

直線位相一般化 LOT の完備な回転モデルとその分類法

Complete Rotation Models and Classification Methods of Linear-phase Generalized LOT

井澤 裕司

Yuji IZAWA

高橋 速巳

Hayami TAKAHASHI

(2017.1.15)

あらまし

本稿は、すべての正規直交基底が表現可能な直線位相一般化 LOT の回転モデルの構成法に関するものである。多次元直交空間における正規直交基底について、各ステージ毎に基底の両側に次元を拡張し、対称性と直交性、ノルム 1 の 3 条件を保存する回転や置換等の操作を加えることにより、一般化 LOT の基底を生成することができる。この操作は群の性質をもつことが知られているが、これらのすべての組み合わせを簡潔に記述するため、基本対称行列の列に関する対称式から、有限な対称置換群と対称符号反転群が導かれることを示す。上記対称式を満たすすべての操作は、それらを組み合わせた直積 G により表されるが、これから連続な回転群へ拡張可能な正規部分群 H を抽出し、これを法とする 4 つの剰余類に類別されることを示す。回転モデルは、各ステージ毎に 4 つの類に対応する操作を繰り返すことにより構成されるが、ステージ数が増えると組み合わせの数が 4 のべき乗で増加するため、最適パラメータ探索の効率化が課題となる。そこで、ステージ間に残されている冗長な操作を統合するため、符号化効率の評価尺度として広く用いられる符号化ゲインが、LOT 基底の置換や \pm の符号反転、鏡映等の操作に対し不変となる性質に着目し、4~8 次元の回転モデルにおいて、その最適値が保存されるステージ間の等価変換規則について検討した。更に、抽出した 4 つの規則を用いて上記回転モデルを整理・統合することにより、最終的にステージ数に等しいグループに分類されることを明らかにする。

1 まえがき

画像の変換符号化には、直交変換を用いたブロック符号化や、フィルタバンクを用いたサブバンド符号化がある。Malver らは、DCT(Discrete Cosine Transform)[1] の圧縮率を上げた場合に発生するブロック歪を改善するため、DCT の偶数次と奇数次の基底を組み合わせ、ブロックサイズの 2 倍の基底長に拡張することにより、直交性と直線位相、完全再構成の条件を満たす LOT(Lapped Orthogonal Transform) が構成できることを明らかにした [2]。更に、拡張した基底の対称性を利用して、隣接するブロックの変換をブロック内の遅延素子で代行し、加減算のバタフライ演算を導入することにより、実質的な乗算数を低減する手法を提案した [3]。一方、Vetterli らはいわゆるポリフェーズ行列を用いて、LOT とフィルタバンクが等価な変換であることを示し、完全再構成や直交性を有するフィルタの設計法を、一定の遅延を許容するポリフェーズ行列の正則性やパラユニタリ性と位置付けて解析する手法を提案した [4],[5]。

LOT では変換の対称性が生かせるよう、ブロックサイズを偶数に設定していた [2]。フィルタバンクの場合、これらは

チャンネル数あるいは分割数に相当するが、Soman らはその条件を一般化し、直交性と直線位相をもつ任意のチャンネル数のフィルタバンクを構成する手法 (GenLOT) を提案した [6]。また、Queiroz らはこれを発展させ、ブロックサイズの整数倍の基底をもつ LOT の構成法について報告している [7],[8]。

一方、LOT における回転操作が、対称な回転群を構成することから、群の性質を用いて多次元の直線位相 LOT を効率的に設計する手法が提案されている [11][12]。ここでは、直交座標系の回転に基づく幾何学モデルを用いて、LOT のすべての基底の状態が表現可能な最小限のパラメータ群が示されている。また、これらの回転モデルを拡張することにより、基底長がブロックサイズの整数倍に拡大された直線位相の一般化 LOT を設計する手法が提案されている [13]。

このように LOT については、既に様々な設計手法や最適化手法が数多く報告されているが、符号化ゲインのような評価尺度の最適値が全体で何通り存在するのか？という問いについては、未だ解答は示されていない。

例えば、一般化 LOT の設計に広く用いられているラティスマodelは、各ステージ毎に、バタフライ状の加減算と遅延素子、2 つの直交変換部から構成される。その最適化では、最少

の回転パラメータ数を求め、符号化ゲイン等の評価尺度を用いて、この値が最大となるパラメータの値が決定される。しかし、直交変換部が回転操作のみ、すなわち行列式が1の場合については詳細に検討されているものの、回転に奇置換を組み込んだ行列式が-1の場合については、厳密な検討は行われていなかった。更に、直交変換部の行列式が1と-1の場合では、基底の形状や符号化ゲインの最適解が基本的に異なると考えられる。ステージ数が増えると、その組み合わせの数はべき乗で増加するため、最適化をより効率的に行う手法が求められるが、従来のラティスマデルでは遅延素子 z^{-1} が含まれるため、ステージ間の冗長な操作を簡略化することは容易ではなかった。

本研究の目的は、シンプルな幾何学的構造を有する回転モデルを導入し、ステージ間の等価な操作を整理・統合することにより、複数の最適解とこれに対応するモデルを分類することにある。

一般に、離散フーリエ変換 (DFT) の変換行列には規則性・対称性があり、 $A \cdot B + A \cdot C = A(B + C)$ のような分配則に基づく加減算のバタフライ演算により、実質的な乗算数を低減すると、いわゆる高速フーリエ変換 (FFT) が導出される。

上記回転モデルにおいても、各ステージの回転操作には対称性があり、最も基本的なモデルについて、加減算のバタフライ演算等を用いて回転の乗算部を統合すると、従来のラティスマデルによる一般化 LOT が導かれる [13]。

本稿では、はじめに4~8次元の一般化 LOT について、すべての基底の状態を表しうる回転モデルを簡潔に記述するため、拡張した対称式から、有限な対称置換群と対称符号反転群を導出する。上記対称式を満たすすべての操作は、それらを組み合わせた直積 G により表されるが、これから連続な回転群へ拡張可能な正規部分群 H を抽出し、これを法とする4つの剰余類に類別されることを示す。

この回転モデルは、各ステージ毎に4つの類に対応する操作を繰り返すことにより構成されるが、ステージ数が増えると組み合わせの数が4のべき乗で増加する。そこで、ステージ間に残されている冗長な操作を統合するため、符号化効率の評価尺度として広く用いられる符号化ゲインが、LOT 基底の置換や±の符号反転、鏡映等の操作に対し不変となる性質に着目し、4~8次元の回転モデルにおいて、その最適値が保存されるステージ間の等価変換規則について検討した。更に、抽出した4つの規則を用いて上記回転モデルを整理・統合することにより、最終的にステージ数に等しいグループに分類されることを明らかにする [14]。

2 4次元正規直交基底の構成法

はじめに、対称性のある4次元正規直交基底の構成法について整理する [11]。

2.1 正規直交基底の基本対称行列 E_4

直線位相となるすべての4次元正規直交基底は、次に示す (4×4) の行列 T_4 を用いて表すことができる。

$$T_4 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_2 & a_1 \\ b_1 & b_2 & b_2 & b_1 \\ c_1 & c_2 & -c_2 & -c_1 \\ d_1 & d_2 & -d_2 & -d_1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

行列 T_4 の各行が基底に対応し、2列と3列の間の垂直な対称軸に関して、1行と2行は偶対称成分、3行と4行は奇対称成分となる。

これらが正規直交系を構成する条件は次のようになる。

$$a_1^2 + a_2^2 = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$b_1^2 + b_2^2 = \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$c_1^2 + c_2^2 = \frac{1}{2} \quad (4)$$

$$d_1^2 + d_2^2 = \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = 0 \quad (6)$$

$$c_1 \cdot d_1 + c_2 \cdot d_2 = 0 \quad (7)$$

ここで、式(2)~(5)は基底のノルム、式(6)~(7)は基底間の直交条件を表している。

なお、ラティスマデル式の表現 [6] を用いれば、 I_2 を (2×2) の単位行列、 J_2 を要素が1の反対角行列 (2×2) として、式(1)は以下のように表される。

$$S_0 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$T_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & J_2 \\ I_2 & -J_2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

同様に、

$$D = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

としたとき、式 (2) ~ (7) は以下の式に等価となる。

$$T_4^t \cdot D \cdot T_4 = J_4 \quad (12)$$

一方、4次元の単位行列 I_4 に回転操作を加えることにより、2列と3列の間を垂直な対称軸とし、 (2×2) の対角行列を対称に配置した基本対称行列 E_4 を生成することができる。ここで、1行と2行は偶対称成分、3行と4行は奇対称成分に対応する。

$$E_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

基本対称行列 E_4 に一定の変形操作を加えることにより、対称性のあるすべての4次元正規直交基底 T_4 を生成することができる。

2.2 E_4 の対称性を保存する列の操作

すべての正規直交基底を表しうる T_4 を生成するためには、回転のように連続性のある変形操作を加える必要があるが、その解は無限に存在する。そこで、基本対称行列 E_4 の対称性と直交性、ノルム1の3条件を保存する有限な列の操作について検討する [14]。

