は，線形性

$$U(a\,\mathbf{x} + b\,\mathbf{y}) = a\,U(\mathbf{x}) + b\,U(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{X}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

および有界性

$$N_U = \sup_{\substack{\mathbf{x}\in\mathbb{H} \\ \mathbf{x}\neq\mathbf{0}}} \frac{|U(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x}\|} < +\infty$$

を満足するとき，$\mathbb{X}$ 上の有界線形汎関数といわれる．なお，N_U は有界線形汎関数 U の汎関数ノルムといわれる．

例 3　$l_2^{(1)}$ を（実）数列 $\{x_n\}$ で

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (1+n^2)\,|x_n|^2 < +\infty$$

をみたすものの全体からなるベクトル空間とする．$l_2^{(1)}$ は内積

$$\langle\{x_n\},\,\{y_n\}\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} (1+n^2)\,x_n\,y_n$$

によって Hilbert 空間になる．このとき，

$$S\,:\,l_2^{(1)} \ni \{x_n\} \quad\mapsto\quad \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \in \mathbb{R}$$

は有界線形汎関数である[14]．

もう一例挙げよう．

例 4　$I=(0,2\pi)$ とし，I 上の 2 乗可積分な関数で弱導関数[15] が存在し，しかも，それも I 上で 2 乗可積分となるようなものの全体を $\mathscr{H}^1(I)$ とおく．$\mathscr{H}^1(I)$ はベクトル空間をなし，非負定値な対称双 1 次形式

$$\langle f,\,g\rangle = \int_I f(t)\,g(t)\,dt + \int_I f'(t)\,g'(t)\,dt$$

が定義される[16]．$f(t),\,f_1(t)\in\mathscr{H}^1(I)$ に対し，

$$f\sim f_1 \quad\Longleftrightarrow\quad \text{ほとんどいたるところ}\quad f(t)=f_1(t),\ f'(t)=f_1'(t)$$

とおくと $\sim$ は $\mathscr{H}^1(I)$ の同値関係を定め，同値類の全体 $H^1(I)=\mathscr{H}^1(I)/\sim$ は（上の $\langle\,,\,\rangle$ から自然に内積が誘導されて）Hilbert 空間になる．実際上は，$\mathscr{H}^1(I)$ と $H^1(I)$ とを区別しない．さて，$\tau\in I$ に対し，

$$ev_\tau\,:\,H^1(I)\ni f \quad\mapsto\quad f(\tau)\in\mathbb{R}$$

は $H^1(I)$ 上の有界線形汎関数である[17]．

[14]実際，有界性は

$$|S(\{x_n\})| \le \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \le \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{1+n^2}\Big)\|\{x_n\}\|_{l_2^{(1)}}$$

が成り立つから．

[15]I 上の可測関数 $f'(t)$ が $f(t)$ の弱導関数であるとは，任意の I 上の滑らかな関数 $\varphi(t)$ で I の境界で消える，つまり，$\varphi(t)=0,\,t\in\partial I$ を満たす，ものについて

$$-\int_I f(t)\,\varphi'(t)\,dt = \int_I f'(t)\,\varphi'(t)\,dt$$

が成り立つことをいう．$f'(t)$ が $f(t)$ の本来の導関数であれば，弱導関数である．記法はこの事実を反映している．$\frac{d}{dt}f(t)$ などもとかく．

[16]後述の Sobolev 空間の一種である．

[17]原理的には

$$f(t)-f(\tau) = \int_\tau^t f(s)\,ds, \quad t\in I$$

ところで，典型的な有界線形汎関数は，$\mathbb{X}$ のベクトル $\mathbf{v}$ を指定しておいて，それとの内積で定義されるもの

$$U_{\mathbf{v}} : \mathbb{X} \ni \mathbf{x} \quad \mapsto \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

である．Riesz-Fréchet の定理は，有界線形汎関数がこの形のもので尽くされることを主張する．

定理 2.1 (Riesz-Fréchet の定理) U は Hilbert 空間 $\mathbb{X}$ 上の有界線形汎関数とする．このとき，$\mathbf{v} \in \mathbb{X}$ が一意的に定まって，

$$U(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{X}$$

が成り立つ．しかも，$N_U = \|\mathbf{v}\|$ である．

この定理は $\mathbb{X}$ が有限次元，すなわち，Euclid （あるいは Hermite）空間の場合は明らかである．そのためか，Riesz も Fréchet も上掲の論文（[27], [13]）では証明なしの言明だけである．

この定理には少なくとも二種類の証明がある．第一は，Hilbert 空間 $\mathbb{X}$ を有限次元部分空間の列 $\{\mathbb{X}_N\}$ で近似する．汎関数 U を各 $\mathbb{X}_n$ に制限した U_N は適当な $\mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N$ に対し

$$U_N(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_N \rangle, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{X}_N$$

と表される．こうして得られた $\mathbb{X}$ のベクトルの列 $\{\mathbf{v}_N\}$ の極限ベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{X}$ によって

$$U(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{X}$$

が成り立つという証明である．

第二の証明は，正射影による方法である（[28], [29]）．$U \not\equiv 0$ とし，$U(\mathbf{z}) \neq 0$ なる $\mathbf{z} \in \mathbb{X}$ から U の核（零空間） $K = \ker(U) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{X}\,; U(\mathbf{x}) = 0\}$ への正射影 $\mathbf{z}_0 \in K$:

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0\| = \inf_{\mathbf{y} \in K} \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|$$

を利用する．$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{z}-\mathbf{z}_0\|}(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)$ は $\mathbb{X}$ の単位ベクトル（ $\|\mathbf{u}\| = 1$）であり，$\mathbf{y} \in \mathbb{X}$ について

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{u} \rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad U(\mathbf{y}) = 0$$

が成り立つ．したがって，任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ を $\mathbf{u}$ に平行な成分と直交する成分に分解することにより

$$U(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle\, U(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle, \quad \mathbf{v} = U(\mathbf{u})\,\mathbf{u}$$

を利用する．

$$|f(\tau)| \leq |f(t)| + \sqrt{|t-\tau|}\sqrt{\int_I |f'(s)|^2\, ds}$$

が成り立つことに注意．両辺を，さらに， t で積分してみる．

が得られる．

第一の証明は可分な Hilbert 空間に対してしか通用しない．第二の証明は可分性は要求しない．

以下は，後に計算可能性を論ずる際に問題になることであるが，第一の証明については改めて正規直交基底を利用した詳しい検討を行なう．正射影のアイデアについても計算可能性を論ずることができ，したがって，第二の証明の実効化という形で，Riesz-Fréchet の定理の計算可能性を論ずることもできるが，このときには可分性が前提になる．これらのアプローチの違いは，計算可能性のレベルで異なる拡がりを持つものと思われるが，現時点では十分なことは言えない．

例 3，例 4 に定理 2.1 を適用しておく．

例 5　例 3 の場合は容易である．$v_n = \frac{1}{1+n^2}, n \in \mathbb{N}$, とすれば $\{v_n\} \in l_2^{(1)}$ かつ

$$S(\{x_n\}) = \langle \{x_n\}, \{v_n\} \rangle_{l_2^{(1)}}, \quad \{x_n\} \in l_2^{(1)}$$

である．

例 6　例 4 については若干空間 $H^1(I)$ の構造に立ち入る必要がある．$\tau = 0$ すなわち ev_0 について確かめればよい．さて，

$$u(t) = \frac{1}{2\sinh 2\pi}\Big(\sinh t + \sinh(t - 2\pi)\Big)$$

とおくと，

$$-u''(t) + u(t) = 0, \quad u(0) = -1, u(2\pi) = 1,\ u'(0) = u'(2\pi)$$

が成り立つ．$u(t) \in H^1(I)$ である．しかも，$g(0) = g(2\pi)$ を満たす任意の $g(t) \in H^1(I)$ に対し，

$$\langle g, u \rangle_{H^1(I)} = \int_0^{2\pi} g(t)\, u(t)\, dt + \int_0^{2\pi} g'(t)\, u'(t)\, dt = 0$$

となる．したがって，$f \in H^1(I)$ に対し，

$$f_p(t) = f(t) - \frac{\langle f, u \rangle_{H^1(I)}}{\|u\|^2_{H^1(I)}}\, u(t) \in H^1(I)$$

は $f_p(0) = f_p(2\pi)$ を満たす．特に，よく知られているように，f_p の Fourier 係数 $\Phi(f_p)$ は $l_2^{(1)}$ の元であり，しかも，

$$f_p(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}a_0 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \Phi(f_p) = (a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots)$$

となる．例 5 を参考に，

$$v_p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}\, \cos nt$$

とおくと，$v_p(t) \in H^1(I)$ であり，$v_p(0) = v_p(2\pi)$ を満たす．さらに，

$$f_p(0) = \langle f_p, v_p \rangle_{H^1(I)} = \langle f, v_p \rangle_{H^1(I)}$$

が成り立つ．以上より，$f \in H^1(I)$ に対し，

$$\mathrm{ev}_0(f) = f(0) = \langle f, v \rangle_{H^1(I)}, \quad v(t) = v_p(t) + \frac{u(0)}{\|u\|^2_{H^1(I)}}\, u(t) \in H^1(I),$$

と表されることがわかる．

2.2 Riesz-Fréchet の定理の応用例

Riesz-Fréchet の定理（定理 2.1) は Hilbert 空間の基本定理群に属しており，当然，多くの分野で応用されている．ここでは，初等的な偏微分方程式の境界値問題への応用を例示する．後での議論の都合も考慮して，2 階楕円型境界値問題を扱おう．

Ω を n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の有界領域とし，境界 $\partial\Omega$ は（簡単のために）$n-1$ 次元の C^1 級超曲面とする．Ω 上の与えられた関数 $f(x)$ に対し，偏微分方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right) u(x) + f(x) = 0, \quad x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega \tag{2.2}$$

および Dirichlet 境界条件

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \tag{2.3}$$

を満たす $u(x)$ を求めたい．解 $u(x)$ については，本来，境界値問題の解として出来る限り詳細な性質まで論ずるべきであるが，今は， Riesz-Fréchet の定理の利用のされ方に議論の重点を置く．そこで，境界条件を篭めて，偏微分方程式を変分問題に書き換える．

$\mathscr{H}_0^1(\Omega)$ を Ω 上の 2 乗可積分な関数であって，2 乗可積分な弱偏導関数を持ち，かつ，$\partial\Omega$ における境界値が消えるようなものの全体とする[18]．このとき，$u(x), v(x) \in \mathscr{H}_0^1(\Omega)$ に対し，エネルギー積分

$$\mathscr{E}(u, v) = \int_\Omega \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \frac{\partial v(x)}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \frac{\partial v(x)}{\partial x_n} \right) dx \tag{2.4}$$

[18] この空間は偏微分方程式論の基礎的な知識に属する（例えば，古典という意味で，溝畑 [20], Sobolev[33], Lions-Magenes[18], Agmon[2] などを挙げておこう．もちろん，近年の出版物でも余り変わってはいない）．また，$\partial\Omega$ への要請は，多少議論が要っても，境界値が消えるということが意味を持つことが重要である．数学解析的には，$\partial\Omega$ の条件はポテンシャル論なども含めて詳細に研究されている（はずである）が，全貌を知るには専門的かつ網羅的な文献調査が必要であろう．しかも，記号の翻訳や細かい条件の異同の検証などを経ないと把握できないと思われる．このような事例は他にも多数あるであろう．当然（例えば，日本数学会指導下の）何らかのプロジェクト，数学動的データベースの構築といったようなもの，の一環として遂行されるべきものと考えているのだが.

