3 次元代数多様体

ー有理性判定問題への特別な注意のもとにー

L．ロス

平成 31 年 7 月 4 日

まえがき

この本は、ー著者の報告 (a) （Algebraic Threefolds, Rend. di Mat. (5) **10**, 207 (1951))、古典的な代数幾何学的観点からの研究に基づいているが、それに取って代わるものではないー　古典的代数幾何学的観点とはいえ、いくつかの点で、超越的、位相的な理論の助けを必要としているので、必要なときはいつでも、この超越的、位相的な理論の簡単な説明を与えている。私達はまた、私達の結果の高次元多様体への種々の拡張を示すとともに、望ましい場合は、一般から特殊へ移行することによって、この過程を逆転させている。

本のサブタイトルは、いくらかの説明を必要とするだろう：それは、曲面論において、一般的に、しかし変化しないというわけではないが、解として、有理曲面、または線織面を持つような型の問題、したがって、３次元代数多様体の研究においても、それ自身極めて自然であるような型の問題を記述することを目指している。しかしながら、この分野においては、似たような問題の解は、現在のところ　ー多分、常にー　厳密さからははるかに遠いし、また、決して同じ程度には、双有理的、または線織的３次元多様体に到達することはないであろう。

本の詳しい構成は、以下に続く内容の一覧から見ることができる。一般的なプランは：第 I − III 章ーそれらはサブタイトルを持たないーにおいては、対応する曲面論　ーそれに関しては、Enriques (a) (Le superficie algebriche, Bologna 1949) と Zariski (a) (Algebraic surfaces, Berlin 1935) を参考として挙げるー　における と同様に示される結果は証明なしで述べる；残りは、可能な限り、少なくとも証明の方針を述べる。他方、第 IV − VI 章の主題については、スペースの許す限り最大限展開することにする。

曲面論の研究に関する上の参考文献は、少なくともある程度は、この主題に通じている人達へのものである。しかし、このシリーズ中の本は、できる限り、それ自身で完結していることを目指しているので、非専門家向けに、それ以上のものを、つまり、この研究の底に横たわっている主要な概念および定理の簡単なサーベイという形をとった付録を提供した。我々は、これが必要な背景を与えることにいくらかの働きをすることを願っている；ともかく、少なくともそれは、定義の有用な要約として、役に立つだろう。しかし、それは、単なるオプションとして位置づけられるので、本の初めではなく、終わりに置いた。

後は、超曲面に関する古典的幾何に関する知識は仮定すること、および、特に言及しない限りは、以下におけるすべての多様体は、代数的で既約、かつ複素射影空間の中で定義されていること；最後に、参考文献は、歴史的というよりは実用的興味を持っているものを主としたので、網羅的ではないことを付け加えることが残っているのみである。