一般に列の入れ替えは、4次元直交空間の座標軸の置換操作に対応し、4次の有限な対称群（置換群） $S(4)$ を構成する [15][16]。 $S(4)$ における置換の総数、すなわち位数は $4! = 24$ となるが、必ずしも式 (2) ~ (7) の条件を満たすとは限らない。

2列と3列の間を対称軸とする列の置換は、列の番号を $x_1 \sim x_4$ として、4次の対称式 f_4 が不変となる条件を満たす必要がある [11]。

$$f_4 = x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \quad (14)$$

例えば、1列 (x_1) と2列 (x_2)、3列 (x_3) と4列 (x_4) の置換を同時に行っても、式の形は不変となり、式 (2) ~ (7) を満たすことは明らかである。

対称式 f_4 を満たす置換は表1に示すように $2! \cdot 2! = 8$ 個存在し、対称群を構成する。本稿では、これを対称置換群 G_σ と呼ぶことにする。ここで $\sigma_0 \sim \sigma_3$ は偶置換、 $\sigma_4 \sim \sigma_7$ は奇置換であり、 σ_0 は恒等置換、 σ_4 および σ_5 は互換となる。また $\sigma_n^{-1} = \sigma_n$ ($n = 0, 1, \dots, 5$) が成立し、 $\sigma_6^{-1} = \sigma_7$ 、 $\sigma_7^{-1} = \sigma_6$ となる。

置換 σ_n を (4×4) の行列 T_{σ_n} ($n = 0, 1, \dots, 7$) を用いて表すこともできる。このとき、 $T_{\sigma_n}^{-1} = T_{\sigma_n}^t$ より直交行列（実ユニタリ行列）となる。この行列 T_{σ_n} を用いて、列の置換を $E_4 \cdot T_{\sigma_n}$ のように表すことができるが、基本対称行列 E_4 の

表1 E_4 の列に関する対称置換群 G_σ

列置換	x_1	x_2	x_3	x_4	互換表現 (一例)	
偶置換	σ_0	1	2	3	4	恒等置換
	σ_1	2	1	4	3	(1,2)(3,4)
	σ_2	3	4	1	2	(1,3)(2,4)
	σ_3	4	3	2	1	(1,4)(2,3)
奇置換	σ_4	1	3	2	4	互換 (2,3)
	σ_5	4	2	3	1	互換 (1,4)
	σ_6	2	4	1	3	(1,3)(2,4)(1,4)
	σ_7	3	1	4	2	(1,2)(3,4)(1,4)

右から T_{σ_n} を乗じるので、これらの操作を右基本変形と呼ぶことにする。

これらの置換の組み合わせ（積）を表形式にまとめた群表を表2に示す。これより、置換の積 ($\sigma_m \sigma_n$) は行列の積 ($T_{\sigma_m} T_{\sigma_n}$) と同様非可換となることが分かる。

表2 対称置換群 G_σ の群表

	右 \ 左	偶置換				奇置換			
		σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7
偶置換	σ_0 (1, 2, 3, 4)	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7
	σ_1 (2, 1, 4, 3)	σ_1	σ_0	σ_3	σ_2	σ_6	σ_7	σ_4	σ_5
	σ_2 (3, 4, 1, 2)	σ_2	σ_3	σ_0	σ_1	σ_7	σ_6	σ_5	σ_4
	σ_3 (4, 3, 2, 1)	σ_3	σ_2	σ_1	σ_0	σ_5	σ_4	σ_7	σ_6
奇置換	σ_4 (1, 3, 2, 4)	σ_4	σ_7	σ_6	σ_5	σ_0	σ_3	σ_2	σ_1
	σ_5 (4, 2, 3, 1)	σ_5	σ_6	σ_7	σ_4	σ_3	σ_0	σ_1	σ_2
	σ_6 (2, 4, 1, 3)	σ_6	σ_5	σ_4	σ_7	σ_1	σ_2	σ_3	σ_0
	σ_7 (3, 1, 4, 2)	σ_7	σ_4	σ_5	σ_6	σ_2	σ_1	σ_0	σ_3

2.3 E_4 の対称性を保存する符号反転

前節では、4次の対称式 f_4 を不変とする列の置換について検討したが、この条件を満たすのは置換だけではない。例えば2列の x_2 と3列の x_3 の符号 (\pm) を同時に反転しても、式の形は変わらない。ここで、表3に示すように単位元に相当する操作 $\rho_0(+, +, +, +)$ を基準として、対称な列の符号 (\pm) を反転する操作 ρ_1, ρ_2, ρ_3 を定義する。このとき、 $\rho_0 \sim \rho_3$ の間に乗算を定義することができ、例えば以下のような関係が成立する。

$$\rho_1 \cdot \rho_2 = \rho_2 \cdot \rho_1 = \rho_3 \quad (15)$$

すなわち、前節の置換と同様対称群を構成し、これを符号反転群 G_ρ と呼ぶことにする。

表3 E_4 の列に関する符号反転群 G_ρ の群表

右 \ 左	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3
ρ_0 (+, +, +, +)	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3
ρ_1 (+, -, -, +)	ρ_1	ρ_0	ρ_3	ρ_2
ρ_2 (-, +, +, -)	ρ_2	ρ_3	ρ_0	ρ_1
ρ_3 (-, -, -, -)	ρ_3	ρ_2	ρ_1	ρ_0

置換と同様、符号反転群 G_ρ の元を (4×4) の直交行列を用いて表すこともできる。例えば、 ρ_1 の場合、 (4×4) の単位行列 I_4 の2列と3列の対角項を -1 としたものに等しい。なお、 σ_4, σ_5 は E_4 の列の値を入れ替えるのに対し、 ρ_1, ρ_2, ρ_3 は列の値を変えずに \pm の符号を反転させる操作となり、その積は可換となる。

2.4 対称置換・符号反転群 G

対称な列の置換 $\sigma_0 \sim \sigma_7$ は位数 8 の対称置換群 G_σ を、対称な符号反転 $\rho_0 \sim \rho_3$ は位数 4 の符号反転群 G_ρ を構成する。これらは、いずれも対称な成分をもつ (4×4) の直交行列で表すことができ、その間に乗算を定義することができる。なお、 σ と ρ の積については、

$$\sigma_1 \cdot \rho_1 = \rho_2 \cdot \sigma_1 \quad (16)$$

$$\sigma_1 \cdot \rho_2 = \rho_1 \cdot \sigma_1 \quad (17)$$

$$\sigma_2 \cdot \rho_1 = \rho_2 \cdot \sigma_2 \quad (18)$$

$$\sigma_2 \cdot \rho_2 = \rho_1 \cdot \sigma_2 \quad (19)$$

$$\sigma_6 \cdot \rho_1 = \rho_2 \cdot \sigma_6 \quad (20)$$

$$\sigma_6 \cdot \rho_2 = \rho_1 \cdot \sigma_6 \quad (21)$$

$$\sigma_7 \cdot \rho_1 = \rho_2 \cdot \sigma_7 \quad (22)$$

$$\sigma_7 \cdot \rho_2 = \rho_1 \cdot \sigma_7 \quad (23)$$

のように非可換となる。

これらの組み合わせは 32 通りあり、直積 $[G_\sigma \times G_\rho]$ と呼ばれる位数 32 の対称群を構成する。本稿では、これを対称置換・符号反転群 G と呼ぶことにする。

2.5 対称置換・符号反転群 G の正規部分群 H

対称置換・符号反転群 G の構造を明らかにするため、その部分群とそれらの性質について検討する。

G には自明でない真の部分群が複数存在する。その中で最大となるのは位数 16、指数 2 の正規部分群 H_{16} であり、その元はすべて偶置換の $\sigma_0 \sim \sigma_3$ の項を含み、非可換となる。

更に、 G には位数 8、指数 4 の正規部分群が 2 つ存在するが、その中の H_8 は表 5 の群表に示すように可換となり、連続な回転群へと拡張することができる。