が定義される．このとき，上の偏微分方程式の境界値問題は，変分問題

$$\inf_{v\in\mathscr{H}_0^1(\Omega)}\left\{\frac{1}{2}\,\mathscr{E}(v,v)-\int_\Omega v(x)\,f(x)\,dx\right\} \tag{2.5}$$

に相当する．実際，$u\in\mathscr{H}_0^1(\Omega)$ が極小値を実現するなら，任意の $v\in\mathscr{H}_0^1(\Omega)$ について，(実) パラメータ ϵ を含む量

$$\frac{1}{2}\,\mathscr{E}(u+\epsilon v,u+\epsilon v)-\int_\Omega \Big(u(x)+\epsilon v(x)\Big)\,f(x)\,dx$$

は $\epsilon=0$ のとき極小になる．したがって，この $u(x)$ に対し，

$$\mathscr{E}(v,u)=\int_\Omega v(x)\,f(x)\,dx,\quad v\in\mathscr{H}_0^1(\Omega) \tag{2.6}$$

が成り立たなければならない．

ここで，Riesz-Fréchet の定理を応用する．まず，$\mathscr{H}_0^1(\Omega)$ が（本質的に）$\mathscr{E}(u,v)$ を内積とする Hilbert 空間であることに注意する．すなわち，u, $u_1\in\mathscr{H}_0^1(\Omega)$ は，これらの弱偏導関数[19]をこめて（Ω で）ほとんどいたるところ一致するときに同値とし，$u\sim u_1$ と書けば，これらの同値類の全体 $H_0^1(\Omega)=\mathscr{H}_0^1(\Omega)/\sim$ は内積を $\mathscr{E}(u,v)$ （から自然に誘導されるもの）として，Hilbert 空間になる[20]．実際上は，$\mathscr{H}_0^1(\Omega)$ を $H_0^1(\Omega)$ として流用する．

ここで，重要なのは Poincaré の不等式

$$\mathscr{E}(v,v)\geq c_\Omega\int_\Omega |v(x)|^2\,dx,\quad v\in\mathscr{H}_0^1(\Omega) \tag{2.7}$$

が成り立つことである[21]．ただし，c_Ω は領域にのみ依存する定数である．

この不等式の帰結としてわかることは，$f\in L^2(\Omega)$ とすると

$$H_0^1(\Omega)\ni v\quad\mapsto\quad\int_\Omega f(x)\,v(x)\,dx\in\mathbb{R} \tag{2.8}$$

は $H_0^1(\Omega)$ 上の有界線形汎関数を定めることである．実際，

$$\left|\int_\Omega f(x)\,v(x)\,dx\right|\leq\|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}\leq\left(\frac{\|f\|_{L^2(\Omega)}}{\sqrt{c_\Omega}}\right)\sqrt{\mathscr{E}(v,v)}$$

[19] $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $\alpha_k\in\mathbb{N}$ を多重指標，$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ をその長さという．多重指標 α に対し $\partial^\alpha=\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_n^{\alpha_n}$ と略記する．Ω の上の 2 乗可積分関数 $u(x)$, $w(x)$ について，$w(x)$ が $u(x)$ の α 階の弱偏導関数であるとは，Ω の境界では消えるような任意のなめらかな関数 $\varphi(x)$ について

$$\int_\Omega w(x)\,\varphi(x)\,dx=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u(x)\,\partial^\alpha\varphi(x)\,dx$$

が成り立つことと定める．このとき，$w(x)=\partial^\alpha u(x)$ と書く．

[20] $H_o^1(\Omega)$ は後述の Sobolev 空間 $H^1(\Omega)$ の閉部分空間でもある．

[21] この初出論文は調べてはいない．今日では，偏微分方程式を扱う基本的な教科書には必ず定式化と証明が載っている．なお，Poincaré の不等式のさまざまな一般化については Ziemer[48] などがある．この種の不等式は基本的なものであって，必要とされる文脈に特に限定があるわけではない．しかし，定式化には入り組んだ微細な概念が要求される．データベース機能があって，かつ，この類の話題を動的に扱えるものが（計算機上に）あるとよいと思うのだが．

が成り立つからである（$\sqrt{\mathscr{E}(v,v)} = \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$ である.）．したがって，Riesz-Fréchet の定理により，$u \in H_0^1(\Omega)$ が一意的に定まって，

$$\mathscr{E}(u,v) = \int_\Omega f(x)\,v(x)\,dx, \quad v \in H_0^1(\Omega) \tag{2.6}$$

となる．

2.3 Lax-Milgram の定理

上で考えた偏微分方程式 (2.2) に低階項を付すと

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right) u(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x)\,\frac{\partial}{\partial x_j} u(x) + c(x)u(x) = f(x) \tag{2.9}$$

の形になる（ただし，$x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega$）．境界条件 (2.3) をそのままにした場合，(2.9) の左辺に対応する双１次形式は

$$\begin{aligned}\mathscr{B}(u,v) =& \sum_{j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\,\frac{\partial v(x)}{\partial x_j}\,dx + \sum_{j=1}^n \int_\Omega b_j(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\,v(x)\,dx \\ &+ \int_\Omega c(x)\,u(x)\,v(x)\,dx \qquad (u,\,v \in H_0^1(\Omega))\end{aligned} \tag{2.10}$$

となり，方程式 (2.9) は $f \in L^2(\Omega)$ として，

$$\mathscr{B}(u,v) = \int_\Omega f(x)\,v(x)\,dx, \quad v \in H_0^1(\Omega) \tag{2.11}$$

の形になる．ここで，$b_j(x)$, $c(x)$ は滑らかな実数値関数とすると

$$\begin{aligned}\mathscr{B}(w,v) - \mathscr{B}(v,w) &= \sum_{j=1}^n \int_\Omega b_j(x)\left(\frac{\partial w(x)}{\partial x_j}\,v(x) - w(x)\,\frac{\partial v(x)}{\partial x_j}\right) dx \\ &= \sum_{j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial b_j(x)}{\partial x_j}\,w(x)\,v(x)\,dx\end{aligned}$$

となるから，ほとんどいたるところで $\displaystyle\sum_{j=1}^n \frac{\partial b_j(x)}{\partial x_j} = 0$ でない限り，

$$\mathscr{B}(w,v) \neq \mathscr{B}(v,w)$$

である．しかし，容易にわかるように，

$$\begin{aligned}|\mathscr{B}(w,v)| \leq& \sqrt{\mathscr{E}(w,w)}\sqrt{\mathscr{E}(v,v)} + n\left(\max_{\substack{x\in\overline{\Omega}\\ j=1,\cdots,n}} |b_j(x)|\right)\sqrt{\mathscr{E}(w,w)}\,\|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \max_{x\in\Omega} |c(x)|\,\|w\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

だから，

$$\mathscr{B}(w,v) \le M\,\sqrt{\mathscr{E}(w,w)}\sqrt{\mathscr{E}(v,v)}, \quad w,\,v \in H_0^1(\Omega) \tag{2.12}$$

が成り立つ．ここで，

$$M = 1 + \frac{n}{\sqrt{c_\Omega}}\left(\max_{\substack{x\in\overline{\Omega}\\ j=1,\cdots,n}} |b_j(x)|\right) + \frac{1}{c_\Omega}\max_{x\in\overline{\Omega}}|c(x)|$$

である．さらに，$v \in H_0^1(\Omega)$ に対しては

$$\mathscr{B}(v,v) = \mathscr{E}(v,v) + \int_\Omega \left(c(x) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial b_j(x)}{\partial x_j}\right)|v(x)|^2\,dx$$

となることに注意すると，係数の条件として

$$\min_{x\in\overline{\Omega}}\left(c(x) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial b_j(x)}{\partial x_j}\right) \ge -\delta c_\Omega, \quad 1 > \delta > 0,$$

が仮定できるときには，$\mu = 1 - \delta > 0$ として

$$\mathscr{B}(v,v) \ge \mu\,\mathscr{E}(v,v), \quad v \in H_0^1(\Omega) \tag{2.13}$$

が得られる．以下で述べる Lax-Milgram の定理 (定理 2.2) を用いると，(2.11) を満たす $u \in H_0^1(\Omega)$ が一意的に定まることがわかる．

さて，Lax-Milgram の定理を説明する．Hilbert 空間 $\mathbb{X}$ 上の双１次形式

$$B\,:\,\mathbb{X}\times\mathbb{X} \ni (\mathbf{x},\,\mathbf{y}) \quad\mapsto\quad B(\mathbf{x},\,\mathbf{y}) \in \mathbb{R}$$

は，ある定数 $M > 0$ のもとで

$$|B(\mathbf{x},\,\mathbf{y})| \le M\,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|, \quad \mathbf{x},\,\mathbf{y} \in \mathbb{X},$$

が満たされているときに有界といわれ，また，

$$B(\mathbf{x},\,\mathbf{x}) \ge \mu\,\|\mathbf{x}\|^2, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{X}$$

が成り立つような定数 $\mu > 0$ があるときに強圧的（coercive）あるいは添加的（accretive）といわれる．

上述の $\mathscr{B}(v,w)$ は $H_0^1(\Omega)$ の上の有界かつ強圧的な双１次形式である．

定理 2.2 (Lax-Milgram の定理) $B(\mathbf{x},\,\mathbf{y})$ は Hilbert 空間 $\mathbb{X}$ 上の有界かつ強圧的な双１次形式とする．また，F は $\mathbb{H}$ 上の任意の有界線形汎関数とする．このとき，

$$F(\mathbf{z}) = B(\mathbf{z},\,\mathbf{y}_1) = B(\mathbf{x}_1,\,\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{X}$$

を満足する $\mathbf{y}_1,\,\mathbf{x}_1 \in \mathbb{X}$ が一意的に存在する．

定理 2.1 は定理 2.2 の前提である．定理 2.2 の原初の証明 [17] の要点は，$\mathbb{X}$ の部分ベクトル空間 $\mathbb{V}$ を，適当な $\mathbf{z} \in \mathbb{X}$ に対して $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = B(\mathbf{z}, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{X}$ となるような $\mathbf{y} \in \mathbb{X}$ の全体として定め，実は，$\mathbb{V} = \mathbb{X}$ を示すことである．実際，強圧性から $\mathbf{y} \in \mathbb{V}$ に対し $\mathbf{z} \in \mathbb{X}$ が一意的に決まらなければならないので， $\mathbf{z} = T\mathbf{y}$ とすると，

$$B(T\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$$

が，すべての $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in \mathbb{V} \times \mathbb{X}$ について成り立つ．$\mathbf{x} = T\mathbf{y}$ とおくと，再度強圧性から $\|T\mathbf{y}\| \leq \frac{1}{\mu}\|\mathbf{y}\|$ が従う．$\mathbb{V}$ は $\mathbb{X}$ の閉部分空間となる．ところで，$\mathbf{x}_0 \in \mathbb{V}^\perp$ に対し，$\mathbf{x} \mapsto B(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ は $\mathbb{X}$ 上の有界線形汎関数である．したがって，定理 2.1 により，$\mathbf{y}_0 \in \mathbb{X}$ が定まって， $B(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = \langle \mathbf{y}_0, \mathbf{x} \rangle$，すなわち，$\mathbf{y}_0 \in \mathbb{V}$，$T\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0$ である．ゆえに，$\mathbb{V}^\perp = \{0\}$，$\mathbb{V} = \mathbb{X}$ となる．

そこで，定理 2.2 の言明を見直すと，まず，定理 2.1 より， $F(\mathbf{z}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$ を満たす $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ が定まり，したがって，$F(\mathbf{z}) = B(T\mathbf{x}, \mathbf{z})$，すなわち $\mathbf{x}_1 = T\mathbf{x}$ である．$\mathbf{y}_1$ も同様に構成することができる．

注意 2.1 定理 2.2 の主張は，内積を経由して，$\mathbb{X}$ 上の有界かつ強圧的な双 1 次形式 B と有界作用素 $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ が 1 対 1 に対応することを意味している．定理 2.2 の証明としては，$\mathbf{z} \in \mathbb{X}$ が定める $\mathbb{X}$ 上の有界線形汎関数

$$B_1(\mathbf{z}) : \mathbf{x} \ \mapsto \ B(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \quad \text{または} \quad B_2(\mathbf{z}) ; \mathbf{x} \ \mapsto \ B(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \tag{2.14}$$

を Riesz-Fréchet の定理によって

$$B_2(\mathbf{z})(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, S_2\mathbf{z} \rangle, \quad B_1(\mathbf{z})(\mathbf{x}) = \langle S_1\mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle$$

書き直す際に現れる作用素 S_1, S_2 が $\mathbb{X}$ から $\mathbb{X}$ への全単射であることを示す方法もある．上では $T = S_1^{-1}$ である．

3 Riesz-Fréchet の定理の計算可能解析版

最初に，計算可能解析の概略を（主に Pour-El& Richards[25] に従って）紹介する．ここでの目的のためには，実数の集合 $\mathbb{R}$ の計算可能構造，したがって，計算可能な実数や計算可能な実数値関数について触れる必要があり，さらに，その延長上に（抽象的な）Hilbert 空間においても計算可能性構造が定義されることを説明しなければならない．以下に述べるように，計算可能解析本来の立場では今日は Weihrauch[37] の方が優れている．しかし，この節の意図は，技術的詳細を述べるよりは，数学解析や数値解析との関わりを見ることにある．

さて，講演者は計算可能解析に関心を持つようになって日も浅く[22]，特に，論理学についての基本的な訓練を欠いているので，多々誤解があるとは思っ

[22] 計算可能解析のわが国における先達は八杉満利子教授である（例えば，[38]）．講演者は先生のご推挙で Dagstuhl のワークショップに参加して，この方面の国際的な研究共同体の一員になったのである．

ている．Pour-El & Richards [25] は，論理学における帰納性解析に基づいているが，その成果をほぼブラックボックス化して，古典的な数学解析の論理や記法（！）に従って（つまり，自然言語に基づいて）議論が展開されており，計算可能解析そのものに深い関心がなくても，数学解析における収束や連続の意義を改めて知る上にもよい本[23]であると思う．一方，Weihrauch[37] は，2 型 Turing 機械によって計算できるということを計算可能として抽象度の高い網羅的な議論を行なっている．特に，計算可能概念のさまざまな水準での比較を伴う議論は [25] では困難であり，[37] が適している．したがって，葛可一の計算複雑性の議論 [16] でも [37] に近い手法がとられている．

以下の議論は，しかし，Pour-El & Richards に従っても Weihrauch に従っても内容上は本質的な相違の生じないところではあるようだ．いずれにせよ，両者の固有の雰囲気は伝えなければならない．

3.1 帰納的関数の概略

最初に，有理数の計算可能列，計算可能な実数，実数の計算可能列について説明すべきであるが，しかし，このためには帰納的関数というものに触れておかなければならない[24]．数学辞典（第 3 版）にも項目がある．

帰納的関数は自然数全体の直積集合 $\mathbb{N}^m$ $(m = 0, 1, 2, \cdots)$ （の部分集合）から $\mathbb{N}$ への写像で，以下の手順で（帰納的に）生成されるものである．すなわち，帰納的関数（たち）に（以下に述べる）合成，帰納的構成，および最小化の手続きを施したものは帰納的関数である．基本となる帰納的関数は

$$Z \ : \quad \emptyset(= \mathbb{N}^0) \ni n \quad \mapsto \quad 0 \in \mathbb{N} \tag{3.1}$$

$$S \ : \quad \mathbb{N} \ni n \quad \mapsto \quad n+1 \in \mathbb{N} \tag{3.2}$$