ロンドン、1955 年 9 月

Leonard Roth

目 次

第1章　不変量論

1.1　通常特異点．射影的特性数

1.2　S_4 における随伴素因子

1.3　一次系の特性数

1.4　ヤコビアン系．標準系

1.5　算術種数．不正則数

1.6　仮想算術種数

1.7　随伴系

1.8　関係式 $p_3 = P_a$

1.9　随伴系の基本性質．絶対不変量 P_a

1.10　例

1.11　一次種数 1 の 3 次元代数多様体

第2章　同値な系

2.1　導入

2.2　共変点の集合

2.3　不変列と系

2.4　さらなる展開

2.5　高次元多様体への拡張

第3章　曲面の系

3.1　リーマン・ロッホの定理

3.2　応用と拡張

3.3　完全交叉のみを含む多様体

3.4　基底の理論

3.5　ピカール多様体の応用

第 4 章　有理性の判定条件

4.1　導入

4.2　ネーターとエンリケスの標準形

4.3　$K(S_h)$ において単有理である多様体

4.4　有理曲線の合同を含む多様体

4.5　エンリケスの定理と応用

4.6　指数が 1 よりも大きな合同

4.7　単割線の一般的問題

4.8　楕円曲線または超楕円曲線の系を含む多様体

4.9　与えられた曲線切断を持つ 3 次元多様体

4.10　有理曲面の系を含む 3 次元多様体

4.11　ファノの定理と関連した結果

4.12　$p^{(1)} \leqq 1$ を満たす曲面の系を含む 3 次元多様体

4.13　最大次元の曲面の一次系

第 5 章　同伴問題

5.1　導入

5.2　同伴が終結する或る多様体

5.3　反標準系を持つ 3 次元多様体

5.4　3 次元ファノ多様体

5.5　3 次元ファノ多様体の分類

5.6　単有理または双有理のための条件

5.7　第一種の 3 次元多様体

5.8　素因子切断がエンリケス曲面である 3 次元多様体

5.9　非有理性の問題

5.10　いくつかの未解決問題

第6章　連続変換群

6.1　自己共線形化の群

6.2　一般の自己同型

6.3　アーベル多様体と準アーベル多様体

6.4　擬アーベル多様体

6.5　楕円および超楕円3次元多様体

6.6　有限な連続自己同型群を持つ3次元多様体

6.7　高次元多様体への拡張

6.8　他の型の自己同型

第7章　補章

付録

以下の付録は、この本で用いられる主要な概念、記号、結果への簡便なガイドとして役立てられることを意図している。いかなる詳しい証明も参考文献も与えない；しかし、曲線、曲面の不変幾何に関する限りにおいては、「参考文献」中の適当な論文を参考としてあげた。一方、射影幾何に関しては適当な標準的テキストを参考にされたい。

1. 複素射影幾何　r 次元複素射影空間 S_r、または $[r]$ の点の斉次座標とは、すべてがゼロではない $r+1$ 個の複素数の順序づけられた組（または、数ベクトル）$\{x_0, x_1, \cdots, x_r\}$ のことである；そして、対応する要素が比例する二つの組は同じ点を決める。射影幾何は、幾何的配置（configuration）の、線形群、または射影変換群で不変な性質を扱うー線形群、射影変換群は次の形をしている；

$$\varrho x_i' = a_{i0}x_0 + a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ir}x_r \quad (i = 0, 1, \cdots, r), \tag{1}$$

ここで、ϱ は比例定数で、行列式は $|a_{ij}| \neq 0$ である。

この幾何においては、我々は斉次多項式による方程式系のみを考える；しかし、ときによっては、代わりに、比 x_i/x_0 $(i = 1, 2, \cdots, r)$ を非斉次座標として採用すると都合が良い。この場合、例外的な点を除外するために、$x_0 = 0$ の点を想像上の点、または非固有な点のクラスとして導入する。

2. 線形空間、射影　座標が,、方程式

$$a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_rx_r = 0 \tag{2}$$

を満たす点の全体は、**超平面**（$prime$）と呼ばれ、S_{r-1}、または、$[r-1]$ と表わされる。$r-k$ 個（$0 \leqq k \leqq r-1$）の一次独立な超平面の共通部分、つまり、それらの超平面に共通な ∞^k 点の全体は、k **次元線形空間**と呼ばれ、S_k、または、$[k]$ と表わされる。特に、$k = 0, 1, 2$ に対しては、点、曲線、曲面が得る。この定義より、S_k は座標ベクトルが一次独立な任意の $k+1$ この点によって、一意的に決められる。S_k のパラメータ表示は次の形で与えられる；

$$\varrho x_i' = a_{i0}\lambda_0 + a_{i1}\lambda_1 + \cdots + a_{ir}\lambda_r \quad (i = 0, 1, \cdots, r), \tag{3}$$

ここで、$\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_r$ は、斉次パラメータである。

この幾何においては、重要な役割が**射影**によって演じられる。S_r の点 P の S_h （$0 \leqq h \leqq r-2$）を**頂点**とする S_{r-h-1} の上への射影は、P とその**頂点**を通る空間と S_{h+1} との交わりとして定義される。この概念は以下において、さらに展開される。

3. 超曲面 **超曲面**は、その座標が次の形の方程式を満たす点の軌跡のことである；

$$f(x_0, x_1, \cdots, x_r) = 0, \tag{4}$$

ここで f は、ある位数 n の斉次多項式である。この超曲面は、位数 n であると言われ、V^n_{r-1}、または W^n_{r-1} と表わされる。$n = 2$ の場合、**2 次曲面**と呼ばれる。V^n_{r-1} は、f が既約であるか、可約であるかに応じて、**既約**、または**可約**であると言われる。