表 5 G の正規部分群 H_8 の群表

右 \ 左	$\sigma_0\rho_0$	$\sigma_0\rho_3$	$\sigma_1\rho_1$	$\sigma_1\rho_2$	$\sigma_2\rho_1$	$\sigma_2\rho_2$	$\sigma_3\rho_0$	$\sigma_3\rho_3$
$\sigma_0\rho_0$	$\sigma_0\rho_0$	$\sigma_0\rho_3$	$\sigma_1\rho_1$	$\sigma_1\rho_2$	$\sigma_2\rho_1$	$\sigma_2\rho_2$	$\sigma_3\rho_0$	$\sigma_3\rho_3$
$\sigma_0\rho_3$	$\sigma_0\rho_3$	$\sigma_0\rho_0$	$\sigma_1\rho_2$	$\sigma_1\rho_1$	$\sigma_2\rho_2$	$\sigma_2\rho_1$	$\sigma_3\rho_3$	$\sigma_3\rho_0$
$\sigma_1\rho_1$	$\sigma_1\rho_1$	$\sigma_1\rho_2$	$\sigma_0\rho_3$	$\sigma_0\rho_0$	$\sigma_3\rho_3$	$\sigma_3\rho_0$	$\sigma_2\rho_1$	$\sigma_2\rho_2$
$\sigma_1\rho_2$	$\sigma_1\rho_2$	$\sigma_1\rho_1$	$\sigma_0\rho_0$	$\sigma_0\rho_3$	$\sigma_3\rho_0$	$\sigma_3\rho_3$	$\sigma_2\rho_2$	$\sigma_2\rho_1$
$\sigma_2\rho_1$	$\sigma_2\rho_1$	$\sigma_2\rho_2$	$\sigma_3\rho_3$	$\sigma_3\rho_0$	$\sigma_0\rho_3$	$\sigma_0\rho_0$	$\sigma_1\rho_1$	$\sigma_1\rho_2$
$\sigma_2\rho_2$	$\sigma_2\rho_2$	$\sigma_2\rho_1$	$\sigma_3\rho_0$	$\sigma_3\rho_3$	$\sigma_0\rho_0$	$\sigma_0\rho_3$	$\sigma_1\rho_2$	$\sigma_1\rho_1$
$\sigma_3\rho_0$	$\sigma_3\rho_0$	$\sigma_3\rho_3$	$\sigma_2\rho_1$	$\sigma_2\rho_2$	$\sigma_1\rho_1$	$\sigma_1\rho_2$	$\sigma_0\rho_0$	$\sigma_0\rho_3$
$\sigma_3\rho_3$	$\sigma_3\rho_3$	$\sigma_3\rho_0$	$\sigma_2\rho_2$	$\sigma_2\rho_1$	$\sigma_1\rho_2$	$\sigma_1\rho_1$	$\sigma_0\rho_3$	$\sigma_0\rho_0$

2.6 正規部分群 H_8 を法とする剰余類 $C_0 \sim C_3$ による類別

対称群の性質から、 H_8 を用いて、 G の元を互いに共通する元をもたない 4 つの類 $C_0 \sim C_3$ に類別することができる [15]。すなわち、

$$G = C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3 \quad (24)$$

$$C_j \cap C_k = \emptyset \quad (j \neq k) \quad (25)$$

となる $C_0 \sim C_3$ が存在し、その位数は表 6 に示すようにすべて 8 となる。ここで、 $C_0 \sim C_3$ は G の正規部分群 H_8 を法とする剰余類（左剰余類および右剰余類）に相当し、

表 6 G の元の C_0, C_1, C_2, C_3 による類別

		σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7
ρ_0	類	$\sigma_0\rho_0$ C_0	$\sigma_1\rho_0$ C_1	$\sigma_2\rho_0$ C_1	$\sigma_3\rho_0$ C_0	$\sigma_4\rho_0$ C_2	$\sigma_5\rho_0$ C_2	$\sigma_6\rho_0$ C_3	$\sigma_7\rho_0$ C_3
ρ_1	類	$\sigma_0\rho_1$ C_1	$\sigma_1\rho_1$ C_0	$\sigma_2\rho_1$ C_0	$\sigma_3\rho_1$ C_1	$\sigma_4\rho_1$ C_3	$\sigma_5\rho_1$ C_3	$\sigma_6\rho_1$ C_2	$\sigma_7\rho_1$ C_2
ρ_2	類	$\sigma_0\rho_2$ C_1	$\sigma_1\rho_2$ C_0	$\sigma_2\rho_2$ C_0	$\sigma_3\rho_2$ C_1	$\sigma_4\rho_2$ C_3	$\sigma_5\rho_2$ C_3	$\sigma_6\rho_2$ C_2	$\sigma_7\rho_2$ C_2
ρ_3	類	$\sigma_0\rho_3$ C_0	$\sigma_1\rho_3$ C_1	$\sigma_2\rho_3$ C_1	$\sigma_3\rho_3$ C_0	$\sigma_4\rho_3$ C_2	$\sigma_5\rho_3$ C_2	$\sigma_6\rho_3$ C_3	$\sigma_7\rho_3$ C_3

$$C_0 = (\sigma_0 \cdot \rho_0) \cdot H_8 = H_8 \cdot (\sigma_0 \cdot \rho_0) = H_8 \quad (26)$$

$$C_1 = g_1 \cdot H_8 = H_8 \cdot g_1 \quad (g_1 \in C_1) \quad (27)$$

$$C_2 = g_2 \cdot H_8 = H_8 \cdot g_2 \quad (g_2 \in C_2) \quad (28)$$

$$C_3 = g_3 \cdot H_8 = H_8 \cdot g_3 \quad (g_3 \in C_3) \quad (29)$$

のように表すことができる。

次に、この有限な正規部分群 H_8 を、連続群の中の位相群に位置付けられる 4 次の特殊直交群 $SO(4)$ の対称な部分群へと拡張する。

正規部分群の H_8 のすべての元は、それぞれ列に関する対称な回転操作の対を表す $R_1(\theta)$ および $R_2(\phi)$ により表現することができ、これを対称回転対と呼ぶことにする。

$$R_1(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$R_2(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi & 0 \\ 0 & \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (31)$$

連続な実変数である θ, ϕ は回転角に対応し、これらの回転の積 $R_1(\theta) \cdot R_2(\phi)$ は可換となる。この対称回転対 $R_1(\theta), R_2(\phi)$ を用いて、剰余類 $C_0 \sim C_3$ を拡張した 4 つのモデルを定義する。この各モデルにおいて、表 7, 8 に示す $0, \pm \frac{\pi}{2}, \pi$ の回転角を与えることにより、 G のすべての元を表すことができる。

2.7 対称回転対を用いた基本回転モデル

対称回転対 R_1, R_2 の回転パラメータ θ, ϕ を連続量とみなすことにより、剰余類 $C_0 \sim C_3$ に対応する 4 つの基本回転モデル I~IV を定義する。

表 4 4次元における対称置換群と符号反転群の直積 $[G_\sigma \times G_\rho]$

対称置換群 G_σ		符号反転群 G_ρ			
		ρ_0 (+, +, +, +)	ρ_1 (+, -, -, +)	ρ_2 (-, +, +, -)	ρ_3 (-, -, -, -)
偶置換	$\sigma_0(1, 2, 3, 4)$	1, 2, 3, 4	1, -2, -3, 4	-1, 2, 3, -4	-1, -2, -3, -4
	$\sigma_1(2, 1, 4, 3)$	2, 1, 4, 3	2, -1, -4, 3	-2, 1, 4, -3	-2, -1, -4, -3
	$\sigma_2(3, 4, 1, 2)$	3, 4, 1, 2	3, -4, -1, 2	-3, 4, 1, -2	-3, -4, -1, -2
奇置換	$\sigma_3(4, 3, 2, 1)$	4, 3, 2, 1	4, -3, -2, 1	-4, 3, 2, -1	-4, -3, -2, -1
	$\sigma_4(1, 3, 2, 4)$	1, 3, 2, 4	1, -3, -2, 4	-1, 3, 2, -4	-1, -3, -2, -4
	$\sigma_5(4, 2, 3, 1)$	4, 2, 3, 1	4, -2, -3, 1	-4, 2, 3, -1	-4, -2, -3, -1
	$\sigma_6(2, 4, 1, 3)$	2, 4, 1, 3	2, -4, -1, 3	-2, 4, 1, -3	-2, -4, -1, -3
	$\sigma_7(3, 1, 4, 2)$	3, 1, 4, 2	3, -1, -4, 2	-3, 1, 4, -2	-3, -1, -4, -2

表 7 対称置換・符号反転群 G の対称回転対による表現 (左剰余類)