および $m = 1, 2, 3, \cdots$, $i = 1, \cdots, m$, に対しての

$$P_i^m \ : \ \mathbb{N}^m \ni (n_1, \cdots, n_m) \quad \mapsto \quad n_i \in \mathbb{N} \tag{3.3}$$

である． Z はゼロ関数[25]，S は後者関数，P_i^m は射影関数とよばれる．

次に，合成および帰納的構成を説明する：

---

[23] 先年，当時修士課程在学中の宮本勝貴さんに下訳をしてもらったものが手元にある．できれば，この訳稿に手を入れたものを出版したいと考え，著者との連絡を数年来試みているが，まだ，成功していない．機械類は一切駄目，タイプも打てない，コンピュータも触らない，という人だそうで，さらに，家族の介護の問題もあるとは聞いている．何とかご存命中にお会いしたいとは思ってはいるのだが．[25] は，15 年も前の本であり，最新の情報を補う必要もあり，また，いくら暗箱化してあるとは言え，最小限の論理学上の常識は補足しておかなければならない．ちなみに，Richards は故人である．なお，Pour-El には，汎用計測型（アナログ）計算機で生成可能な関数の特徴づけ，すなわち，代数微分方程式の解であること，という Shannon の結果 [30] を厳格に補正した論文 [24] もあり，これも面白かった．

[24] [25] では，帰納的関数についても，成り立つべき性質が整理して挙げられているだけで，実質的に暗箱化されている．

[25] Z には変数がない．(3.1) の $\mathbb{N}^0 \ni n$ は形式的であり，$Z = Z()$ とかく（ことがある）．

合成： $m+1$ 個の帰納的関数， $g_i : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ $(i=1,\cdots,m)$ および $h : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ が与えられたとき，これらの合成関数：

$$\mathbb{N}^k \ni (n_1,\cdots,n_k) \mapsto h(g_1(n_1,\cdots,n_k),\cdots,g_m(n_1,\cdots,n_k)) \in \mathbb{N} \tag{3.4}$$

は帰納的関数である．$h(g_1,\cdots,g_m) : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ と略記される．

例えば，$m \in \mathbb{N}$（$m \geq 1$）に対し，$Z_m : \mathbb{N}^0 \ni n \mapsto m \in \mathbb{N}$ は帰納的関数である．Z_m にも変数がない．$m=2$ ならば $Z_2(\,)=S(S(Z(\,)))$ である．Z_m は定数 $m \in \mathbb{N}$ を帰納的関数として把握することに相当する．

帰納的構成： それぞれ m 変数，$m+2$ 変数の 2 個の帰納的関数 $g : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ と $h : \mathbb{N}^{m+2} \to \mathbb{N}$ とから

$$\begin{aligned} f(n_1,\cdots,n_m,0) &= g(n_1,\cdots,n_m) \\ f(n_1,\cdots,n_m,k+1) &= h(n_1,\cdots,n_m,k,f(n_1,\cdots,n_m,k)) \end{aligned} \tag{3.5}$$

によって（帰納的に）定められる $m+1$ 変数の関数 $f : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$ は帰納的関数である．

(3.1) ～ (3.5) によって定まる帰納的関数は，特に，原始的といわれる．

例 3.1 1 変数の帰納的関数 $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ から

$$\begin{aligned} f(n,0) &= g(n) \\ f(n,k+1) &= S(f(n,k)) \end{aligned} \tag{3.6}$$

によって（帰納的に）定められる 2 変数の関数 $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ は帰納的関数である．実際，(3.5) において $h(n_1,n_2,n_3)=S(P_3^3(n_1,n_2,n_3))$ ととればよい．特に，自然数の和，積，べき乗

$$\mathrm{wa}(n,k)=n+k, \quad \mathrm{seki}(n,k)=n\cdot k, \quad \mathrm{beki}(n,k)=n^k$$

は，いずれも 2 変数の帰納的関数である．同様に，

$$\mathrm{sowa}(0)=0,\ \mathrm{sowa}(k+1)=S(\mathrm{wa}(k,\mathrm{sowa}(k)))$$

で定められる関数，すなわち

$$\mathrm{sowa} : \mathbb{N} \ni n \quad \mapsto \quad \frac{n(n+1)}{2} = 0+\cdots+n \in \mathbb{N}$$

も帰納的関数である．

例 3.2 $\mathbb{N}^2$ と $\mathbb{N}$ との 1 対 1 対応を与える写像

$$J : \mathbb{N}^2 \ni (k,\ell) \quad \mapsto \quad \frac{(k+\ell)(k+\ell+1)}{2}+k \in \mathbb{N} \tag{3.7}$$

は帰納的関数である．実際，$J(k,\ell)=\mathrm{wa}(k,\mathrm{sowa}(\mathrm{wa}(k,\ell)))$ である．J が $\mathbb{N}^2$ から $\mathbb{N}$ の上への 1 対 1 の写像であることの検証は難しくはない（図 1）．J は Cantor 写像とも呼ばれ，[37] （[8] でも）では $J(k,\ell)=\langle k,\ell\rangle$ と書かれる．

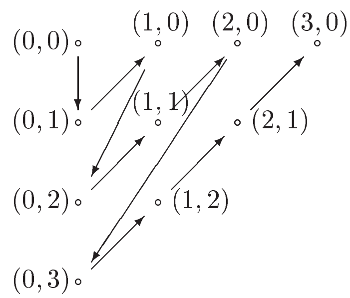

図 1: J の説明

一般に，$\mathbb{N}^m$（$m = 1, 2, \cdots$）から $\mathbb{N}$ の上への 1 対 1 対応を帰納的関数で与えることができる．

例を追加しておこう．

例 3.3　1 変数の帰納的関数 $a,\, b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ から

$$c(n, 0) = a(n), \quad c(n, k+1) = b(c(n, k)), \quad (n, k) \in \mathbb{N}^2,$$

によって構成される関数 c は 2 変数の帰納的関数である．また，

$$sa_1(0) = 0,\ sa_1(n) = n - 1,\, n \geq 1$$

で定義される $sa_1\, : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ は 1 変数の帰納的関数である．さらに，

$$sa_+(n, 0) = n, \quad sa_+(n, k+1) = sa_1(sa_+(n, k)), \quad n, \in \mathbb{N},$$

によって定められる関数 $sa_+(n, k)$ は 2 変数の帰納的関数である．なお，

$$sa_+(n, k) = \begin{cases} 0, & n < k \\ n - k, & n \geq k \end{cases}, \quad (n, k) \in \mathbb{N}^2,$$

である．

最後に，最小化を説明する．

最小化：　g を $m+1$ 変数の帰納的関数とし，

$$M_g(n_1, \cdots, n_m) = \{\, k \in \mathbb{N};\ g(n_1, \cdots, n_m, k) = 0\,\}$$

は空ではないとする．したがって，$\mathbb{N}$ の部分集合 $M_g(n_1, \cdots, n_m)$ には最小値がある[26]．このとき，

$$\mathbb{N}^m \ni (n_1, \cdots, n_m) \quad \mapsto \quad \min\, M_g(n_1, \cdots, n_m) \in \mathbb{N} \tag{3.8}$$

[26] この最小値は，$\mu\, k\, (g(n_1, \cdots, n_m, k) = 0)$ と表されるのが標準である．[34], [31] を見よ．なお，ここでは，g の定義域は $\mathbb{N}^{m+1}$ としているが，$M_g(n_1, \cdots, n_m) \neq \emptyset$ が無条件で保証されるわけではない．$M_g(n_1, \cdots, n_m) = \emptyset$ ならば，最小値はない．また，g の定義域が $\mathbb{N}^m$ の真部分集合のときは，さらに，注意が要る．いずれにしても，帰納的部分関数の議論に深入りすることになり，本稿の想定外である．

は帰納的（部分）関数を定める．

最小化によって定まる帰納的関数は，一般に原始的ではない．

例 3.4　$g(n,k) = sa_{+}(n,k)$ とする．

$$M_g(n) = \{\, k\,;\, sa_{+}(n,k) = 0 \,\} = \{\, n,\, n+1,\, \cdots \}$$

である．したがって，$M_g(n)$ の最小値 $\mu\, k\,(sa_{+}(n,k) = 0) = n$ となる．

2 型 Turing 機械について一言述べておこう[27]．M は 1 本の **1 方向にのみ**動く入力テープ,（有限複数の）計算テープおよび 1 本の **1 方向にのみ**動く出力テープから成る Turing 機械を 2 型 Turing 機械という．テープの各枠にはアルファベット[28] $\mathbb{N}$ からとった 1 個の記号が格納される．自然数列の全体の集合を $\mathbb{N}^\omega$ とする．2 型 Turing 機械で計算された関数[29]．M によって計算される関数 $\Gamma_M :\subseteq \mathbb{N}^\omega \to \mathbb{N}^\omega$ は

$$\Gamma_M(p) = \begin{cases} q & \text{入力 } p \text{ に対し } M \text{ が出力テープ上に } q \in \mathbb{N}^\omega \text{ を逐次書き込むとき} \\ \uparrow & \text{入力 } p \text{ に対し } M \text{ は出力テープ上への無限回の書き込みをしないとき} \end{cases}$$

と定められる．つまり，$\Gamma_M(p) =\uparrow$ とは $p \in \mathbb{N}^\omega$ が Γ_M の定義域に属さないことを示している．出力テープは 1 方向にしか動かないので，M は出力テープに書き込み済みの記号を変更することはできない．したがって，出力の各接頭辞（プレフィクス）は入力の接頭辞だけに依存する（つまり，$\Gamma_M(p) = q = (q(0), q(1), \cdots)$ ならば，各 $(q(0), \cdots, q(n))$ は $(p(0), \cdots, p(m(n)))$ によって決まる）．したがって，2 型 Turing 機械を通常の計算機でシミュレートすることができる．また，$\mathbb{N}^\omega$ に Baire 位相[30] を入れると，Γ_M は連続である．（部分）関数 $g :\subseteq \mathbb{N}^\omega \to \mathbb{N}^\omega$ が（2 型実効的に）計算可能であるとは $g = \Gamma_M$ となる 2 型 Turing 機械が存在することである．帰納的関数とこの意味での計算可能な関数とは一致する[31]．ただし，今の説明では M は入力も出力も $\mathbb{N}^\omega$ の元としているので，$\mathbb{N}^m$ から $\mathbb{N}^n$ の写像としての解釈のためには工夫が必要である[32]．

---

[27] 帰納的理論における 1 型，2 型の発想や展開については Weihrauch[36] をご覧いただきたい．2 型の特徴は位相概念を取り込んでいることである．なお，Turing 機械の原典は，Turing[35]，解説として，[37] は [15] を挙げている．

[28] アルファベットを有限集合，例えば，$\{0, 1\}$ とすることもできる．

[29] Γ_M の定義域は $\mathbb{N}^\omega$ とは一致しない（Γ_M は部分関数）ことがあることを $\subseteq$ を使って示す．

[30] 開集合の基を

$$\tau_{\mathbb{N}^\omega} = \{W\, \mathbb{N}^\omega\,;\, W \subset \mathbb{N}^*\}$$

で定める．ここで，$\mathbb{N}^*$ は $\mathbb{N}$ の有限自然数列の全体，$W\,\mathbb{N}^\omega$ は，$w = (w(0), \cdots, w(m))$ に対し，

$$w\,\mathbb{N}^\omega = (w(0), \cdots, w(m), p(0), p(1), \cdots)\,;\, p = (p(0), p(1), \cdots) \in \mathbb{N}^\omega \}$$

とした上で，

$$W\,\mathbb{N}^\omega = \bigcup_{w \in W} w\,\mathbb{N}^\omega$$

である．

[31] [37]，第 2 章．このためか [37] では帰納的関数という言葉は使われていない．

[32] 例えば，$p \in \mathbb{N}^\omega$ が何であっても，出力 $\Gamma_M(p) = (0, 0, \cdots)$ であるような M はゼロ関数 Z

3.2 計算可能解析について

さて，有理数の計算可能列 $\{q(n)\}$ とは，帰納的関数 $a, b, s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ によって

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto q(n) = (-1)^{s(n)} \frac{a(n)}{b(n)} \in \mathbb{Q}$$

と表されるものをいう[33]．Cantor 写像（例 3.2）を利用すると，有理数の計算可能な 2 重列 $\{q_2(n, \ell)\}$ を $q_2(n, \ell) = q(J(n, \ell))$ によって上の形の数列に帰着できる．

次に，$r \in \mathbb{R}$ が計算可能な実数であるとは，有理数の計算可能列 $\{q(n)\}$ と帰納的関数 $e : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を選んで，評価

$$n \geq e(N) \implies |q(n) - r| \leq 2^{-N} \quad (N \in \mathbb{N})$$

が実現されることである[34]．実数の計算可能列 $\{r(n)\}$ とは，有理数の計算可能な 2 重数列 $\{q_2(n, k)\}$ と帰納的関数 $e : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ を選んで，評価式

$$k \geq e(n, N) \implies |q_2(n, k) - r(n)| < 2^{-N}, \quad (n, N \in \mathbb{N})$$

が実現されることである[35]．

Weihrauch の立場では，計算可能な実数を論ずる前に，有理数の全体 $\mathbb{Q}$ が実数の全体 $\mathbb{R}$ において稠密なことを利用して，命名法（naming system）（今の場合は表現とも）と称される全射 $\rho :\subseteq \mathbb{N}^\omega \to \mathbb{R}$ を定める．すなわち，（適当な）全単射

$$\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \tag{3.9}$$

を固定し，これを利用して，$r \in \mathbb{R}$ に対し，$p \in \mathbb{N}^\omega$ が

$$|\alpha(p(n)) - r| \leq 2^{-n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