4. ジェネリックな点 代数幾何学においては、**ジェネリック**と**一般的**という概念は度々現れるし、また、大変重要である。以下、示されるように、それはそれが起こってくる文脈において、いくつかの仕方で解釈される。

I. V^n_{r-1} の点に対して課せらる、しかし、その超曲面のすべての点で満たされるとは限らない、ある与えられた（代数的な）条件 c を考える。ある問題においては、条件 c を満たす V^n_{r-1} の点を除外したい場合が起こる：この場合、V の残りのすべての点は、**ジェネリック**、または、**一般的**と言われる。

II. V^n_{r-1} が**既約**である場合には、この概念は扱っている問題に対して相対的であるので、絶対化されるかもしれない。ここで、座標が不定元であるような、したがって、V^n_{r-1} のすべての点によっては満たされないような条件を満たすことはないような点を想定してみる。この事が可能であるためには、(4) における多項式 f が因子に分解しないことが必要である。各因子は V^n_{r-1} 全体では消えないが、部分では消える；つまり、V^n_{r-1} は既約である必要がある。既約性の条件は、ジェネリックな点の存在を保証するには十分でもある。

III. 上の概念は、以下の例ーそれぞれは自己説明的であるーが示すように、自明な方法で拡張される。

a) V^n_{r-1} と n 個の異なる点で交わるような一般の直線。[これは (3) と (4) から従う]

b) $[r]$ においては、$[k]$ と $[r-k]$ は一般に一点で交わる。（§2）

c) 与えられた頂点からの一点の射影は一般には一点である。

d) V^n_{r-1} の一般の点 P における**接線**（i.e. そこで、V^n_{r-1} と、少なくとも 2 重に交わるような直線）は、点 P における接平面と呼ばれる超平面に含まれる。V^n_{r-1} の点は、そこにおける接平面が不定のとき、i.e. すべての微分が問題の点で消えるとき、**特異点**と呼ばれる。

5. 代数多様体 S_r の与えられた有限個の超曲面に共通な点の全体は、代数多様体、または多様体 V と呼ばれる。すべての i（$i = 1, 2, \cdots, r-k-1$）に対して、V と交わらない S_i が存在するが、すべての S_{r-k} が V と交わる（i.e. 共通の点を持つ）とき、V は**次元** k を持つという。

S_{r-k-2} と S_k を、V に関して、かつ、互いに一般の位置にある 2 つの部分空間とする；そして、W を V の S_{r-k-2} から S_{k+1} への**射影**（i.e. V の点 P の射影 P' の軌跡）とする。もし、W が超曲面（可約の場合もある）ならば、V は**純**であるという。さらに W が既約ならば、V も同様に既約である。W の位数 ーそれは、V が一般の S_{r-k} が交わる交点の数に等しいーは、V の位数と呼ばれる；そして V を、記号 V^n_k で表わす。$k = 1, 2, 3$ のとき、それぞれ、曲線、曲面、3-$fold$ である。

逆のことが言及されない限り、V は既約であると仮定する；そのような多様体に対しては、**一般の点**の概念をあてはめることができる（§4）；すると、V の一般の点 P においては、W の点 P' における接超平面に対応して、一意的に決まる空間 S_k が存在する；これは、P における V の接空間と呼ばれる。V の点 P は、そこでの接空間が不定であるとき、**特異点**（または、多重点）と呼ばれる。特異点を持たない多様体は**非特異**と呼ばれる。

6. 射影的特性数 多様体の**位数**は、最も簡単な**射影的特性数**、i.e. つまり、一般の射影で不変な特性数の例である。S_r（$r \geqq 2$）の中の曲線に対しては、**階数**（$rank$）、i.e. 一般の位置にある与えられた S_{r-2} と交

わる接線の個数を考えなければならない。S_r（$r \geqq 4$）の中の曲面に対しては、四つの重要な射影的特性数がある。つまり、一般の**超平面切断曲線**（超平面による切断）の位数と階数；**階数**、つまり、一般の S_{r-2} と一直線で交わる接平面の個数; **中間階数**（$ceto$)、つまり、一般の S_{r-4} と一点で交わる接平面の個数である。