回転角		$C_0 = H_8$ $R_1(\theta)R_2(\phi)$	左剰余類 C_1 $\rho_1 R_1(\theta)R_2(\phi)$	左剰余類 C_2 $\sigma_4 R_1(\theta)R_2(\phi)$	左剰余類 C_3 $\sigma_4 \rho_1 R_1(\theta)R_2(\phi)$
θ	ϕ				
0	0	$\sigma_0 \rho_0$	$\sigma_0 \rho_1$	$\sigma_4 \rho_0$	$\sigma_4 \rho_1$
	$\frac{\pi}{2}$	$\sigma_2 \rho_1$	$\sigma_2 \rho_3$	$\sigma_7 \rho_1$	$\sigma_7 \rho_3$
	$-\frac{\pi}{2}$	$\sigma_2 \rho_2$	$\sigma_2 \rho_0$	$\sigma_7 \rho_2$	$\sigma_7 \rho_0$
	π	$\sigma_0 \rho_3$	$\sigma_0 \rho_2$	$\sigma_4 \rho_3$	$\sigma_4 \rho_2$
$\frac{\pi}{2}$	0	$\sigma_1 \rho_1$	$\sigma_1 \rho_3$	$\sigma_6 \rho_1$	$\sigma_6 \rho_3$
	$\frac{\pi}{2}$	$\sigma_3 \rho_3$	$\sigma_3 \rho_2$	$\sigma_5 \rho_3$	$\sigma_5 \rho_2$
	$-\frac{\pi}{2}$	$\sigma_3 \rho_0$	$\sigma_3 \rho_1$	$\sigma_5 \rho_0$	$\sigma_5 \rho_1$
	π	$\sigma_1 \rho_2$	$\sigma_1 \rho_0$	$\sigma_6 \rho_2$	$\sigma_6 \rho_0$
$-\frac{\pi}{2}$	0	$\sigma_1 \rho_2$	$\sigma_1 \rho_0$	$\sigma_6 \rho_2$	$\sigma_6 \rho_0$
	$\frac{\pi}{2}$	$\sigma_3 \rho_0$	$\sigma_3 \rho_1$	$\sigma_5 \rho_0$	$\sigma_5 \rho_1$
	$-\frac{\pi}{2}$	$\sigma_3 \rho_3$	$\sigma_3 \rho_2$	$\sigma_5 \rho_3$	$\sigma_5 \rho_2$
	π	$\sigma_1 \rho_1$	$\sigma_1 \rho_3$	$\sigma_6 \rho_1$	$\sigma_6 \rho_3$
π	0	$\sigma_0 \rho_3$	$\sigma_0 \rho_2$	$\sigma_4 \rho_3$	$\sigma_4 \rho_2$
	$\frac{\pi}{2}$	$\sigma_2 \rho_2$	$\sigma_2 \rho_0$	$\sigma_7 \rho_2$	$\sigma_7 \rho_0$
	$-\frac{\pi}{2}$	$\sigma_2 \rho_1$	$\sigma_2 \rho_3$	$\sigma_7 \rho_1$	$\sigma_7 \rho_3$
	π	$\sigma_0 \rho_0$	$\sigma_0 \rho_1$	$\sigma_4 \rho_0$	$\sigma_4 \rho_1$

表 8 対称置換・符号反転群 G の対称回転対による表現 (右剰余類)

回転角		$C_0 = H_8$ $R_1(\theta)R_2(\phi)$	右剰余類 C_1 $R_1(\theta)R_2(\phi)\rho_1$	右剰余類 C_2 $R_1(\theta)R_2(\phi)\sigma_4$	右剰余類 C_3 $R_1(\theta)R_2(\phi)\sigma_4\rho_1$
θ	ϕ				
0	0	$\sigma_0 \rho_0$	$\sigma_0 \rho_1$	$\sigma_4 \rho_0$	$\sigma_4 \rho_1$
	$\frac{\pi}{2}$	$\sigma_2 \rho_1$	$\sigma_2 \rho_0$	$\sigma_6 \rho_1$	$\sigma_6 \rho_0$
	$-\frac{\pi}{2}$	$\sigma_2 \rho_2$	$\sigma_2 \rho_3$	$\sigma_6 \rho_2$	$\sigma_6 \rho_3$
	π	$\sigma_0 \rho_3$	$\sigma_0 \rho_2$	$\sigma_4 \rho_3$	$\sigma_4 \rho_2$
$\frac{\pi}{2}$	0	$\sigma_1 \rho_1$	$\sigma_1 \rho_0$	$\sigma_7 \rho_1$	$\sigma_7 \rho_0$
	$\frac{\pi}{2}$	$\sigma_3 \rho_3$	$\sigma_3 \rho_2$	$\sigma_5 \rho_3$	$\sigma_5 \rho_2$
	$-\frac{\pi}{2}$	$\sigma_3 \rho_0$	$\sigma_3 \rho_1$	$\sigma_5 \rho_0$	$\sigma_5 \rho_1$
	π	$\sigma_1 \rho_2$	$\sigma_1 \rho_3$	$\sigma_7 \rho_2$	$\sigma_7 \rho_3$
$-\frac{\pi}{2}$	0	$\sigma_1 \rho_2$	$\sigma_1 \rho_3$	$\sigma_7 \rho_2$	$\sigma_7 \rho_3$
	$\frac{\pi}{2}$	$\sigma_3 \rho_0$	$\sigma_3 \rho_1$	$\sigma_5 \rho_0$	$\sigma_5 \rho_1$
	$-\frac{\pi}{2}$	$\sigma_3 \rho_3$	$\sigma_3 \rho_2$	$\sigma_5 \rho_3$	$\sigma_5 \rho_2$
	π	$\sigma_1 \rho_1$	$\sigma_1 \rho_0$	$\sigma_7 \rho_1$	$\sigma_7 \rho_0$
π	0	$\sigma_0 \rho_3$	$\sigma_0 \rho_2$	$\sigma_4 \rho_3$	$\sigma_4 \rho_2$
	$\frac{\pi}{2}$	$\sigma_2 \rho_2$	$\sigma_2 \rho_3$	$\sigma_6 \rho_2$	$\sigma_6 \rho_3$
	$-\frac{\pi}{2}$	$\sigma_2 \rho_1$	$\sigma_2 \rho_0$	$\sigma_6 \rho_1$	$\sigma_6 \rho_0$
	π	$\sigma_0 \rho_0$	$\sigma_0 \rho_1$	$\sigma_4 \rho_0$	$\sigma_4 \rho_1$

2.7.1 基本回転モデル I ($H_8 = C_0$)

基準となる回転モデルであり、連続な回転パラメータを用いた $E_4 R_1(\theta) R_2(\phi)$ で表される。

2.7.2 基本回転モデル II (C_1)

剰余類 C_1 に対応する基本回転モデルには様々なバリエーションが存在するが、例えば $\rho_1 \in C_1$ の左剰余類を用いると、 $E_4 \rho_1 R_1(\theta) R_2(\phi)$ になる。

2.7.3 基本回転モデル III (C_2)

剰余類 C_2 に対応する基本回転モデルは、例えば $\sigma_4 \in C_2$ の左剰余類を用いると、 $E_4 \sigma_4 R_1(\theta) R_2(\phi)$ となる。

2.7.4 基本回転モデル IV (C_3)

剰余類 C_3 に対応する基本回転モデルは、 $\sigma_4 \rho_1 \in C_3$ の左剰余類を用いると、 $E_4 \sigma_4 \rho_1 R_1(\theta) R_2(\phi)$ により表される。

なお、表 8 の右剰余類を用いることにより、基本回転モデル II~IV を表現することもできる。

ここで、基本回転モデルの I と II は、特殊直交群 $SO(4)$

の対称な部分群であり、基本回転モデルの I~IV は、直交群 $O(4)$ の対称な部分群に相当する [14]。

2.8 基本回転モデルの等価変換

基本回転モデルの構成要素である $R_1(\theta)$, $R_2(\phi)$, ρ_1 , ρ_2 , σ_4 は、 E_4 に関する右基本変形に属するが、これらについて図 1 に示す等価変換規則が成立する。

この規則を次々に適用することより、基本回転モデルの I~IV はすべて、 E_4 に関する左基本変形のみで表すことが可能となる。

3 4次元一般化 LOT の回転モデル

本章では、4次元一般化 LOT の回転モデルの構成法について述べる。

3.1 4次元 LOT (4×8) の構成法

前章では、基本対称行列 E_4 の 4 つの列について、右基本変形に相当する 4 種類の操作を加えることにより、①対称性、

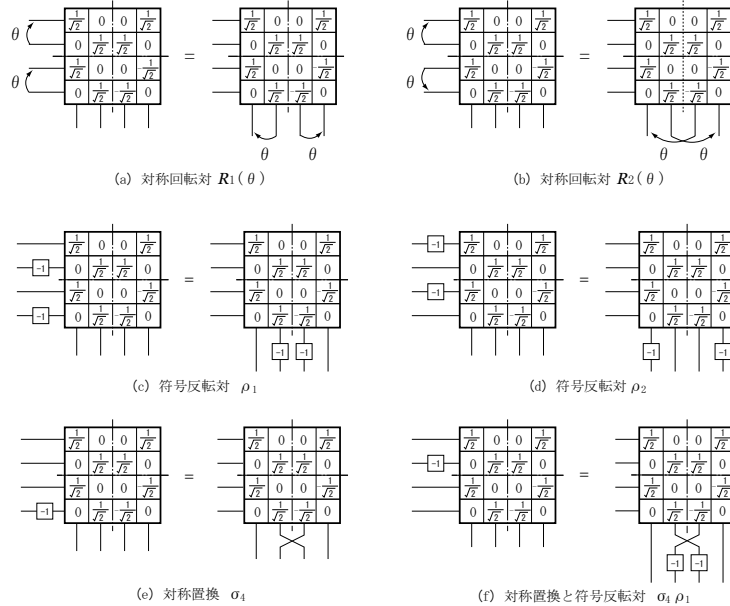


図1 基本対称行列 E_4 における等価変換規則

②直交性, ③ノルム 1 の 3 条件を満たすすべての正規直交基底が生成できることを示した。

上記の基底に対し同様の操作を半ブロック, すなわち 2 列分シフトさせて適用することにより, 直交基底の長さが 2 ブロックの 8 列に拡張され, 上記 3 条件を満たす LOT(4×8) のすべての基底が生成される [13]. 前節で示した第 1 ステージにおける 4 種類の操作 (I~IV) のそれぞれについて, 第 2 ステージ (I~IV) の回転操作を加えるため, 回転モデルは (I-I)~(IV-IV) の 16 種類となる. 図 2(a) にモデル (I-I), 図 2(b) に (III-III) の例を示す. ここでは右剰余類による表現を用いているが, 左剰余類で表すこともできる.