を満たすときに，$\rho(p) = r$ と定義する[36]．p として帰納的関数が選べることが $\rho(p)$ が計算可能な実数であるための条件である．

Weihrauch[37] の定式化は，位相空間 X, Y と（部分）写像 $f :\subseteq X \to Y$ の計算可能性を扱おうとするときにも形式上は有効である．全射（命名法）

に対応する．一方，後者関数は $p = (p(0), p(1), \cdots)$ に対し，$\Gamma_M(p) = (p(0)+1, p(1)+1, \cdots)$ であるような M とするか，あるいは，$p = (n, n, \cdots)$（$n \in \mathbb{N}$）の形の p に限って $\Gamma_M(p) = (n+1, n+1, \cdots)$ を出力し，その他の $p \in \mathbb{N}^\omega$ については $\Gamma_M(p) =\uparrow$ となる M を考えることになる．

[33] 当然，$b(n) \neq 0$ である．また，$s(n) \in \{0, 1\}$ で十分である．

[34] この評価の成立を，$n \to \infty$ のとき $\{q(n)\}$ は r に実効的に収束するという．なお，$q\prime(n) = q(e(n))$ とおくと，$\{q'(n)\}$ も有理数の計算可能列であって，$|q'(n) - r| \leq 2^{-n}$ を満たす．このときは $\{q'(n)\}$ は r に速く（fast）収束するという．

[35] この評価の成立を $\{q_2(n, k)\}$ は $k \to \infty$ のとき n, k に関して実効的に $\{r(n)\}$ に収束するという．$q'_2(n, k) = q_2(n, e(n, k))$ とおけば，$|q'_2(n, k) - r(n)| \leq 2^{-k}$ である．

[36] ρ は部分写像である．ρ は [37] で Cauchy 表現と呼ばれ，ρ_C と書かれる．p を r の ρ-名称ということがある．命名法には他のものもある．同値性など詳しい議論は [37] を見よ．

$\gamma :\subseteq \mathbb{N}^\omega \to X$ および $\delta :\subseteq \mathbb{N}^\omega \to Y$ が定義されており，さらに，$g :\subseteq \mathbb{N}^\omega \to \mathbb{N}^\omega$ が（定義域もこめて）

$$f \circ \gamma = \delta \circ g$$

を満たすように得られるとする．このとき，f が「計算可能」ということを，g の計算可能性，つまり，適当な 2 型 Turing 機械 M による $g = \Gamma_M$ の実現性とすることは自然であろう．この場合は，命名法 γ，δ の構成法が要点になる．

例 7　$\mathbb{X}$ を可分な Hilbert 空間，$\{\mathbf{e}_n\}$ を正規直交基底とする．$\{\mathbf{e}_n\}$ の有理数係数の有限 1 次結合の全体

$$\mathscr{Q} = \left\{ \sum_{n=0}^{k} q_n \, \mathbf{e}_n \, ; \, k \in \mathbb{N}, \, q_n \in \mathbb{Q} \right\} \cong \{(q_0, q_1, \cdots, q_k) \, ; \, k \in \mathbb{N}, \, q_n \in \mathbb{Q}\}$$

は $\mathbb{X}$ において稠密な可算集合である．m 番目の素数を π_m とおくと，明らかに，

$$\beta \, : \, \mathbb{N} \ni 2^k \, 3^{p_0} \cdots \pi_{k+2}^{p_k} - 1 \; \mapsto \; \sum_{n=0}^{k} \alpha(p_n) \, \mathbf{e}_n \in \mathscr{Q} \tag{3.10}$$

は全単射である．ただし，α は (3.9) の全単射である．したがって，$\mathbb{R}$ の Cauchy 表現 $\rho :\subseteq \mathbb{N}^\omega \to \mathbb{R}$ とまったく同様に，全射（命名法）$\delta : \mathbb{N}^\omega \to \mathbb{X}$ が構成される．$p \in \mathbb{N}^\omega$ が計算可能（帰納的）ならば，$\mathbf{x} = \delta(p) \in \mathbb{X}$ は計算可能である[37]．

これに対し，Pour-El & Richards[25] では，Hilbert 空間 $\mathbb{X}$ の計算可能構造 $\mathscr{S}$ を公理的に定める．$\mathscr{S}$ は $\mathbb{X}$ の元の列 $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 空ではない（例えば，$\{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \cdots\}$（すべての項がゼロ・ベクトル）を含む）集合であって，線形律，極限律，ノルム律の 3 公理[38] を満たすものとする．$\mathbb{X}$ の元の列 $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が計算可能列であることは $\mathscr{S}$ に属すということである．特に，$\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ が計算可能な元であるのは $\{\mathbf{x}, \mathbf{x}, \cdots\} \in \mathscr{S}$ のときである．したがって，$\mathbb{X}$ は必ずしも可分でなくてもよいようであるが，この公理系を満たす $\mathscr{S}$ が手早く構成されるのは，$\mathbb{X}$ が実効的可分であるとき，すなわち，$\mathbb{X}$ の元の「計算可能な列」 $\mathscr{E} = \{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$（$\in \mathscr{S}$）で，その線形苞が $\mathbb{X}$ において稠密になるものがあるときである．ここで，必要なら Gram-Schmidt の方法を利用することにより，$\mathscr{E}$ は $\mathbb{X}$ の正規直交基底をなすとしてよい．$\mathscr{E}$ は実効的生成集合といわれ，このとき，$\mathbb{X}$ は実効的可分といわれる.（本来は計算可能構造が先行

[37] ただし，命名法 δ は正規直交基底に依存している．基準的な基底から得られるものと同値ではないものもある．[41] 参照.

[38] 各公理の内容は次の通り：

線形律: $\{\mathbf{x}_n\}, \{\mathbf{y}_n\} \in \mathscr{S}$，実数の計算可能な 2 重数列 $\{a_n\}, \{bn\}$ および帰納的関数 $d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に対し，$\mathbf{z}_n = \sum_{k=0}^{d(n)} (a_{nk}\mathbf{x}_k + b_{nk}\mathbf{y}_k)$ で定義される $\{\mathbf{z}_n\} \in \mathscr{S}$ である.

極限律：$\mathbb{X}$ の元の列 $\{\mathbf{x}_n\}$ が $\{\mathbf{x}_{nk}\} \in \mathscr{S}$ の実効的な極限（例えば，$\|\mathbf{x}_{nk} - \mathbf{x}_n\| \le 2^{-k}$）ならば $\{\mathbf{x}_n\} \in \mathscr{S}$ である.

ノルム律：$\{\mathbf{x}_n\} \in \mathscr{S}$ ならば $\{\|\mathbf{x}_n\|\}$ は実数の計算可能列である.

しているのだが）$\mathscr{E}$ は具体的に指定でき，しかも，その指定と同時に計算可能構造も実は併せて決まってしまうのである．すなわち，$\{\mathbf{x}_n\} \in \mathscr{S}$ となるための必要十分条件は，適当な有理数の計算可能な3重列 $\{a_{nkj}\}$ と帰納的関数 $d : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ に対し，$\mathbf{y}_{nk} = \sum_{j=0}^{d(n,k)} a_{nkj}\mathbf{e}_j$ とおくと，$\{\mathbf{x}_n\}$ が $\{\mathbf{y}_{nk}\}$ の実効的な極限になることである（$\{\mathbf{y}_{nk}\} \in \mathscr{S}$ である）．この事実を利用すれば（実効的に可分な場合）[25] の議論を [37] によって包括することができる（[37]，第9章第3節）．

例 8 例 1 の ℓ_2 の場合を考える．$\mathbf{e}_n$ を第 $n+1$ 項が 1，他の項はすべて 0 となる ℓ_2 の元とする．$\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は ℓ_2 の正規直交基底をなす．$\{\mathbf{e}_n\}$ を含む計算可能構造 $\mathscr{S}$ は一意的に定まる．各成分が計算可能な実数である $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \cdots) \in \ell_2$ に対し，$\mathbf{x}_k = (x_0, \cdots, x_k, 0, 0, \cdots)$ とおくと，$\{\mathbf{x}_k\}$ は計算可能列である．特に，$\mathbf{x}$ が計算可能であるための条件は，$\mathbf{x}_k$ が $\mathbf{x}$ に実効的に収束することである．これは，実数の計算可能列 $\{\|\mathbf{x}_k\|\}$ が $\|\mathbf{x}\|$ に実効的に収束することと同値である．したがって，上のような計算可能な成分を持つ $\mathbf{x} \in \ell_2$ が計算可能な元であるための条件はノルム $\|\mathbf{x}\|$ が計算可能な実数であることである．

Pour-El & Richards による重要な定理[39]を挙げる：

定理 3.1 (第一主定理) Hilbert 空間 $\mathbb{X}$，$\mathbb{Y}$ に，それぞれ計算可能構造 $\mathscr{S}_\mathbb{X}$，$\mathscr{S}_\mathbb{Y}$ が定められており，しかも，$\{\mathbf{e}_n\} \in \mathscr{S}_\mathbb{X}$ が実効的生成集合とする．閉線形作用素 $T :\subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ は，$\{\mathbf{e}_n\} \subset \mathrm{dom}(T)$ および $\{T\mathbf{e}_n\} \in \mathscr{S}_\mathbb{Y}$ を満たしているとする．このとき，T が連続であるための必要十分条件は任意の計算可能な元 $\mathbf{x} \in \mathrm{dom}(T)$ に対し，$T\mathbf{x}$ が計算可能になることである．さらに，$\mathrm{dom}(T) = \mathbb{X}$ の場合には，T は任意の $\{\mathbf{x}_n\} \in \mathscr{S}_\mathbb{X}$ に対し $\{T(\mathbf{x}_n)\} \in \mathscr{S}_\mathbb{Y}$ となる．

Penrose[23] が取り上げた波動方程式や Schrödinger 方程式の事例は，本来 L^2 空間の枠内での有界作用素を連続関数の空間で考察した，つまり，非有界作用素を扱ったという事情もあると思われる．

3.3 Riesz-Fréchet の定理と計算可能解析

さて，Riesz-Fréchet の定理（定理 2.1）を計算可能解析の文脈で解釈するには，まず，Hilbert 空間 $\mathbb{X}$ に計算可能構造が定義されていなければならない．これについては，正規直交基底 $\{\mathbf{e}_n\}$ を実効的生成集合として指定してしまうことにする．実際の応用例では，正規化されているかどうかは別として，固有関数系をとったり，あるいは，さらに操作が必要ではあるが，階段関数系や多項式系あるいは，スプライン系などを念頭に置くことになる．

[39] もともとは Banach 空間に対し定式化されている．

すると，有界線形汎関数 $U : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ が計算可能であるということは $\mathbb{X}$ の計算可能な元 $\mathbf{x}$ について $U(\mathbf{x})$ が計算可能な実数になることとして定義することができる．第一主定理によれば，このことは $\{U(\mathbf{e}_n)\}$ が実数の計算可能列になることと同値であり，汎関数の有界性から，このとき，$\mathbb{X}$ の任意の計算可能列 $\{\mathbf{x}_n\}$ に対して $\{U(\mathbf{x}_n)\}$ は実数の計算可能列になる．命名法 $\delta :\subseteq \mathbb{N}^\omega \to \mathbb{X}$ および $\rho :\subseteq \mathbb{N}^\omega \to \mathbb{R}$ を用いると，U の計算可能性は，ある 2 型 Turing 機械 M によって計算可能な $g = \Gamma_M :\subseteq \mathbb{N}^\omega \to \mathbb{N}^\omega$ があって $U \circ \delta = \rho \circ g$ が成り立つことでもある．

他方，定理 2.1 の計算可能解析版を定式化するには，まず，内積

$$\mathbb{X} \times \mathbb{X} \ni (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbb{R}$$

が計算可能であることに注意しなければならないが，これは上の説明からでも明らかであろう[40].