7. いくつかの特別な多様体 次のタイプの多様体は我々の研究において、特に重要である。

I. **セグレ多様体**. S, S' を任意次元の二つの空間とする：P, P' がそれぞれ、S, S' を動くとき、順序づけられない組 (P, P') の全体集合をセグレ多様体、または S と S' の**積**といい、$S \times S'$ と書く。この概念は直ちに、任意個数の空間の積に拡張される。

II. **積多様体**. V, V' を任意の二つの既約多様体とすると、積 $V \times V'$ は上と同様に定義される；そしてこの定義は、任意個数の指定された次元を持つ多様体の積に拡張される。

III. **グラスマニアン**. $[r]$ において空間 $[k]$ は、$k+1$ 個の一般の点によって一意的に決められる。これらの点の座標からなる行列より、$\binom{r+1}{k+1}$ 個の $k+1$ 次の小行列式を引きだす。これらを我々は、$[k]$ のグラスマン座標と呼ぶ。これを $[R]$、$R = \binom{r+1}{k+1} - 1$、の斉次座標として取って、多様体 $G(k, r)$ －それは問題の空間のグラスマニアンと呼ばれる－の点の、空間 $[k]$ の表現を得る。最も単純で意味のある例は、$k = 1$, $r = 3$ の場合に与えられ、[5]（Rend. Acc. Lincei (6) **21**, 314 (1934)）の 2 次曲線である。

8. 双有理幾何

座標が $(x_0, x_1, \cdots, x_r)$、$(x'_0, x'_1, \cdots, x'_r)$ である、S_r と S'_r の二点 P, P' が、関係式

$$\varrho x'_i = f_i(x_0, x_1, \cdots, x_r) \quad (i = 0, 1, \cdots, r), \tag{5}$$

とする。ここで、関数 f_i は同じ次数の多項式である。方程式（５）は、S_r の上の S'_r の**単有理的**な表示、すなわち、S'_r の S_r への変換を与える；点 P には一意的な点 P' が対応するが、点 P には n 個の異なる点 P' が対応する。ここに、n は一般に $n > 1$ である。しかしながら、$n = 1$ のとき、方程式は有理的に可逆である：この場合、それらは、S'_r から S_r への（または、S_r から S'_r への）**双有理**（Cremona）変換を表わすという。

一般的には、(5) は有理的に可逆ではないが、P がある多様体 V_k を動くとき、可逆であることが起こるかも知れない；このとき、P' は第二の多様体 V'_k を動く：このとき、V_k V'_k は互いに他の**双有理変換**である、または、**双有理同値**であるという。特に V'_k が V_k と一致する場合、V_k から自身への双有理変換（**自己同型**）を得る。

双有理幾何は、双有理変換で不変な代数多様体の性質を研究する；この研究のその目的のために、双有理的に同値な多様体のクラスの中から、例えば、ある射影モデルのような、任意の特別なメンバーが選ばれることがあるかも知れない。双有理幾何学の発展において、射影幾何が重要な役割を果たすのはこの理由による。

興味ある多様体の一つのクラスは、空間 S_k に双有理同値な多様体である；そのような多様体は、**双有理的**と呼ばれる。それらの多様体は、

$$\varrho x'_i = f_i(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k) \quad (i = 0, 1, \cdots, k), \tag{6}$$

の型をしたパラメーター表示を持つ。ここで、$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ は、**本質的な**（非斉次）パラメーターで、f_i は（6）が有理的に可逆であるような有理関数である。もっと一般的には、もはや有理的に可逆ではないような方程式による有理的なパラメーター表示を持つような多様体 V_k を考察する；そのような多様体は、**単有理的**と呼ばれる。この概念は、$k \geqq 3$ の時にのみ意味を持つ、なぜならば、**単有理的であるような曲線、または曲面は有理的でもある**ことが知られているからである。したがって、問題としている特別な表示に言及することなく、**有理的**曲線、または曲面というのが普通である。

V_k と V'_k の間の対応は、例えそれが有理的である場合も、一般的には例外的な特徴を持つことは注意すべきである。例えば、射影のプロセスを考えよ。それは勿論、特別な双有理変換の一種である。S_3 の曲線 V_1 が、点 O から平面の上に射影されるとき、射影 V'_1 は、O と一直線上にある V_1 の点の組から生じる、いくつかの二重点を持つかもしれない。別のタイプの例外は、S_4 の曲面 V_2 を、それ自身の単純点 O から S_3 の上に射影するときに生じる；この場合、点 O は V'_2 の上に対応する点を持たないが、V_2 の O における接方向からなる O の**近傍**は、V'_2 の上の直線に対応する。