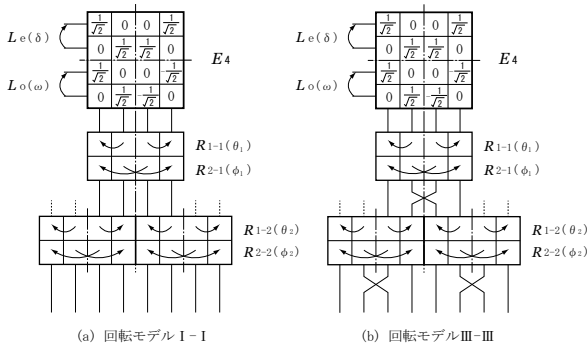


図2 LOT(4×8) の回転モデル (I-I) および (III-III)

3.2 ステージ間の等価変換規則

回転操作の R_1 と R_2 の積が可換となる性質を用いて, 例えば図 2(a) 第 2 ステージの $R_{1-2}(\theta_2)$ を第 1 ステージに移動し, $R_{1-1}(\theta_1)$ に吸収させることができる. このとき, それらの回転の向きが逆になるため, $R_{1-1}(\theta_1 - \theta_2)$ で表され, そ

の角度を新たに θ_1 と定義することにより, パラメータの θ_2 を省略することができる. 一方の図 2(b) の場合, 各ステージのクロス部に相当する σ_4 を乗り越えて, R_1 や R_2 の位置を移動させることができる. 例えば, 第 2 ステージの $R_{1-2}(\theta_2)$ は σ_4 との位置を交換すると, R_2 に等価な操作となり, 第 1 ステージの $R_{2-1}(\phi_1)$ に吸収される. これより, θ_2 は冗長なパラメータであることが分かる. 前章で示したように, 第 1 ステージの操作は, すべて左基本変形で表すことができるので, LOT(4×8) の最小のパラメータは, 最終的に第 2 ステージの ϕ_2 と左基本変形の δ と ω の計 3 つになる [13].

このようにステージ間には冗長な操作が存在し, 不要な回転パラメータを整理・統合することができる. このとき, 以下に示す等価変換規則が成立する.

$$R_1(\theta)\rho_1 = \rho_1 R_1(-\theta) \quad (32)$$

$$R_2(\theta)\rho_1 = \rho_1 R_2(-\theta) \quad (33)$$

$$R_1(\theta)\sigma_4 = \sigma_4 R_2(\theta) \quad (34)$$

$$R_2(\theta)\sigma_4 = \sigma_4 R_1(\theta) \quad (35)$$

これらを図示すると, 図 3 のようになる.

3.3 符号化ゲインに関する等価変換規則

LOT をはじめとする直交変換の符号化効率を評価する尺度として, 符号化ゲインが広く用いられている. その定義から明らかなように, 直交変換の基底の置換や \pm の符号反転, 鏡映等の操作を行っても, 符号化ゲインの値は変わらない [13].

図 1 に示した基本対称行列 E_4 に対する等価変換規則と, 式 (32)~(35) に示したステージ間の等価変換規則を統合する

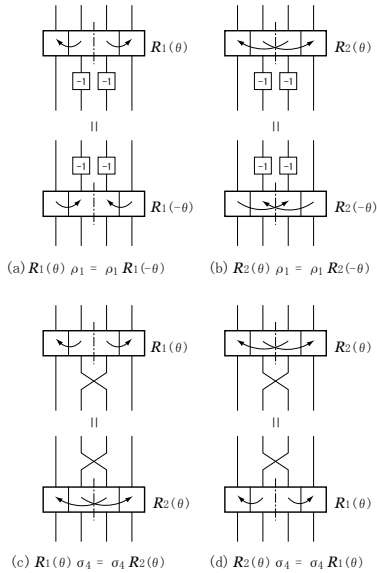


図3 ステージ間の等価変換規則

ことにより，符号化ゲインの最大値を不変とする等価変換規則を導くことができる．

例えば，第2ステージの ρ_1 を第1ステージに移動させると， ρ_2 に等価となり，最終的に左基本変形に集約することが可能となる．同時に，第1ステージの操作はすべて左基本変形に吸収されるので，回転モデルのIとIIでは，その符号化ゲインの最大値が等しくなることが分かる．この関係は，回転モデルのIIIとIVについても成立し，以下の等価変換規則が導かれる．

$$I \Leftrightarrow II \quad (36)$$

$$III \Leftrightarrow IV \quad (37)$$

3.4 LOT 回転モデル (4 × 8) の分類

前節で示したように，LOT(4 × 8) の回転モデルは全部で16種類あるが，符号化ゲインに関する等価変換規則 (32) ~ (35) から，実質的に2つのグループに分類されることが分かる．符号化ゲインが最大となるパラメータの探索は，基本的にこのグループを代表する2種類の回転モデルに対して行えばよい．

実際に，第1ステージがIのすべての(4 × 8)モデルについて，符号化ゲインが最大となる回転パラメータの最適解をシミュレーションにより求めた．自己相関係数 $\rho = 0.95$ としたときの値を表9に示す．これより，第2ステージがIとIIの8種のモデルについては①7.960(dB)，IIIとIVの8種のモデルについては②7.782(dB)の2つのグループに分類され，第1ステージの操作には依存しないことを確認した．なお，第1ステージがII, III, IVの場合， L_e, L_o の回転角 δ, ω の値が

反転することがあるが，符号化ゲインや R_{2-2} の回転角 θ_2 の値は変化しない．

表9 一般化 LOT(4 × 8) の最適解 (2グループ)

構成	最適パラメータ			符号化ゲインの最大値 (第1ステージIのとき)
	第2ステージ	R_{2-2}	L_e	
I	α_1	α_2	α_3	7.960(dB)
II	$-\alpha_1$	$-\alpha_2$	$-\alpha_3$	
III	β_1	β_2	β_3	7.782(dB)
IV	$-\beta_1$	$-\beta_2$	$-\beta_3$	

$$\alpha_1 = 0.054\pi, \alpha_2 = 0.196\pi, \alpha_3 = -0.202\pi$$

$$\beta_1 = 0.181\pi, \beta_2 = 0.071\pi, \beta_3 = 0.132\pi$$

3.5 一般化 LOT 回転モデル (4 × 12) の構成法

図4に示すように，LOT(4 × 8) の回転モデルに，第3ステージ (I~IV) の回転等の操作を追加することにより，基底長が8から12に拡張され，一般化 LOT(4 × 12) のすべての基底を構成することができる．

その組み合わせは (I-I-I) ~ (IV-IV-IV) の64種類となるが，図4はその中の (III-III-III) を表している．ここでは右剰余類による表現を用いている．なお，従来の回転モデル [13] では，第2ステージ以降がII, III, IVのモデルについては検討されていなかった．

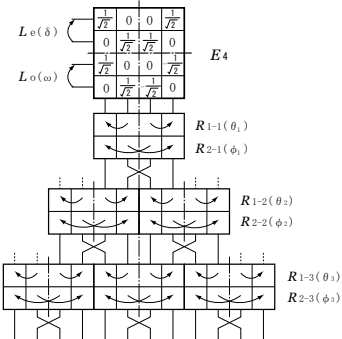


図4 一般化 LOT(4 × 12) の回転モデル (III-III-III)

3.6 一般化 LOT(4 × 12) における符号化ゲインの等価変換規則

図4の一般化 LOT 回転モデル (III-III-III) は，以下の手順により，(I-III-I) の形に等価変換することができる．

1. 第3ステージのクロス部 (σ_4) → 第2ステージ
2. 第2ステージの R_{2-2} → 第3ステージ
3. 第1ステージのクロス部 (σ_4) → 第2ステージ
4. 第2ステージの R_{1-2} → 第1ステージ
5. 第3ステージの R_{2-3} → 第2ステージ

これらの操作の過程を、図 5 に示す．ここで、図 5(a) の第 2 ステージの R_{1-2} は第 1 ステージの R_{2-1} に、第 3 ステージの R_{1-3} は第 2 ステージの R_{2-2} に統合されるので、最終的に第 2 ステージは R_{2-2} 、第 3 ステージは R_{2-3} のみとなる．また、図 5(c) 第 3 ステージの R_{1-3} は R_{2-2} に統合される．同様に、一般化 LOT の回転モデル (I-III-III) は、次のように (III-III-I) の形に等価変換することができる．