定理 2.1 の計算可能解析版は次の通り：

定理 3.2 (計算可能な Riesz-Fréchet の定理) $\mathbb{X}$ は正規直交基底 $\{\mathbf{e}_n\}$ を実効的生成集合とする Hilbert 空間とし，U は $\mathbb{X}$ 上の有界線形汎関数とする．このとき，定理 2.1 が計算可能な $\mathbf{v} \in \mathbb{X}$ によって成立するための必要十分な条件は，１）U は計算可能であって，かつ　２）汎関数ノルム N_U が計算可能な実数であることである．

必要性は明らかである．計算可能な $\mathbf{v} \in \mathbb{X}$ に対し，上述のように，内積写像 $\mathbb{X} \ni \mathbf{x} \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \in \mathbb{R}$ は計算可能になる．

十分性の証明は，定理 2.1 の証明の実効化，つまり，古典的証明の計算可能解析における読み替えという形で行うことができる（ただし，[8] における扱いは異なる）．§2.1 で言及した第一の証明も第二の証明も実効化できる．第二の証明の場合は，正射影を計算可能解析としてどう把握するかという興味はある（例えば，正射影の実効化には Besicovitch[4] のアイデアが有効であるなど）．しかし，手間も掛かるのでここでは述べない．

第一の証明を実効化しよう．$\mathbb{X}$ の実効的生成集合として正規直交基底 $\{\mathbf{e}_n\}$ を選んでおいた．$\mathbb{X}_m$ を $\mathbf{e}_0, \cdots, \mathbf{e}_m$ によって生成される $m+1$ 次元の部分空間，U_m を U の $\mathbb{X}_m$ への制限とする．このとき，

$$\mathbf{v}_m = \sum_{n=0}^{m} U(\mathbf{e}_n)\, \mathbf{e}_n \in \mathbb{X}_m$$

とすれば，

$$U_m(\mathbf{x}_m) = \langle \mathbf{x}_m, \mathbf{v}_m \rangle, \quad \mathbf{x}_m \in \mathbb{X}_m$$

[40] 例えば，$\{(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m)\}$ は直積 Hilbert 空間 $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$ の実効的生成集合になる．像 $\{\langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \rangle\}$ は実数の計算可能列である．したがって，第一主定理（定理 3.1 が応用できる．

となる．しかも，$\|\mathbf{v}_m\| \le N_U$ である．これから，

$$\mathbf{v} = \sum_{n\in\mathbb{N}} U(\mathbf{e}_n)\,\mathbf{e}_n \in \mathbb{X}$$

となり，特に，定理 2.1 が導かれる．ここで，U が計算可能ならば，各 $U(\mathbf{e}_n)$ は計算可能な実数となり，また，各 $\mathbf{e}_n$ は $\mathbb{X}$ の計算可能な元だから，$\mathbf{v}_m$ も $\mathbb{X}$ の計算可能な元になる．したがって，$\mathbf{v}_m$ が $\mathbf{v}$ に実効的に収束していれば，$\mathbf{v}$ は $\mathbb{X}$ の計算可能な元となる．ところで，$\|\mathbf{v}_m\|$ は計算可能な実数であって，単調に増大して $\|\mathbf{v}\| = N_U$ に収束する．N_U は計算可能なので，この収束は実効的である（[25], p.20. Corollary 2a）．特に，帰納的関数 $d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ があって，$n \ge d(N)$ ならば $N_U^2 - \|\mathbf{v}_n\|^2 \le 2^{-N}$ である．$\|\mathbf{v}\| = N_U$ によって，このことを書き直すと

$$n \ge d(N) \quad \Longrightarrow \quad \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_n\|^2 < 2^{-N}$$

すなわち，$\mathbf{v}_n$ は $\mathbf{v}$ に実効的に収束し，$\mathbf{v}$ は計算可能な元である．

注意 3.1　$U : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ が計算可能であっても，汎関数ノルム N_U は一般には計算可能ではない．反例がある（[8] 参照）．

ところで，数学解析の観点からは，$\mathbb{X}$ の双対空間，つまり，$\mathbb{X}$ 上の有界線形汎関数の全体のなす空間とすると，定理 2.1 の意味は，(2.1) と併せて，写像

$$R : \mathbb{X} \ni \mathbf{v} \quad \mapsto \quad U_{\mathbf{v}} \in \mathbb{X}' \tag{3.11}$$

が全単射で，しかも，ノルムを保存する線形同型写像となることである．

$\mathbb{X}$ から $\mathbb{R}$ への連続写像の全体を $\mathcal{C}(\mathbb{X},\mathbb{R})$ とすると，$\mathbb{X}' \subset \mathcal{C}(\mathbb{X},\mathbb{R})$ である．Weihrauch[37] の立場では，$\mathbb{X}$，$\mathbb{R}$ の命名法を利用して，$\mathcal{C}(\mathbb{X},\mathbb{R})$ の命名法を誘導することができる[41]．特に，この命名法の値域を制限して $\mathbb{X}'$ の命名法が得られ，この意味で標準的に（つまり，定理 2.1 を前提としない，双対ということだけに基づいて），$\mathbb{X}'$ に計算可能性が持ち込まれる．(3.11) の R あるいは逆 R^{-1} のような $\mathbb{X}$ と $\mathbb{X}'$ の間の写像についての計算可能性はこの立場から論じられる．したがって，この立場ならば，定理 2.1 そのものが次の形の定理に読み替えられる（[8]）．これに対し，定理 3.2 は，定理 2.1 の証明自体を実効的に見直して導かれているものであり，論理的には，次の定理が先行すべきものである..

定理 3.3 (Riesz-Fréchet の定理の計算可能解析的内容)　$\mathbb{X}$ は正規直交基底 $\{\mathbf{e}_n\}$ を実効的生成集合とする Hilbert 空間とし，双対空間を $\mathbb{X}'$ とする．このとき，(3.11) の写像 R およびその逆 R^{-1} は計算可能である．

[41] 命名法を $\delta : \mathbb{N}^\omega \to \mathbb{X}$, $\rho : \mathbb{N}^\omega \to \mathbb{R}$ とすると，誘導された命名法を $[\delta \to \rho] : \mathbb{N}^\omega \to \mathcal{C}(\mathbb{X},\mathbb{R})$ と書く．ただし，[37] は $\mathbb{N}$ の代わりに有限なアルファベット集合を用いているので「翻訳」が必要である．

この定理の証明は，$\mathbb{X}$ および $\mathbb{X}'$ の命名法に関する注意に帰着するので，ここでは立ち入らない．なお，[8] での取り扱いは，Hilbert 空間 $\mathbb{X}$ に，例 7 とは異なるが同値である命名法を適用するものである．例 1 を思い出そう．Fourier 展開

$$\mathbb{X} \ni \mathbf{x} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_n \rangle \, \mathbf{e}_n \quad \mapsto \quad (\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_n \rangle) \in \ell_2$$

によって $\mathbb{X}$ と ℓ_2 は Hilbert 空間として同一視できる．しかし，計算可能性まで篭めて考察するときは，上で $\mathbf{v}$ の計算可能性を論じた場合のように，$\mathbf{x}$ のノルム $\|\mathbf{x}\|$ の情報まで取り込む必要がある．そこで，$p, q \in \mathbb{N}^\omega$ を Fourier 係数 $\delta_{\mathbb{R}^\mathbb{N}}(p) = (\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_n \rangle)$ とノルム $\rho(q) = \|\mathbf{x}\|$ に対応させる全射を組み合わせた命名法（Fourier 表現）$\mathbb{N}^\omega \to \mathbb{X}$ を利用する．$\mathbb{X}'$ の命名法もこれから誘導する．

系 3.1　$\mathbb{X}$ は実効的に可分な Hilbert 空間とする．このとき，双対空間 $\mathbb{X}'$ も実効的に可分な Hilbert 空間である．

実際，$\mathbb{X}$ の実効的生成集合として，正規直交基底 $\{\mathbf{e}_n\}$ を選ぶ．双対空間 $\mathbb{X}'$ の元

$$\mathbf{e}'_n = U_{\mathbf{e}_n} : \mathbb{X} \ni \mathbf{x} \quad \mapsto \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_n \rangle \in \mathbb{R}$$

を考えると，$\{\mathbf{e}'_n\}$ は $\mathbb{X}'$ の正規直交基底であり，かつ，実効的生成集合になる．

3.4　Lax-Milgram の定理と計算可能解析

定理 2.2 を実効的可分な Hilbert 空間の場合に考えよう．$\mathbb{X}$ を実効的可分な Hilbert 空間，正規直交基底 $\{\mathbf{e}_n\}$ を実効的生成集合にとることができる．$\mathbb{X}'$ を $\mathbb{X}$ の双対空間とする．(2.14) は，$\mathbb{X}$ 上の双 1 次形式 B から $B_1 : \mathbb{X} \to \mathbb{X}'$ および $B_2 : \mathbb{X} \to \mathbb{X}'$ を定義している．したがって，[37] の流儀では，$\mathbb{X}$，$\mathbb{X}'$ の命名法から誘導される $\mathcal{C}(\mathbb{X}, \mathbb{X}')$ の命名法を制限して，$\mathbb{N}^\omega$ から $\mathbb{X}$ 上の有界な双 1 次形式全体 $\mathcal{B}$ への全射，すなわち，命名法を定めることができる[42]．さらに，$\mathcal{B}$ の命名法に加えて，強圧的な双 1 次形式全体 $\mathcal{BC}$ の場合は $\mathcal{B}$ の命名法に，$\mathbb{R}$ の命名法 ρ を $\mu = \inf B(\mathbf{x}, \mathbf{x})/\|\mathbf{x}\|^2$ に対応させることにより，$\mathcal{BC}$ の命名法が得られる．要するに，実効的可分な $\mathbb{X}$ の命名法から，標準的な手順で，$\mathcal{B}$ や $\mathcal{BC}$ の命名法が構成される．この立場では，定理 2.2 は計算可能な設定下で次の形になる（[8]）．

[42]形式的な説明だが，命名法 $\delta :\subseteq \mathbb{N}^\omega \to \mathbb{X}$，$\delta' :\subseteq \mathbb{N}^\omega \to \mathbb{X}'$（これ自体すでに入り組んでいるが）から命名法 $[\delta \to \delta'] : \mathbb{N}^\omega \to \mathcal{C}(\mathbb{X}, \mathbb{X}')$ を誘導した上で，双 1 次形式 B に対し，B_1 の形を利用する場合は，

$$\delta_1(p) = B, \quad p \in \mathbb{N}^\omega \quad \Longleftrightarrow \quad [\delta \to \delta'](p) = B_1$$

として，命名法 $\delta_1 :\subseteq \mathbb{N}^\omega \to \mathcal{B}$ を定められる．これは，B_1 の代わりに，S_1 を用いて，$\mathcal{C}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$ の命名法 $[\delta \to \delta]$ によって $[\delta \to \delta](p) = S_1$ としても同じである．

定理 3.4 (Lax-Milgram の定理の計算可能解析的内容)　$\mathbb{X}$ は実効的可分な Hilbert 空間，正規直交基底 $\{\mathbf{e}_n\}$ を実効的生成集合とする．このとき，写像

$$\mathcal{B} \ni B \quad \mapsto \quad S_1 \in \mathcal{C}\big(\mathbb{X}, \mathbb{X}'\big)$$

は計算可能である．さらに，

$$\mathcal{BC} \times \mathbb{R} \ni (B, \mu) \quad \mapsto \quad S_1 \in \mathcal{C}\big(\mathbb{X}, \mathbb{X}'\big)$$

も計算可能である．

しかし，この主張では定理 2.2 における $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1$ が $\mathbb{X}$ の計算可能な元になるときの条件は見難い．まず，双 1 次形式 B が計算可能になる条件は，$\{\mathbf{e}_n\}$ に対し，$\{B(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_k)\}$ が実数の計算可能な 2 重列になることである．ただし，これだけでは S_1 などは計算可能にはならない（反例がある．[8]）．実際，数列

$$\left(\sum_{m\in\mathbb{N}} |B(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m)|^2 \right)_{n\in\mathbb{N}}$$

の適切な管理が要求される．

定理 3.5 (実効化 Lax-Milgram の定理)　B は $\mathbb{X}$ 上の有界な双 1 次形式とする．このとき，次の条件は同値である．

1) $B_1 : \mathbb{X} \to \mathbb{X}'$ は計算可能である．
2) B は計算可能，かつ $\mathbb{X} \ni \mathbf{z} \mapsto N_{B_1(\mathbf{z})} \in \mathbb{R}$ は計算可能である．
3) B は計算可能かつ $(\sum_{m\in\mathbb{N}} |B(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m)|^2)_{n\in\mathbb{N}}$ が実数の計算可能列である．
4) $S_1 : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ は計算可能である（ただし，$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle S_1\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$）．

2) 3) 4) は古典的証明の実効化になじむものであるが，意外と面倒である[43]．念のために，定理 2.2 に近い形の言明を挙げておく：

定理 3.6　$\mathbb{X}$，B は定理 3.5 の条件を満たすものとする．F は $\mathbb{X}$ 上の計算可能な有界線形汎関数で，汎関数ノルム N_F が計算可能な実数となるものとする．このとき，

$$F(\mathbf{z}) = B(\mathbf{z}, \mathbf{y}_1) = B(\mathbf{x}_1, \mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{X}$$

を満足し，計算可能な $\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_1 \in \mathbb{X}$ が一意的に存在する．

3.5　定理の応用に向けての補遺

さて，与えられた $\mathbb{X}$ 上の有界線形汎関数を，言わば標準的な形式に Riesz-Fréchet の定理や Lax-Milgram の定理によって帰着させるというのが，これ

[43] [8] には古典的証明の実効化は含まれていない．折があれば論文の形にするかも知れない．

らの定理の応用の典型と考えられる．当初の有界線形汎関数としては，入れ子型の Hilbert 空間の対に基づいている場合も多い．

$\mathbb{X}_0$，$\mathbb{X}_1$ は（集合として）$\mathbb{X}_1 \subset \mathbb{X}_0$ であるような Hilbert 空間とし，

$$\|\mathbf{x}\|_0 \leq c\,\|\mathbf{x}\|_1, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{X}_1 \quad (c > 0)$$

の成立を仮定する．つまり，包含写像

$$\mathbb{X}_1 \ni \mathbf{x} \quad \mapsto \quad \mathbf{x} \in \mathbb{X}_0 \tag{3.12}$$

は連続である．しかも，$\mathbb{X}_1$ は $\mathbb{X}_0$ において稠密とする．このとき，$\mathbf{y} \in \mathbb{X}_0$ に対し，

$$U_{\mathbf{y}} : \mathbb{X}_1 \ni \mathbf{x} \quad \mapsto \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_0 \in \mathbb{R}$$

は（$\mathbb{X}_1$ 上の）有界な線形汎関数を一意的に定める．すなわち，$U_{\mathbf{y}} \in \mathbb{X}_1'$．定理 2.1 により，$\mathbb{X}_0'$ は $U_{\mathbf{y}}$ の全体で表されるから，$\mathbb{X}_0' \subset \mathbb{X}_1'$ であり，汎関数ノルムを考慮すると，双対包含写像

$$\mathbb{X}_0' \ni \mathbf{x}' \quad \mapsto \quad \mathbf{x}' \in \mathbb{X}_1' \tag{3.13}$$