例. すべてのセグレ多様体と、すべてのグラスマニアンは有理的である；しかし、対応する線形空間の上の表示は、一般的には例外的な特徴を有する。

9. 曲線上の幾何 $k=1$ の場合の双有理幾何、すなわち、曲線上の幾何はすこぶる簡単であり、したがって結果は完全である。状況を単純にする最初の要因は、**任意の曲線は** S_R **（**$R \geqq 3$**）の非特異曲線に双有理的に変換される**という結果である。この曲線の一般の頂点から平面への射影は、有限個の結節点、すなわち、そこにおける二つの異なる接線方向をもつような二重点を持つ（§8)。この種の平面曲線ー射影とは限らないーは、**通常特異点**を持つと言われる。以下、すべてにおいて、議論する曲線は非特異か、通常特異点を持つ平面曲線と仮定する。

高次のタイプの特異点、e.g. 尖点、または、一致する接線方向を持つかもしれない三重点を持つ平面曲線に関しては、その曲線の双有理変換を繰り返すことによって、より低い重複度を持つ特異点の、そして最終的には結節点のセットに解消されるような系統的な理論が存在する。この理論における重要な概念は**近接点** (proximate point) の概念である。それによって、複雑なタイプの特異点は、便宜的に単純な特異点の繋がりと見なされる。

曲線上の幾何は、これから導入する点の集合の**線形系**の概念に基礎を置いている。$\varphi_i = 0\,(i=0,1,\ldots,r)$ を、$S_R\,(R \geqq 2)$ の中の $r+1$ 個の同じ次数の一次独立な超曲面の方程式とする；このとき、方程式

$$\lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_r\varphi_r, \tag{7}$$

ここで、$\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ はパラメーター、は**次元、または、自由度** r **の線形系**と呼ばれる；$r=1,2,3$ の場合、それぞれ、**線形な（または、有理的）ペンシル、ネット、ウェッブ**を得る。この系は、曲線 $\mathfrak{C}$ ー同じく S_R の中にあると仮定ー を、線形系と呼ばれる対応する点の集合でカットする。そのような系の最も簡単な例は、S_R の超平面で $\mathfrak{C}$ の上にカットされる系で与えられる。

系 (7) は $\mathfrak{C}$ 上に、いくつかの固定点、つまり**底点**をもつかも知れない；その場合、通常、系の集合は変動点だけからなるものと考えた方が都合が良い。いかなる場合にも、一般の集合の点の個数は、その系の**位数**と呼ばれる。

この概念の重要性は、**曲線の任意の双有理変換によって、一次系は一次系に移される**という事実にある。なぜなら、$\mathfrak{C}'$ を $\mathfrak{C}$ の方程式 (5) による双有理変換とすると、一次方程式 (7) は別の一次方程式に移されるので、$\mathfrak{C}$ の上の一次系は、$\mathfrak{C}'$ の上の同様な系に移される；また、方程式 (5) は $\mathfrak{C}'$ 上、有理的に可逆なので、$\mathfrak{C}'$ の上の任意の一次系は、$\mathfrak{C}$ の上の一次系に移される。

上の結果は、双有理的に同値なクラスの任意の都合の良いモデルを $\mathfrak{C}$ に取ることを可能にする；我々は、度々このモデルとして、通常特異点を持つ平面曲線を取る。