1. 第 3 ステージのクロス部 (σ_4) → 第 2 ステージ
2. 第 2 ステージの R_{2-2} → 第 3 ステージ
3. 第 2 ステージのクロス部 (σ_4) → 第 1 ステージ
4. 第 2 ステージの R_{1-2} → 第 1 ステージ
5. 第 3 ステージの R_{2-3} → 第 2 ステージ

これらの操作の過程を図 6 に示す．なお、図 5(a)(c) の第 3 ステージの下位に互換の σ_4 を追加すると、それぞれ図 6 (c) と (a) になることが分かる．

これより、符号化ゲインに関する以下の等価変換規則が導かれる．

$$\text{III} - \text{III} - \text{III} \Leftrightarrow \text{I} - \text{III} - \text{I} \quad (38)$$

$$\text{I} - \text{III} - \text{III} \Leftrightarrow \text{III} - \text{III} - \text{I} \quad (39)$$

なお、 (4×12) の一般化 LOT では、最終的に $R_{2-2}(\phi_2)$ 、 $R_{2-3}(\phi_3)$ 、 $L_e(\delta)$ 、 $L_o(\omega)$ の 4 つのパラメータに統合される．

次に一般化 LOT(4×12) について、符号化ゲインが最大となる回転パラメータの最適解をシミュレーションにより求めた．その結果を表 10 に示す．なお、第 1 ステージは I としている．これより、符号化ゲインは、①8.214(dB)、②8.067(dB)、③8.014(dB) の 3 つのグループに分類されることを確認した．第 1 ステージは任意のため、第 2 ステージが III あるいは IV のすべてのモデルは、(32)~(35) の規則により 1 つのグループ③に統合されている．

表 10 一般化 LOT(4×12) の最適解 (3 グループ)

ステージ	最適パラメータ				符号化ゲインの最大値 (第 1 ステージ I のとき)		
	第 2	第 3	R_{2-2}	R_{2-3}		L_e	L_o
I	I		α_1	α_2	α_3	α_4	8.214(dB) $\alpha_1 = 0.074\pi, \alpha_2 = -0.121\pi$ $\alpha_3 = 0.060\pi, \alpha_4 = -0.074\pi$
	II		$-\alpha_1$	$-\alpha_2$	$-\alpha_3$	$-\alpha_4$	
II	I		$-\alpha_1$	α_2	$-\alpha_3$	$-\alpha_4$	
	II		α_1	$-\alpha_2$	α_3	α_4	
I	III		β_1	β_2	β_3	β_4	8.067(dB) $\beta_1 = 0.067\pi, \beta_2 = -0.031\pi$ $\beta_3 = 0.156\pi, \beta_4 = 0.128\pi$
	IV		$-\beta_1$	$-\beta_2$	$-\beta_3$	$-\beta_4$	
II	III		$-\beta_1$	β_2	$-\beta_3$	$-\beta_4$	
	IV		β_1	$-\beta_2$	β_3	β_4	
III	I		γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	8.014(dB) $\gamma_1 = 0.016\pi, \gamma_2 = -0.151\pi$ $\gamma_3 = 0.089\pi, \gamma_4 = 0.034\pi$
	II		$-\gamma_1$	$-\gamma_2$	$-\gamma_3$	$-\gamma_4$	
	III		$-\gamma_2$	$-\gamma_1$	γ_3	$-\gamma_4$	
	IV		γ_2	γ_1	$-\gamma_3$	γ_4	
IV	I		$-\gamma_1$	γ_2	$-\gamma_3$	$-\gamma_4$	
	II		γ_1	$-\gamma_2$	γ_3	γ_4	
	III		γ_2	$-\gamma_1$	$-\gamma_3$	γ_4	
	IV		$-\gamma_2$	γ_1	γ_3	$-\gamma_4$	

3.7 一般化 LOT 回転モデル (4×16) の構成法とその分類

図 7 に示すように、 (4×12) の回転モデルに、第 4 ステージ (I~IV) の回転操作を追加することにより、基底長が 12 から 16 に拡張され、一般化 LOT(4×16) のすべての基底を構成することができる．

その組み合わせは (I-I-I-I) ~ (IV-IV-IV-IV) の 256 種類となるが、図は (III-III-I-III) を表している．ここでも右剰余類による表現を用いている．

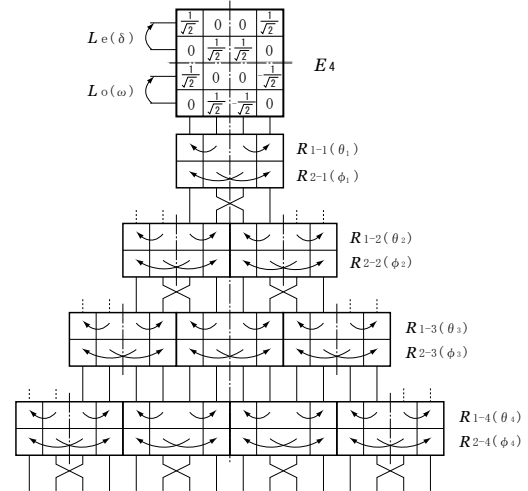


図 7 一般化 LOT(4×16) の回転モデル (III-III-I-III)

前節と同様に、 (4×16) の回転モデルについて、式 (32) ~ (35) の等価変換規則を適用することができる．ここで、(32)(33) は連続する 3 つのステージに適用することができるので、最終的に①(I-I-I-I)、②(I-I-I-III)、③(I-I-II-I-I)、④(I-III-I-I) の各モデルを代表とする 4 つのグループに分類されることが分かる．

(4×16) の一般化 LOT について、符号化ゲインが最大となるパラメータを求めると、表 11 のようになる．ここで第 1 ステージは任意なので、基本の I としている．等価変換の操作により、回転パラメータは、最終的に $R_{2-2}(\theta_2)$ 、 $R_{2-3}(\theta_3)$ 、 $R_{2-4}(\theta_4)$ 、 $L_e(\delta)$ 、 $L_o(\omega)$ の 5 つのパラメータに統合される．

これまで、 (4×8) 、 (4×12) 、 (4×16) の一般化 LOT の回転モデルについて、符号化ゲインの最大値が等しいグループに分類する手法を整理してきたが、ステージ数を 5 以上にした場合についても、(32)~(35) の等価変換規則を適用することにより、ステージ数と同数のグループに分類されることが導かれる．なお、回転パラメータの最適解はその中の 1 つの解について、置換や符号反転を施したものとなる．

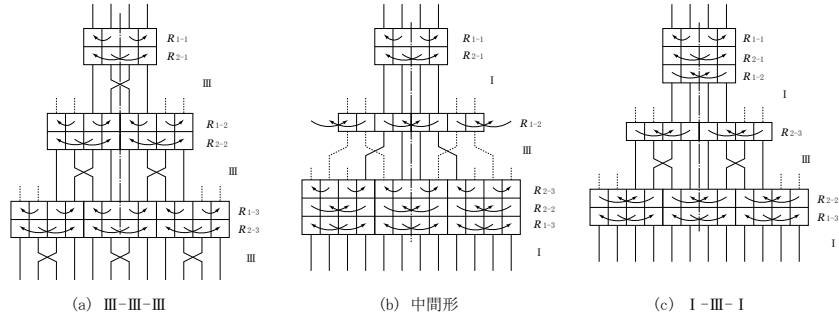


図5 4次元一般化 LOT における符号化ゲインの等価変換規則 (III-III-III \Leftrightarrow I-III-I)

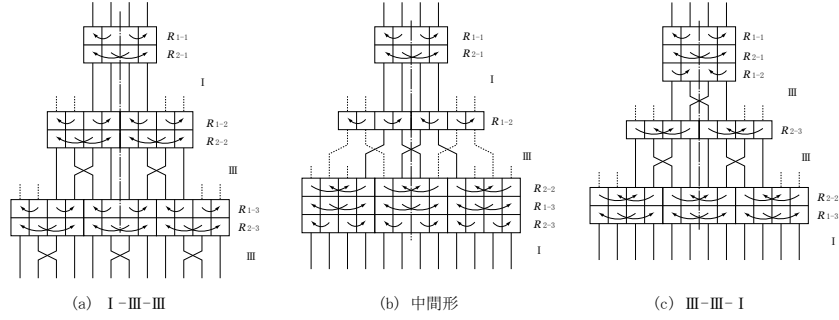


図6 4次元一般化 LOT における符号化ゲインの等価変換規則 (I-III-III \Leftrightarrow III-III-I)