は連続である．

例 9 (2.7) を思い出そう．$\mathbb{X}_0 = L^2(\Omega)$，$\mathbb{X}_1 = H_0^1(\Omega)$ とする．このとき，$f \in L^2(\Omega)$ に対し，

$$H_0^1(\Omega) \ni u \quad \mapsto \quad \int_\Omega u(x)\, f(x)\, dx \in \mathbb{R}$$

は $H_0^1(\Omega)$ 上の有界線形汎関数である．なお，Ω が境界 $\partial\Omega$ がなめらかな有界領域の場合，包含写像 $H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ はコンパクトである（Rellich の定理）．

計算可能解析の立場で問題になるのは，$\mathbb{X}_0, \mathbb{X}_1$ がそれぞれ実効的可分であって，包含写像 (3.12) が計算可能なときに，双対包含写像 (3.13) が計算になるかどうかである．これは一般には期待できないが，重要な場合については，しかし，次の定理が成り立つ．

定理 3.7 (Scauder の定理の計算可能解析版) $\mathbb{X}_0$，$\mathbb{X}_1$ は実効的可分な Hilbert 空間で，$\mathbb{X}_1$ は $\mathbb{X}_0$ の稠密な部分集合であるとする．このとき，包含写像 (3.12) がコンパクト[44]かつ計算可能であれば，双対包含写像 (3.13) もコンパクトかつ計算可能である．

ここで，コンパクト性を外すと反例がある（[8]）．この定理は，より広い文脈に属する（[8]）．

[44]すなわち，$\mathbb{X}^1$ の有界集合は $\mathbb{X}_0$ では全有界になる．

今，$\mathbb{X}_0$，$\mathbb{X}_1$ を（必ずしも包含関係が成り立たない）実効的可分な Hilbert 空間とする．$\mathbb{X}_0$ から $\mathbb{X}_1$ へのコンパクトな線形写像の全体を $\mathscr{B}_\infty(\mathbb{X}_0, \mathbb{X}_1)$ とする．コンパクト作用素が有限階数の作用素の作用素ノルムでの極限であることを利用すると，$\mathscr{B}_\infty(\mathbb{X}_0, \mathbb{X}_1)$ は作用素ノルムによって計算可能なノルム空間になる．つまり，命名法が存在する．特に，計算可能なコンパクト作用素は $\mathbb{N}^\omega$ の計算可能列に対応するものである．同様に，双対空間の間のコンパクトな線形写像の空間 $\mathscr{B}_\infty(\mathbb{X}_1', \mathbb{X}_0')$ も計算可能なノルム空間になる．

定理 3.8 (計算可能な Schauder の定理)　$\mathbb{X}_0$，$\mathbb{X}_1$ は実効的可分な Hilbert 空間とする．このとき，写像

$$\mathscr{B}_\infty(\mathbb{X}_0, \mathbb{X}_1) \ni T \quad \mapsto \quad T' \in \mathscr{B}_\infty(\mathbb{X}_1', \mathbb{X}_0')$$

は計算可能である．ただし，T' は T の双対写像である．

証明の説明は省略する（[8]）．

なお，定理 3.7 については個別に論ずることもできるので，例 9 の場合ならば包含写像や双対包含写像の計算可能性は直接検証できる（はずである）．

定理 3.7 および定理 3.8 により，§2.2，§2.3 で扱った 2 階楕円型偏微分方程式に対応する変分問題を計算可能解析の枠内で扱うための環境が出来上がったわけである．

4　数値解析との関わり

数値解析は講演者にとってはほとんど未知の領域である．理論的にはともかく実際の数値計算の経験はない．表題に（多分）と付した理由である[45]．しかし，数学解析にせよ計算可能解析にせよ，結果が理念の世界のみに留まっているようであったら，数学者にとっても得られた結果を本当に把握できたとは言えまい．そもそも理念のみの世界は，便宜上の仮のもの[46]であるから，信用できないと言う人たちが数学を非常によく知っていると思われる中[47]にもいるのである．要するに，少なくとも，理念的な数学的結果を数値の世界に移出することには認識論的に（！）本質的な価値がある — まあ，数値解析の専門家は認識論など気にはしないだろうが．

[45]泥縄で，いくつかの教科書（例えば，Aubin[3]，Brenner-Scott[9]，Ciarlet[11]，中尾・山本 [21]）を眺めたが，理解の程度は推して知るべし．基本的な文献で欠けているものがあることは，数学解析や計算可能解析での引用と変わらない．

[46]プラトンなら大仰天．ソクラテスにどう追及させるかしら．

[47]Slepian [32] を見ていただきたい．この論文は非常に内容があり，面白い．しかも，現象の観測や制御をめぐる数学の位置づけについて，通信工学者としての過激な，しかし，決して原理主義的ではない，発言がある．Slepian は飽くまでも通信工学上の現象観察についてしか述べてはいないと思われるが，やや敷衍すると，「真実」とは何かを論じているようにも見える．数学は極めて有力・適切な手段であるが，数学的概念そのものに「真実」を検証する力があるわけではなく，「数学的真実」は「事実」に対しては相対的であり便宜的だと Slepian は言っているようである．

4.1　図式としての数値解析と計算可能解析

$\mathbb{X}$ を Hilbert 空間，$B(\mathbf{x},\mathbf{y})$ を $\mathbb{X}$ 上の有界かつ強圧的な双 1 次形式とする．$F\in\mathbb{X}'$ に対し，変分型の問題

$$(*)\qquad B(\mathbf{u},\mathbf{v})=F(\mathbf{v})\quad(\mathbf{v}\in\mathbb{X})\quad\text{を満たす}\quad\mathbf{u}\in\mathbb{X}\quad\text{を求めよ}$$

を考える．B については定理 2.2 の条件を要請しておく．この場合には Lax-Milgram の定理（対称性があれば Riesz-Fréchet の定理）が応用できて，任意の $F\in\mathbb{X}'$ に対し，$(*)$ を満たす $\mathbf{u}\in\mathbb{X}$ が一意的に決まる．そこで，Galerkin 法などを念頭に有限次元空間による近似を検討してみたい．ここで重要なことは，以下の議論が定理 2.2 を前提にしていることである（この定理を証明しようということではない）．

さて，$\mathbf{s}_1,\cdots,\mathbf{s}_N\in\mathbb{X}$ を 1 次独立な元とし，これらが生成する $\mathbb{X}$ の N 次元部分空間を $\mathbb{X}_N$ とする．正規直交基底がある場合には，$\mathbf{s}_1,\cdots,\mathbf{s}_N$ を基底の一部から選びたいところであるが，これらは後述の形状関数を想定しているので，今はそれをしない．

双 1 次形式 B および線形汎関数 F を $\mathbb{X}_N$ に制限すると，線型方程式系

$$\mathcal{B}_N\,\mathbf{u}_N=\mathbf{f}_N$$

が得られる．ここで，$\mathbf{u}_N={}^t(u_1,\cdots,u_N)$, $\mathbf{f}_N={}^t(f_1,\cdots,f_N)$ は

$$\mathbf{u}_N=\sum_{j=1}^{N}u_j\,\mathbf{s}_j,\quad \mathbf{f}_N=\sum_{k=1}^{N}f_k\,\mathbf{s}_k\quad(f_k=F(\mathbf{s}_k))$$

となる N-ベクトル，$\mathcal{B}_N$ は $N\times N$-行列

$$\mathcal{B}_N=\Big(B(\mathbf{s}_j,\mathbf{s}_k)\Big)$$

である（j, k の順序に注意）．B の強圧性から $\mathcal{B}_N$ は非退化になり，したがって，与えられた $\mathbf{f}_N$ に対し，$\mathbf{u}_N$ が一意的に定まる．特に，

$$B(\mathbf{u}-\mathbf{u}_N,\mathbf{v}_N)=0\quad(\mathbf{v}_N\in\mathbb{X}_N)$$

である．$\mathbf{u}_N$ を $\mathbb{X}_N$ における Galerkin 近似解と言うことにする．

これから，次の命題[48]が得られる．

命題 4.1　B は上のものとする．このとき，

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_N\|\le\frac{M}{\mu}\inf_{\mathbf{v}_N\in\mathbb{X}_N}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}_N\|=\frac{M}{\mu}\min_{\mathbf{v}_N\in\mathbb{X}_N}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}_N\|$$

が成り立つ．

[48] Céa[10]．Brenner-Scott[9] に丁寧な証明がある．

実際，強圧性から

$$\mu\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_N\|^2 \le B(\mathbf{u}-\mathbf{u}_N,\mathbf{u}-\mathbf{v}_N)+B(\mathbf{u}-\mathbf{u}_N,\mathbf{v}_N-\mathbf{u}_N)$$

であるが，右辺第 2 項は消える．残りは有界性による処理である．

特に，$\mathbb{X}$ が実効的可分な Hilbert 空間で，実効的生成集合として正規直交基底 $\{\mathbf{e}_n\}$ を選べる場合を考えよう．双 1 次形式 B が定理 3.5 の条件を満たしているとする．すると，F およびその汎関数ノルムが計算可能であれば，$\mathbf{u}$ も計算可能になる．命題 4.1 は，このとき，Galerkin 近似解 $\mathbf{u}_N$ から $\mathbf{u}$ に実効的に収束する計算可能列が得られることを示している．実際，$\{\tilde{\mathbf{u}}_n\}$ は $\mathbf{u}$ に実効的に収束する計算可能列，すなわち，帰納的関数 $e:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ があって，

$$k \ge e(n) \quad \Longrightarrow \quad \|\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}_k\| < 2^{-n}$$

が成り立っているとする．このとき，帰納的関数 $e_1:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ があって，

$$\tilde{\mathbf{u}}_k = \sum_{j=0}^{e_1(k)} c_{kj}\,\mathbf{e}_j$$

と表される．e_1 は単調増大と仮定してよい．したがって，$\mathbf{e}_0,\cdots,\mathbf{e}_{e_1(k)}$ によって生成される $\mathbb{X}$ の部分空間を $\tilde{\mathbb{X}}_k$ とおくと $\tilde{u}_k \in \tilde{\mathbb{X}}_k$，特に，

$$\min_{\mathbf{v}\in\tilde{\mathbb{X}}_k} \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| < 2^{-n} \quad k \ge e(n)$$

である．したがって，各 $\tilde{\mathbb{X}}_k$ における Galerkin 近似解を改めて $\mathbf{u}_k$ とおくと，$\{\mathbf{u}_k\}$ は $\mathbf{u}$ に実効的に収束する．すなわち，次が言えた：

命題 4.2　$\mathbb{X}$ は実効的に可分な Hilbert 空間とし，B，F は定理 3.6 の条件を満たしているとする．このとき，$(*)$ の解 $\mathbf{u}$ は計算可能であって，$\mathbf{u}$ に実効的に収束する Galerkin 近似解の計算可能列 $\{\mathbf{u}_k\}$ がある．

注意 4.1　もともとの B についての計算可能性の要請がなければ Galerkin 近似解の計算可能性は保障されない．同様に，$\mathbf{u}$ が計算可能な元でなければ，$\mathbf{u}_k$ の収束の実効性を論じることの意味は減ずる．なお，実際の数値解析では，収束速度の改良は重要で，今の場合も Nitsche[22] の注意（[21] など参照）によって収束を倍速にできる．しかし，計算可能解析としては，収束については，速さよりも性格が重要である．

4.2　計算可能性と有限要素

数値解析と計算可能解析の接点という意味で有限要素法を考えてみよう．極めて大雑把な（したがって，いい加減な）アイデアは次のようであろう．Ω

を $\mathbb{R}^n$ の有界な領域とし，これを大きさ $O(h)$ のセル[49] $\Delta_{h,k}$ に分割する[50]：$\Omega = \bigcup_k \Delta_{h,k}$．セルの総数はセルの大きさの単調~~現象~~関数になる，つまり，セルが小さくなれば総数は $O(h^{-n})$ で増えることになる．Ω 上の任意の関数を各セルの上で扱いやすい関数 $s_{h,k,\ell}(x)$ の 1 次結合で近似する．これらの関数 $s_{h,k,\ell}(x)$ を取りあえず形状関数と呼ぶことにするが，形状関数はセルの構造や大きさを適切に反映してなければならない．この際，近似の精度とセルの大きさとが整合的であることが大切である．さらに，このような局所的な近似から，もとの関数の全体的な近似が得られなければならないが，そのためには，各セル上の形状関数 $s_{h,k,\ell}(x)$ を少なくとも隣接するセルまで拡張したときの両立性が保証されなければならない．こうしておけば，セルを小さくしていけば，関数近似の精度を上げられると期待できる．したがって，以上のもとで，Ω 上の関数に関する問題を各セルにおける近似問題に分割して解き，その解を再度まとめ上げて，セルの大きさに応じた精度で，もとの問題の Ω における近似解が得られるはずというわけである．

もとより，上の目論見は，Ω 上の具体的な問題に対し，関数空間を設定し，分割 $\Delta_{h,k}$ を構成し，形状関数 $s_{h,k,\ell}(x)$ を与えることができなければ話にならない．また，数値解析本来の課題としては，領域 Ω は数学的関心で設定されているよりも工学その他の実際的問題から決められることが多いだろうし，形状関数の選択を含め，近似問題の効率的な解法や関連するアルゴリズムの最適性が研究されるべきことであろう．計算精度の選択も経済性が問題になることがあるかも知れない．これらは計算可能解析よりも遥かに複雑な大問題である．