4 6次元正規直交基底の構成法

4.1 正規直交基底の基本対称行列 E_6

6次元 LOT では、以下のように (6×6) の基本対称行列 E_6 を定義する。

$$E_6 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (40)$$

ここで、1~3行は偶対称成分、4~6行は奇対称成分に対応する。次に、 E_6 の対称性と直交性、ノルム1の3条件を保存する有限な列の置換操作について検討する。

4.2 E_6 の列に関する対称置換群 G_σ

6つの元からなる置換群の位数は $6! = 720$ となるが、そのすべてが対称性を保存するとは限らない。そこで3列と4列の間にある対称軸について、 E_6 の対称性を保存する置換群を、以下に示す6次元の対称式から決定する。

$$f_6 = x_1 \cdot x_6 + x_2 \cdot x_5 + x_3 \cdot x_4 \quad (41)$$

この対称置換群 G_σ の位数は表12に示すように48となり、偶置換と奇置換は同数の24となる。なお、偶置換の対称互換

対は $\sigma_1, \dots, \sigma_6$ の6種類、奇置換の互換は $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ の3種類になる。特に対称互換対は、次節以降で求める対称回転対に対応するものであり、各ステージの回転パラメータも同数の6個となる。

4.3 E_6 の列に関する符号反転群 G_ρ

4次元の場合と同様に、 E_6 の列に関する符号反転群 G_ρ を求めると、その位数は $2^3 = 8$ となる。その群表を表13に示す。なお、 G_σ は非可換となるが、この G_ρ は可換である。

4.4 E_6 の対称置換・符号反転群 G_6

対称置換群 G_σ と、符号反転群 G_ρ との直積 G_6 を定義する。この位数は $384(48 \times 8)$ となるが、4次元の場合と同様にして、回転群に拡張可能な正規部分群を抽出することができる。この正規部分群 H の位数は96となり、 G_6 のすべての元はこの H を法とする4つの剰余類 $C_0 \sim C_3$ に類別される。これらを表14に示す。なお、符号の $(\pm), (\mp)$ は複号同順とする。

次に、この有限な正規部分群 H を、連続群の中の位相群に位置付けられる6次の特殊直交群 $SO(6)$ の対称な部分群に拡張する。

正規部分群の H のすべての元は、以下に示す対称回転対 $R_{1a}(\theta), R_{1b}(\theta), R_{2a}(\theta), R_{2b}(\theta), R_3(\theta), R_4(\theta)$ の積の形で表現することができる。

なる．図 8 にモデル (IV-IV) の例を示す．ここでは右剰余類による表現を用いているが，左剰余類で表すこともできる．

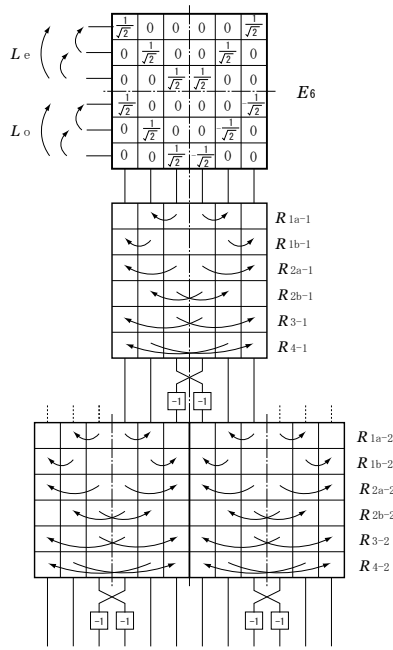


図 8 LOT(6 × 12) の回転モデル (IV-IV)

5.2 LOT(6 × 12) における符号化ゲインの等価変換規則

4次元の場合と同様に， ρ_1 は上のステージに移行できるので，符号化ゲインに関する以下の等価変換規則が成立する．

$$I \Leftrightarrow II \quad (48)$$

$$III \Leftrightarrow IV \quad (49)$$

5.3 6次元一般化 LOT(6 × 18) の構成法

LOT(6 × 12) の回転モデルに，第 3 ステージ (I~IV) の回転等の操作を追加することにより，基底長が 12 から 18 に拡張され，一般化 LOT(6 × 18) のすべての基底を構成することができる．図 9 にその回転モデル (III-I-III) の例を示す．なお，第 3 ステージの $R_{1a-3}, R_{1b-3}, R_{2a-3}$ は，第 2 ステージに移動し， $R_{1a-2}, R_{1b-2}, R_{2a-2}$ に吸収させることができる．更に，第 2 ステージの $R_{1a-2}, R_{1b-2}, R_{2a-2}$ は，それぞれ第 1 ステージの $R_{1b-1}, R_{2b-1}, R_{3-1}$ に等価な回転操作となり，最終的に左基本変形に集約させることが可能となる．これより，最少の回転パラメータは，第 3 ステージの $R_{2b-3}, R_{3-3}, R_{4-3}$ の 3 個，第 2 ステージの $R_{2b-2}, R_{3-2}, R_{4-2}$ の 3 個，左基本変形 L_e の 3 個， L_o の 3 個の計 12 個となる [13]．

5.4 一般化 LOT(6 × 18) における符号化ゲインの等価変換規則

図 9 の回転モデル (III-I-III) について，第 1，第 3 ステージのクロス部 (σ_a) を第 2 ステージに移動すると，図 10 のよ

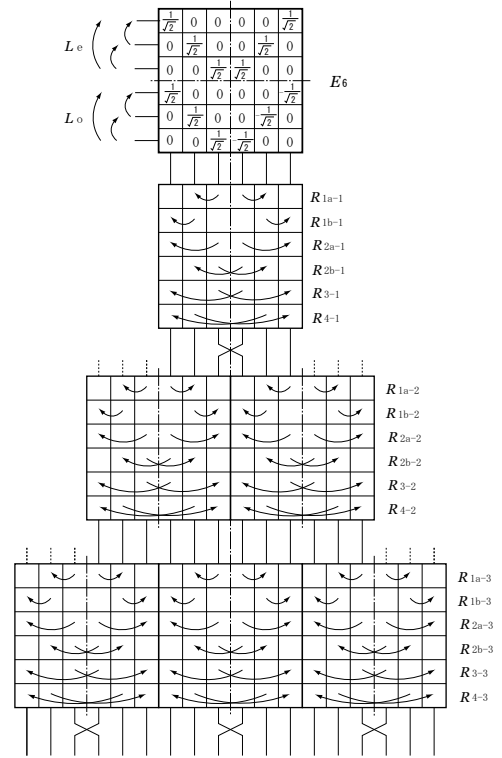


図 9 一般化 LOT(6 × 18) の回転モデル (III-I-III)

うに等価変換される．すなわち第 2 ステージの上下に，1 ブロック (6 列) 分シフトした置換に相当する操作が残り，4次元の場合のようにモデルの (I-I-I) と等価にはならない．

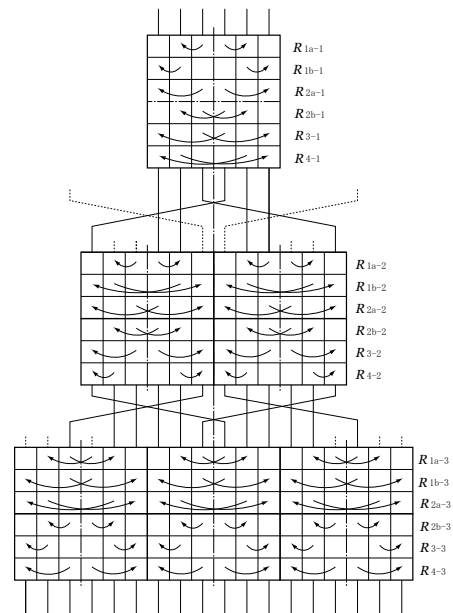


図 10 6次元一般化 LOT における等価変換規則

ここで回転モデル (III-I-III) の右基本変形の部分に，対称回転対の回転角として $0, \pm \frac{\pi}{2}, \pi$ の値を与えたとき，全体で 1248 組のパターンが現れ，これらはモデル (I-I-I) のパター

ンに完全に一致することをシミュレーションにより確認した。これより、モデルの (I-I-I) と (III-I-III) の間に、符号化ゲインに関する等価変換が成立することが示された。なお、これらのモデルにおいて、第 3 ステージの下位に互換の σ_a を追加することにより、モデルの (I-I-III) と (III-I-I) が等価になることが導かれる。

これより、6 次元における符号化ゲインの等価変換規則は以下のようになる。

$$I-I-I \Leftrightarrow III-I-III \quad (50)$$

$$I-I-III \Leftrightarrow III-I-I \quad (51)$$

次に $(6 \times 12) \sim (6 \times 24)$ の一般化 LOT について、符号化ゲインの最大値とそのパラメータをシミュレーションにより求めた。その結果を表 15 に示す。ここで第 1 ステージは任意なので、基本の I としている。符号化ゲインの最大値が (6×12) は 2 つ、 (6×18) は 3 つ、 (6×24) は 4 つのグループに分類され、それらの分類が等価変換規則 (50),(51) に従っていることが分かる。

表 15 6 次元一般化 LOT(6×12) ~ (6×24) の最適解とその分類

基底のサイズ	ステージ			符号化ゲイン最大値 (dB)
	第 2	第 3	第 4	
(6×12)	I (II)			8.854
	III (IV)			8.825
(6×18)	I (II)	I (II)		9.019
		III (IV)		
	III (IV)	I (II)		8.888
		III (IV)		9.005
(6×24)	I (II)	I (II)	I (II)	9.123
		III (IV)	I (II)	
	III (IV)	I (II)	III (IV)	9.107
		III (IV)	III (IV)	
	III (IV)	I (II)	I (II)	9.062
		III (IV)	I (II)	9.035

6 8 次元以上の一般化 LOT の回転モデル

6.1 一般化 LOT の回転モデル

8 次の対称式 f_8 は以下のようになる。

$$f_8 = x_1 x_8 + x_2 x_7 + x_3 x_6 + x_4 x_5 \quad (52)$$

このとき表 16 に示すように、対称置換群 G_σ の位数は 384、符号反転群 G_ρ の位数は 16 であり、その直積となる対称置換・符号反転群 G の位数は 6144 になる。回転群へと拡張可

能な G の正規部分群 H の位数は 1536 で、 H を法とする剰余類の数は 4 になる。同様にして $2n$ 次元の一般化 LOT における G や H の位数が求められるが、いずれも剰余類の数は 4 で、ステージ毎のモデル数も 4 となる。

表 16 一般化 LOT の群の位数とその類別

	次元			
	4	6	8	$2n$
対称置換群 G_σ	8	48	384	$n!2^n$
符号反転群 G_ρ	4	8	16	2^n
対称置換・符号反転群 G	32	384	6144	$n!2^{2n}$
G の正規部分群 H	8	96	1536	$n!2^{2(n-1)}$
列の回転パラメータ数	2	6	12	$n(n-1)$
G の H を法とする剰余類	4			

6.2 符号化ゲインに関する等価変換規則

一般化 LOT の回転モデルにおいて、表 7,8 のように対称回転対の角度を $0, \pm \frac{\pi}{2}, \pi$ に設定したとき、基本対称行列 E の列の並びに関するパターン数を整理すると、表 17 のようになる。なお、当然のことながら第 1 ステージは H の位数に等しくなる。

表 17 角度指定時における回転モデルのパターン数

回転モデル	次元			
	4	6	8	$2n$
第 1 ステージ	8	96	1536	$n!2^{2(n-1)}$
第 2 ステージ	16	384	12288	$n!2^{3(n-1)}$
第 3 ステージ	32	1248	61440	$n!2^{2(n-1)} \sum_{i=1}^n 3^{i-1}$

8 次元の第 3 ステージでは、回転パラメータの組み合わせにより、基本対称行列 E_8 の 8 列の並びは 61440 通りのパターンに変換される。ここでモデルの (I-III-I) と (III-III-III) について、それらのパターンをシミュレーションにより比較したところ、完全に一致することを確認した。これより、これらの符号化ゲインの最大値は等しくなり、4 次元と同じ等価変換規則 (32) ~ (35) が成立することが分かる。

符号化ゲインに関する等価変換規則を表 18 に示す。4(8) 次元と 6 次元の規則を比較すると、I と III を交換した形となっている。なお、10 次元の一般化 LOT については組み合わせの数が多く、その検証は今後の課題となるが、6 次元に一致するものと予想される。

表 18 符号化ゲインに関するステージ間の等価変換規則

次元	等価変換規則			
$4n$ (4・8 次元)	I	\Leftrightarrow	II	I-III-I \Leftrightarrow III-III-III I-III-III \Leftrightarrow III-III-I
$2(2n+1)$ (6 次元)	III	\Leftrightarrow	IV	III-I-III \Leftrightarrow I-I-I III-I-I \Leftrightarrow I-I-III

7 むすび

すべての正規直交基底が表現可能な、直線位相一般化 LOT の回転モデルの構成法を示した。LOT 基底の回転や置換等の操作について、すべての組み合わせを簡潔に記述するため、基本対称行列の列に関する有限な対称置換群と符号反転群を定義し、それらの直積 G から連続な回転群へ拡張可能な正規部分群 H を抽出した。次に G の元を H を法とする 4 つの剰余類に類別し、それらに対応する回転モデルを生成して、ステージ間に存在する冗長な操作を統合する手法を提案した。

この回転モデルは 1 ステージ毎にバリエーションが 4 倍に拡大するため、最適パラメータ探索の効率化が課題となる。そこで、符号化効率の評価尺度として広く用いられる符号化ゲインが、LOT 基底の置換や \pm の符号反転、鏡映等の操作に対し不変となる性質に着目し、4 次元と 6 次元の回転モデルにおいて、その最適値が保存されるステージ間の等価変換規則について検討した。更に、抽出した 4 つの規則を用いて上記回転モデルを整理・統合することにより、ステージ数に等しいグループに分類されることを明らかにした。これにより、一般化 LOT の設計ではステージ数に等しい代表的なモデルについて、最少のパラメータを用いて最適化を行えばよく、探索等の作業量を大幅に低減することが可能となる。

今後の課題は、10 次元以上の一般化 LOT について符号化ゲインの等価変換規則を検証し、本手法を奇数次元に拡張することである。

参考文献

[1] N. Ahmed, T. Natarajan and K.R. Rao, Discrete cosine transform," IEEE Trans. Comput., vol.C-23, pp.90-93, Jan. (1974).
 [2] H.S. Malver and D.H. Staelin, "The LOT: transform coding without blocking effects," IEEE Trans. Acoust., Speech Signal Process., vol.37, no.4, pp.553-559, April (1989).
 [3] H.S. Malver, "Lapped transforms for efficient transform/subband coding," IEEE Trans. Acoust., Speech Signal Process., vol.38, no.6, pp.969-978, June (1990).

[4] M. Vetterli, "A theory of multirate filter banks," IEEE Trans. Acoust., Speech Signal Process., vol.35, no.3, pp.356-372, March (1987).
 [5] M. Vetterli and D.L. Gall, "Perfect reconstruction FIR filter banks: some properties and factorizations," IEEE Trans., Acoust., Speech Signal Process., vol.37, no.7, pp.1057-1071, July (1989).
 [6] A.K. Soman, P.P. Vaidyanathan and T.Q. Nguyen, "Linear phase paraunitary filter banks: theory, factorizations and designs," IEEE Trans., Signal Process., vol.41, no.12, pp.3480-3496, Dec. (1993).
 [7] R.L. Queiroz, T.Q. Nguyen and K.R. Rao, "The GenLOT: generalized linear-phase lapped orthogonal transform," IEEE Trans., Signal Process., vol.44, no.3, pp.497-507, March (1996).
 [8] S.C. Chan, "The generalized lapped transform (GLT) for subband coding applications," in Proc ICASSP, Detroit, MI, pp.1508-1511, (1995).
 [9] T. Nagai, C.W. Kok, M. Ikehara and T.Q. Nguyen, "Design and lattice structure of FIR paraunitary filter banks with linear phase," IEICE Trans., Fundamentals, vol.E80-A, no.4, pp.712-721, April (1997).
 [10] L. Gan and K. Ma, "A simplified lattice factorization for linear-phase perfect reconstruction filter bank," IEEE Signal Processing Letters, vol.8, no.7, pp.207-209, July (2001).
 [11] 井澤裕司, "多次元直交空間の回転・置換群を用いた直線位相 LOT の設計手法," 画像電学誌, Vol.39, No.1, pp.23-35, Jan. (2010).
 [12] 井澤裕司, "多次元直交空間における回転モデルを用いた直線位相 LOT の設計手法," 画像電学誌, Vol.39, No.4, pp.454-462, July (2010).
 [13] 井澤裕司, "多次元直交空間における回転モデルを用いた直線位相一般化 LOT の設計手法," 信学論 A, Vol.J94-A, No.1, pp.1-17, Jan. (2011).
 [14] 王金雲, 井澤裕司, 高橋速巳, "4 次元一般化 LOT の完備な回転モデルとその類別," 平成 24 年度電子情報通信学会信越支部大会予稿, 2D-2, p.36, Sep. (2012).
 [15] 吉川圭二, "群と表現, 理工系の基礎数学 9," 岩波書店 (1996).
 [16] 山内恭彦, "回転群とその表現," 岩波書店 (1957).

井澤 裕司 : 昭 51 東大・工・産業機械卒, 昭 53 同大大学院修士課程修了, 同年(株)日立製作所中央研究所入社, 平 5 信州大・工・講師, 平 7 同助教授, 工博, 画像符号化, 画像信

号処理に関する研究に従事。

高橋 速巳：平 4 東大・教卒，同年三菱倉庫（株）入社，平 8 宮崎県庁入庁，平 24 信州大学大学院修士課程修了，画像符号化に関する研究に従事。