しかし，数学的に定式化された研究課題が，数学解析だけでなく，計算可能解析というカテゴリーでも接近可能ということが保障されていたら，その後の操作が何であれ，その計算機への移出に関しては安心ではないだろうか．その意味で，上に述べた有限要素，つまり，セル $\Delta_{h,k}$，形状関数 $s_{h,k,\ell}$ などを，具体的な関数空間としては Sobolev 空間 $H^m(\Omega)$ の場合について，計算可能解析を加味して観察してみたい．特に，$H^m(\Omega)$ の実効的可分性を論ずるにあたり，あるいは，命名法を $H^m(\Omega)$ に対し工夫するにあたり，考慮すべきことを明らかにしておく必要があろう．

$m = 0, 1, 2, \cdots$ のとき，$\mathscr{H}^m(\Omega)$ で， Ω 上の 2 乗可積分な関数 $u(x)$ で長さ m までの弱偏導関数 $\partial^\alpha u(x)$ が（存在して）すべて Ω 上の 2 乗可積分となるものの全体を表そう．$\mathscr{H}^m(\Omega)$ には，非負定値の対称な双 1 次形式

$$\langle u, v\rangle = \langle u, v\rangle_m = \sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega \partial^\alpha u(x)\, \partial^\alpha v(x)\, dx, \quad u, v \in \mathscr{H}^m(\Omega)$$

が定義される．例によって，ほとんど到るところで一致する 2 元は区別しな

[49]Ω は形状が複雑かもしれない．しかし，セルは基本的に同じ形状，少なくとも，任意二つのセル同士が簡単な変換で移り得るものとする．工学的には，セルを，対象の物理的あるいは化学的構造などが反映するように選択できるということも重要であろう．

[50]二つのセルの閉包が交わるときは，共通部分はそれぞれの境界に含まれるとする．

い（同値関係 $\sim$）ことによる同値類全体を $H^m(\Omega)$ とおくと，$H^m(\Omega)$ に誘導された双 1 次形式 $\langle\, ,\, \rangle_m$ は正定値となり，$H^m(\Omega)$ は Hilbert 空間になる．ただし，$H^m(\Omega)$ と $\mathscr{H}^m(\Omega)$ を混同しても，(我々の水準では) 困ったことは起きない（ことは $\mathscr{L}^2(\Omega)$ あるいは $\mathscr{H}_0^1(\Omega)$ のときと同様である）．同様に，Ω の任意のセル Δ についても，$H^m(\Delta)$ を考えることができる．

したがって，上で述べたことは，計算可能性をこめた分解 $\Omega = \bigcup_k \Delta_{h,k}$ があるとして，実効的可分な Sobolev 空間 $H^m(\Omega)$，$H^m(\Delta_{h,k})$ が得られ，しかも，$H^m(\Delta_{h,k})$ は異なる k どうしの共通部分はゼロ・ベクトルしかないこと，形状関数 $s_{h,k,\ell}$ は各 $H^m(\Delta_{h,k})$ の計算可能な元であるべきこと，さらに，ある意味で計算可能性をこめて

$$H^m(\Omega) = \sum_k \bigoplus H^m(\Delta_{h,k}) \text{（直和）} \tag{4.1}$$

の成立が期待されていることを意味している．その上，この右辺はセルの大きさ h によって実効的に制御されなければならない，つまり，一種のフラクタル構造が Ω に想定されていることになる．また，これらは本来の考察対象の課題に依存する．特に境界条件の効果は本質的である．

この目論見に実質的な内容をどれだけ付与できるだろうか[51]．

まず，一般に $H^m(\Omega)$ の実効的可分性を論ずる必要がある．要点の第一は，境界 $\partial\Omega$ の計算可能性の条件である．これは基本的に難しい問題ではないだろう．ただし，計算可能な超曲面論というべきものを展開する必要はあるかも知れない．区分的に超平面であるような超曲面は計算可能性と相性がよさそうである．計算可能な超曲面は，計算可能な超平面群の実効的極限とでもいうべきものとして把握できるのではないだろうか．

要点の第二は，$\partial\Omega$ の計算可能性を反映させた Ω の計算可能なセル分割 $\{\Delta_{h,k}\}$ の構成である．これは同時にセル間の相互変換

$$T_{h,k,k'} : \Delta_{h,k} \longleftrightarrow \Delta_{h,k',k}$$

も指定することになる[52]．しかし，恐らくもっとも注意を払わなければならないのは，$\partial\Omega$ に隣接するセルの振る舞いであり，また，全体としてはセルの大きさの効果とその管理だろう．

形状関数については多項式を選ぶのが古典的である (Sobolev[33]，Bramble-Hilbert[6] など)．他の選択も問題に応じて可能ではある．隣接するセルの上の多項式をうまく接続して全体として $H^m(\Omega)$ の元を構成できるかどうかについての決定は重要である．しかも，セルの大きさの変動に関して整合的に構成されなければならない．ここにもセルの構成と形状関数の選択との相互

[51]実は CCA2005（於京大，2005 年 8 月）サテライトの解説講演で提起した問題である．全然進んでいない．

[52]境界の効果を制御できるときは，例えば，基準となるセル Δ_0 から各セルを $\Delta_{h,k} = S_{h,k}\Delta_0$ の形で決められることもあろう．このときは，$T_{h,k,k'} = S_{h,k'} \circ S_{h,k}^{-1}$ である．

作用が予想される．しかし，有限要素法の既存の結果を整理すると，どの程度のことが期待できるかのおおよその見当は付く．

セルの形や大きさと多項式近似との関連を示すものとして，次の Bramble-Hilbert の結果[53]がある．

命題 4.3　$\Delta \subset \mathbb{R}^n$ は有界領域とし，かつある球 $K \subset \Delta$ に関して星型[54]とする．このとき，任意の $g \in H^m(\Delta)$ は，適当な $m-1$ 次多項式 p に対し，

$$|g-p|_{\Delta,k} \le C_{\Delta,m}\ (d_\Delta)^{m-k}\ |g|_{\Delta,m},\ k=0,\cdots,m\ (d_\Delta = \mathrm{diam}\,(\Delta)) \quad (4.2)$$

を満たす．ここで，$C_{\Delta,m}$ は g, p に依存しない定数，$|\ |_k$ は k-階の同次セミノルム

$$|v|_{\Delta,k} = \sqrt{\sum_{|\alpha|=k} \int_\Delta |\partial^\alpha v(x)|^2\,dx}$$

である[55]．

この命題の要点は，$g(x)$ の近似 Taylor 展開 $p(x)$ を丁寧に求めることである．すなわち，K を Δ に含まれる極大な球，$\varphi(x)$ を K の境界では消える滑らかな関数で $\int_K \varphi(x)\,dx = 1$ を満たすものとして，

$$p(x) = \mathscr{K}_m\, g(x) = \sum_{|\alpha|<m} \int_K \frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha g(y)\,\varphi(y)\,dy$$

を考える（$\partial^\alpha g(x)$ は弱偏導関数である）．Δ として奇妙な集合を考える必要は特にないから，この命題を実効化した計算可能解析版は直ちに得られる．

次に，隣接するセル Δ_1，Δ_2 それぞれで定義された関数 g_1，g_2 から $\Delta_1 \cup \Delta_2$ 上の関数を構成するところを見ておこう[56]．まず，境界値の意味を確認しておく．

補題 4.1　$u(x) \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n_+)$ とする[57]．

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x_n > 0 \\ 0, & x_n < 0 \end{cases}$$

[53] [6]．最近のでは [12] など．証明は [9] などにある．ただし，[48] などに基づいて改良ないし精密化を図る必要があるだろう．[33] が優れている点もあるのである．

[54] すなわち，領域 Δ に，Δ の任意の点と K の任意の点を結ぶ線分が Ω に含まれる．なお，この条件と密着している Taylor 展開のアイデアを用いて Sobolev[33], pp.45–64, は $H^m(\Omega)$（もその一種である，一般の Sobolev 空間 $W^m_p(\Omega)$）の関数の特徴づけを行っている．

[55] したがって，$\|v\|_{\Delta,m} = \sqrt{\langle v,\, v\rangle_\ell} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\ell} |v|^2_{\Delta,k}}$ である．したがって，

$$\|g-p\|_{\Delta,\ell} \le C'_{\Delta,m}\,(d_\Delta)^{m-\ell}\,|g|_{\Delta,m}$$

が得られてもいる．

[56] 偏微分方程式の基本的な教科書には必ず載っている．微積分の水準のメモではある．

[57] ただし，$\mathbb{R}^n_+ = \{(x', x_n); x_n > 0, x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$．

とおくと，任意の $\varphi(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_n^m \varphi(x)\, u(x)\, dx = \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_n^{m-k} \varphi(x', 0)\, \partial_n^{k-1} u(x', 0)\, dx' + (-1)^m \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, \partial_n^m u(x)\, dx$$

が成り立つ．

この補題から，$u(x) \in H^m(\mathbb{R}^n_+)$ の境界値 $u(x', 0), \cdots, \partial_n^{m-1} u(x', 0)$ が定義できて，しかも，

$$\partial_n^k u(x, 0) \in H^{m-k-1}(\mathbb{R}^{n-1}), \quad k = 0, \cdots, m-1$$

となることが従う（ただし，これは最良の結果ではない）．$\mathbb{R}^n_+$ は，なめらかな境界を持つ一般の領域 Ω の境界の近くの座標近傍に対応するものであって，$\mathbb{R}^n_+$ を Ω の内部，$\mathbb{R}^{n-1} = \{x_n = 0\}$ を $\partial\Omega$ のなめらかな超曲面である開部分集合 Γ と読み替え，$-\partial_n$ を Γ における外向き単位法線微分 ∂_ν に読み替えると，$u \in H^m(\Omega)$ の Γ 上への境界値 $\partial_\nu^k u|_\Gamma$, $k = 0, \cdots, m-1$ が定義されることがわかる．しかも，境界値 $\partial_\nu^k u|_\Gamma$ は Γ 上の Sobolev 空間 $H^{m-k-1}(\Gamma)$ の元になる[58]．

以上のもとで，次の補題が成り立つ．

補題 4.2　Δ_1，Δ_2 は $\mathbb{R}^n$ の互いに交わらない開集合，両者の閉苞の共通部分 $\Gamma = \overline{\Delta_1} \cap \overline{\Delta_2}$ はなめらかな超曲面とする．$D = \Delta_1 \cup \Gamma \cup \Delta_2$ とおく．$u_i \in H^m(\Delta_i)$, $i = 1, 2$ とする．このとき，

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \in \Delta_1 \\ u_2(x), & x \in \Delta_2 \end{cases}$$

について，$u(x) \in H^m(D)$ となるための必要十分条件は $u_1(x)$，$u_2(x)$ の Γ 上への $m-1$ 階までの境界値が両立することである[59]．

計算可能解析の立場では，この補題は両立条件という等号判定を含んでいるので，そのまま利用できるかどうかは明らかではない．しかし，指導原理としては有益である．

[58] Γ が超平面の一部であれば，$H^k(\Gamma)$ の定義は容易である．一般の超曲面の場合は，局所座標系を利用する．計算可能性の観点からは，どのくらい組織的な議論がなされているのかよくわからない．[47] や で手は付けられているが，まだ，十分ではない．[26] は関係があるが，出版されたのかどうか不明である．[19] に見るように意外と微妙である．なお，境界値をまとめた $\mathrm{Tr}_{(m)}(u; \Omega, \Gamma) = (u(x)|_\Gamma, \cdots, \partial_\nu^{m-1} u(x)|_\Gamma)$ を $u(x)$ の Γ 上へのトレースという．これらについての詳細は，古い本で恐縮だが，例えば，[1]，[18]，[48] なども見られたい．

[59] ∂_ν を Γ における Δ_1 の外向き法線微分とすれば，Δ_2 の内向き法線微分になる．両立条件は

$$\partial_\nu^k u_1(x)|_\Gamma = \partial_\nu^k u_2(x)|_\Gamma, \quad k = 0, \cdots, m-1$$

である．

手元の Brenner-Scott[9] に従って，局所的な補間作用素を定義する．既にお断りしたように，講演者は数値解析も素人である．[9] は，数学的にはかなりしっかりと書かれているようだが，有限要素法の標準的なものなのかどうか確信はない．

さて，$\Delta \subset \mathbb{R}^n$ を有界な連結開集合，$\mathscr{P}$ を多項式からなる有限次元空間，$\mathscr{N}$ を $\mathscr{P}$ の双対空間 $\mathscr{P}'$ の基底の集合とする．$\mathscr{P}$ が d 次元なら $\mathscr{P}'$ も d 次元，したがって，$\mathscr{N} = \{N_1, \cdots, N_d\}$ と書ける．Δ を要素域，$\mathscr{P}$ の元を形状関数，$\mathscr{N}$ を節点変数と言うと [9] にある．三つ組 $(\Delta, \mathscr{P}, \mathscr{N})$ を有限要素と言っている．$\mathscr{P} \subset H^m(\Delta)$ により，$\mathscr{N}$ の元を $H^m(\Delta)$ 上の有界線形汎関数に拡張することができる（Hahn-Banach の定理）．これは一意的ではない．[9] では，次のように考えている：m が十分大きい，$m > \frac{n}{2} + m_0$（$m_0 \in \mathbb{N}$）とすると，Sobolev の埋蔵定理より，$H^m(\Delta) \subset \mathcal{C}^{m_0}(\overline{\Delta})$ である．そこで，$\mathscr{P} \subset \mathcal{C}^{m_0}(\overline{\Delta})$ として，$\mathscr{N}$ を $\mathcal{C}^{m_0}(\overline{\Delta})$ の双対空間の元からなると考える．これも一意的に決まるわけではない．実際の例では，順序が逆で，$\mathscr{N}$ は具体的に与えられた有限個の点を台とするような測度から成る．接点変数といわれるのは，このためである．次に，$\mathscr{P}$ の基底 $p_1(x), \cdots, p_d(x)$ を $\mathscr{N}$ の双対，すなわち，

$$N_j(p_i) = \delta_{ji}, \quad i, j = 1, \cdots, d$$

を満たすものとして定める．すると，

$$N_j : H^m(\Delta) \ni g \mapsto N_j(g) \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \cdots, d$$

は有界線形汎関数を定め，したがって,（局所的な）補間作用素

$$\mathscr{I}_\Delta : H^m(\Delta) \ni g \quad \mapsto \quad \sum_{j=1}^{d} N_j(g)\, p_j(x) \in \mathscr{P} \subset H^m(\Delta)$$

が得られる．$\mathscr{I}_\Delta$ の作用素ノルムは，

$$|\mathscr{I}_\Delta(g)|_{\Delta,k} \le \sum_{i=1}^{d} |p_j|_{\Delta,k}\, \|N_j\|_{\mathcal{C}^{m_0}(\overline{\Delta})'}\, \|g\|_{\mathcal{C}^{m_0}(\overline{\Delta})}$$

より，Sobolev の埋蔵定理を経由して，特に，

$$\le C \sum_{i=1}^{d} \|p_j\|_{H^m(\Delta)}\, \|N_j\|_{\mathcal{C}^{m_0}(\overline{\Delta})'}$$

である．構成から，$p \in \mathscr{P}$ に対し，$\mathscr{I}_\Delta(p) = p$ である．したがって，Δ がある球に関して星型であり，$\mathscr{P}$ が $m-1$ 次までの多項式全体からなるとすると，$g \in H^m(\Delta)$ に対し，$\mathscr{I}_\Delta(\mathscr{K}_m\, g) = \mathscr{K}_m\, g$ である．

以上から，次の命題を得る：

命題 4.4 　$m > \frac{n}{2} + m_0,\, m_0 \in \mathbb{N}$ とする．有限要素 $(\Delta, \mathscr{P}, \mathscr{N})$ において，Δ は球に関して星型，$\mathscr{P}$ は $m-1$ 次までの多項式全体から成るとする．このとき，補間作用素 $\mathscr{I}_\Delta$ について，

$$|g - \mathscr{I}_\Delta(g)|_{\Delta,k} \le C''_{\Delta,k}\,(d_\Delta)^{m-k}\,|g|_{\Delta,k}, \quad k = 0, \cdots, m \quad (g \in H^m(\Delta))$$

が成り立つ．

ここまでは，Hahn-Banach の定理をこめて計算可能解析で扱えるようである（例えば，[7] 参照）．ただし，詳細の検討はできてはいない．

そこで，領域 Ω はそれぞれある球に関して星型の有界な開集合（セル）の系 $\Delta_i,\, i = 1, \cdots, M$ に分割される，すなわち，

$$\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

かつ

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{M} \overline{\Delta_i}$$

が成り立つとする．さらに，各 $\Gamma_{ij} = \overline{\Delta_i} \cap \overline{\Delta_j} \neq \emptyset$ ならば，Γ_{ij} はなめらかな超曲面とする．このとき，各 Δ_i を要素域とする有限要素 $(\Delta_i, \mathscr{P}_i, \mathscr{N}_i)$ に対応して，局所 Sobolev 空間 $H^m(\Delta_i)$，局所的な補間作用素 $\mathscr{I}_{\Delta_i}$ が定義される．$m > \frac{n}{2} + m_0,\, m_0 \in \mathbb{N}$ ならば，構成から，

$$H^m(\Omega) \ni g \mapsto g_i = g|_{\Delta_i} \in H^m(\Delta_i)$$

は全射であり，さらに，$\Gamma_{ij} \neq \emptyset$ のとき，g_i と g_j の境界値は $m-1$ 階までの両立条件を満たしている．そこで，$g \in H^m(\Omega)$ に対し，大域的な補間作用素（の候補）を

$$\mathscr{I}\,g(x) = \mathscr{I}_{\Delta_i}\,g_i(x), \quad x \in \Delta_i, \quad i = 1, \cdots, M$$

によって定義しよう．$H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ のときは両立条件は不要なので，$\mathscr{I}g \in L^2(\Omega)$ である．すなわち，$\mathscr{I}g(x)$ は Ω 上の関数としては定義される．しかも，$d_{\Delta_i} \le h$ ならば

$$\|g - \mathscr{I}g\|_{L^2(\Omega)} \le C_0\,h^m\,\|g\|_{H^m(\Omega)}$$

が成り立つ．問題は $\ell \ge 1$ に対し，$\mathscr{I}g \in H^\ell(\Omega)$ が成り立つかどうか，つまり，$\mathscr{I}_{\Delta_i}g_i$ と $\mathscr{I}_{\Delta_j}g_j$ が $\Gamma_{ij}(\neq \emptyset)$ で $\ell-1$ 階までの両立条件を満たすかどうか，それも計算可能性を考慮すると，有限要素系の構成によってすでに保障されているようにできるかどうかである．もちろん，これは個別的な有限要素系設計の話題になる．可の場合は，

$$\|g - \mathscr{I}g\|_{H^\ell(\Omega)} \le C_\ell\,h^{m-\ell}\,\|g\|_{H^m(\Omega)}$$

が成り立つはずである．次元や Ω の形状にもよるが，このような評価が成立する有限要素系は知られている．いずれにせよ，Ω の構造に密着している．理論的には，Ω を多様体とすることもできるはずである．実際，境界上の Sobolev 空間はそのように扱うべきであった．また，分割の細分の仕方も技術的な知識として開発されている．しかし，計算可能解析という観点から，特に，$H^m(\Omega)$ の実効的生成集合を有限要素分割と結び付けようとする立場からは，まだ，十分ではない．

Sobolev 空間の実効的生成集合を有限要素と関連付けることには余り意味がないと思われるかも知れない．実際，数値解析の立場からは，信頼性が高く，効率のよい収束の早いアルゴリズムを開発することが重要であろう．しかも，それらの正当性の担保は数学解析で行なわれている．しかし，その基礎になる部分が計算可能性と直結していれば，各種のアルゴリズムの意義が改めて見えてくるはずである．

5 最後に

5.1 最近のある会合で遭遇した友人と

当方： 今，最終講義の原稿というか下書きを書いている．回想を述べるほどの実績はないから，何か問題提起してやろうと思って始めたら，改めて調べなけりゃいけないこともあるし，全体像が見えているわけでもないので，もう間に合わないよ．それに，問題提起なんて，老人の思い込みだけで，聞いている方には見当違いの迷惑な話かもしれないし，$\cdots$．

友人： ははあ，老人の繰言 — 終わらないって奴ね．

5.2 謝辞

いろいろな方に実にお世話になった．
本当に長い間大変ありがとうございました．

参考文献

[1] Robert A. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press (1975)

[2] S. Agmon. *Lectures on Elliptic Boundary Value Problems*. Van Nostrand (1965)

[3] J.-P. Aubin. Approximation des espaces de distributions et des opérateurs différentiels. Bull. Soc. Math. France. Suppl. Mém., **12** (1967)

[4] A. S. Besicovitch. A general form of the covering principle and relative differentiation of additive functions. I & II. Proc. Cambridge Phil. Soc., **41** (1945), 103 – 124 & **42** (1946), 1 – 10.

[5] Nicholas Bourbaki. *Eléments d'histoire des mathématiques.* Hermann (1960)

[6] J. H. Bramble and S. R. Hilbert. Estimation of linear functionals on Sobolev spaces with application to Fourier transforms and spline interpolations. SIAM J. Numer. Anal., **7** (1970), 112 – 124.

[7] Vasco Brattka and Gero Presser. Computability on subsets of metric spaces. Theoretical Computer Science, **305** (2003), 43 – 76.

[8] Vasco Brattka and Atsushi Yoshikawa. Towards computability of elliptic boundary value problems in variational formulation. Journal of Complexity (to appear).

[9] Susanne C. Brenner and L. Ridgway Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods.* Springer (1994)

[10] J. Céa. Approximation variationnelle des problèmes aux limites. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **14** (1964), 345 – 444.

[11] Philippe G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems* North-Holland (1978)

[12] S. Dekel and D. Leviatan. The Bramble-Hilbert lemma for convex domains. SIAM J. Math. Anal., **35** (2004), 1203 – 1212.

[13] M. Fréchet. Sur les ensembles de fonctions et les opérations linéaires. Comptes Rendus Acad. Sc. Paris. **144** (1907), 1414 – 1416.

[14] J. Hadamard. *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques.* Hermann (1932).

[15] John E. Hopcroft & Jefferey D. Ullman. *Introduction to automata theory, language and computation.* Addison-Wesley Publ. Co. (1979) [第 2 版の一部の邦訳あり．サイエンス社（2000)]

[16] Ker-I Ko. *Complexity thery of real functions.* Birkhäuser (1991)

[17] P. D. Lax and A. N. Milgram. Parabolic equations. *Contributions to the theory of partial differential equations.* Annals of Mathematical Studies. **33**, Princeton University Press (1954), 167 – 190.

[18] J.-L. Lions et E. Magenes. *Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications*, Tom **1**. Dunod (1968)

[19] S. Miyamoto and A. Yoshikawa. Computable sequences in the Sobolev spaces. Proc. Japan Acad. Ser. A. **80** (2004), pp. 15–17.

[20] 溝畑茂．偏微分方程式論．岩波書店 (1965)

[21] 中尾充宏・山本野人．精度保証付き数値計算．日本評論社 (1998)

[22] J. Nitsche. Ein Kriterium für die Quasi-Optimalität des Ritzschen Verfahrens. Numer. Math. **11** (1968), 346 –348.

[23] R. Penrose. *The emperor's new mind*. Oxford university Press (1989)

[24] Marian B. Pour-El. Abstract computability and its relation to the Genral Purpose Analog Computer (Some connections between logic, differential equations and analog computers), Trans. Amer. Math. Soc., **199** (1974), pp. 1-28.

[25] Marian B. Pour-El and J. Ian Richards. *Computability in Analysis and Physics*. Springer-Verlag (1989)

[26] Marian B. Pour-El and Ning Zhong. Boundary regularity and computability. Informatik Berichte **302**. FernUniversitä in Hagen (2003)

[27] F. Riesz. Sur une espèce de Géométrie analytique des systèmes de fonctions sommables. Comptes Rendus Acad. Sc. Paris. **144** (1907), 1409 – 1411.

[28] F. Riesz. Zur Theorie des Hilbertischen Raums. Akad. Sci. Math. Szeged. **7** (1934), 34 – 38.

[29] F. Riesz et B. Sz. Nagy. *Leçons d'Analyse Fonctionnelle*. (4-ème éd.) Akadémiai Kiadó (1965)

[30] Claude E. Shannon. Mathematical theory of differential analyzer, J. Math. Phys. Mass. Inst. Tech. , **20** (1941), pp. 337–354.

[31] A. Shen and N. K. Vereshchagin. *Computable Functions*. American Mathematical Society (2003)

[32] Slepian, David : Some comments on Fourier analysis, uncertainty and modeling, SIAM Review 25 (1983), pp. 379–393.

[33] S. L. Sobolev. *Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*. American Mathematical Society (1963)

[34] 田中一之. 逆数学と 2 階算術. 河合文化教育研究所 (1997)

[35] A. M. Turing. On computable numbers, with an application to the "Entscheidungsproblem". Proc. London Math. Soc. Ser. 2 **42** (1936), pp. 230–265; **43** (1937), pp. 544–546.

[36] K. Weihrauch. *Computability.* Springer-Verlag (1987)

[37] K. Weihrauch. *Computable Analysis.* Springer (2000)

[38] 八杉満利子・鷲原雅子. 解析学における計算可能性. 数学 **50** (1998), 130 – 148.

[39] 吉川敦. 九州大学大学院・数理学研究科の目指すもの. 応用数理 **3** (1991), 55–58.

[40] A. Yoshikawa. Interpolation functor and computability. Theoretical Computer Science. **284** (2002), 487 – 498.

[41] A. Yoshikawa. On an ad hoc computability structure in a Hilbert space. Proc. Japan Acad. **79** Ser. A (2003), 65 – 70.

[42] 吉川敦（研究代表者）. 数学解析の理論的展開の計算機上での遂行可能性. 京都大学数理解析研究所講究録 **1169** (2000)

[43] Atsushi Yoshikawa. Souvenirs d'un pensionnaire étranger japonais et matheux à la rue d'Ulm. Société des Amis de l'École Normale Supérieure. Bulletin n° **220** (2001). pp.20–25.

[44] 吉川敦（研究代表者）. 数学解析の計算機上での理論的展開とその遂行可能性. 京都大学数理解析研究所講究録 **1286** (2002)

[45] 吉川敦（研究代表者）. 数学解析の理論的展開の計算機による支援・遂行可能性. 京都大学数理解析研究所講究録 **1381** (2004)

[46] 吉川敦. さて, 数学解析の望ましい姿とは?　伊藤・後藤・宮川（編）: 数学解析の望ましい姿を探って（研究集会報告集）. 九州大学出版会 (2004) pp.143–148.

[47] N. Zhong. Computability theory of Sobolev space and its applications. Theoretical Computer Science. **219** (1999), 487 – 510.

[48] William P. Ziemer. *Weakly Differentiable Functions.* Springer-Verlag (1989)

索 引