一次系の理論は、関数論の言葉を用いても定式化できる。φ_0, φ_1 を、$\mathfrak{C}$ の上で恒等的に零にならない、座標系で同じ次数を持つ二つの任意の多項式とする；このとき、比 $\varphi_0 : \varphi_1$ は、$\mathfrak{C}$ の一般の点で、一意的に決まる有限の値を取り、これは、$\mathfrak{C}$ の点の**有理関数**と呼ばれる。この関数 $\mathfrak{R}$ は、共に適当に重複度を数えることによって、極と同じだけの零点を持つ。λ を任意の与えられた定数とすると、関数 $\mathfrak{R}-\lambda$ の零点の集合は、$\mathfrak{C}$ の**レベル集合** (set of constant level）と呼ばれる；明らかにその集合は、（可能性として）いくつかの固定点の残りの部分として、超曲面の一次ペンシル $\varphi_1 - \lambda\varphi_0 = 0$ によって、$\mathfrak{C}$ の上にカットされる。そして、もっと一般的に、記号を自然に拡張することによって、任意の一次系は、

$$\lambda_1\mathfrak{R}_1 + \lambda_2\mathfrak{R}_2 + \cdots + \lambda_r\mathfrak{R}_r$$

の形をした有理関数のすべてのレベル集合の集まりと見なすことができる。

10. 随伴曲線と完備系 $\mathfrak{C}$ を d 個の結節点を持つ平面曲線とする; このとき、すべての結節点を単純に通る曲線を、$\mathfrak{C}$ に**随伴している**という。明らかに、指定された位数を持つすべての随伴曲線は一次系を、つ

まり、その位数を持つ平面曲線で、それら d 個の結節点を通るという条件を満たす曲線からなる部分系をなす。

随伴曲線の意義は次の二つの定理にある：

a) $\mathfrak{C}$ 上の任意の一次系は、（可能性として）$\mathfrak{C}$ 上の固定点集合を引くと、残りの部分が、ある位数の随伴曲線によってカットされる。

b) ある指定された位数の随伴曲線は、**完備系**、つまり、それ以上豊富な同じ位数の一次系には含まれない一次系を切り出す。

完備一次系の概念は、興味ある射影幾何における対応物を持っている。$S_\mathbf{R}$ の中の超平面が、その上に完備な一次系を切り出すという性質を、$S_\mathbf{R}$ の中の曲線が持つとする：この事は、この曲線がより高い次元の空間の中の同じ次数の別の曲線の射影としては得られない事を意味する。そのような曲線は、$S_\mathbf{R}$ の中で**正規** (normal) であると言う。

b) より、$\mathfrak{C}$ の与えられた点集合を含むすべての一次系は、その集合を含む一意的に決まる完備一次系に属する。その集合は、自由度ゼロの場合もある、つまり、その集合は、$\mathfrak{C}$ 上**孤立**している場合もある。

位数 n、**自由度**（または次元）r の一次系は、記号 g_n^r で表わす。明らかに、その系の丁度一つの集合だけが、$\mathfrak{C}$ の r 個の一般の点を含むようにできる。

Ex. $\mathfrak{C}$ が非特異な平面 3 次曲線とすると、$\mathfrak{C}$ のすべての点は孤立している。なぜなら、そうでないとすると、$\mathfrak{C}$ は g_1^1 を含むことになり、したがって、有理的となる（cf. §14）

11. 線形同値　これから導入する概念は、代数幾何においては基本的である。我々は、$\mathfrak{C}$ 上の二つの点集合 α, β は、それらがともに $\mathfrak{C}$ 上の一つの線形系に属する時、**線形同値**であるという：このとき、$\alpha \equiv \beta$ と書く。言いかえると、共通点を除いた後で、α と β がそれぞれ、$\mathfrak{C}$ 上のある有理関数の零点集合と極集合であるとき、$\alpha \equiv \beta$ である。

集合の間の**線形同値**の概念は、対称的、自律的（reflexive）、推移的、かつ、加法的である。これらの性質のうち、最初の三つは自明であるが、最後の性質は、$\mathfrak{C}$ 上の二つの有理関数の積は、それ自身 $\mathfrak{C}$ の有理関数であるという注意から出てくる。

α が典型的な集合である線形系は、$|\alpha|$ によって表わされる；通常、この記号は、α によって定義される、（一意的な）完備な系を表わす。同様に記号 $|\alpha+\beta|$ は、集合 $\alpha+\beta$ によって定義される完備な系を表わす。それは $|\alpha|$ の集合を $|\beta|$ の集合に加えることによって得られるものと同じものである；特に、$\beta=\alpha$ の場合、その系は、$|2\alpha|$ と表わされる；同様、$|\alpha|$ の任意の倍が定義される。

12. 同値の系　集合の差に関しては、β が α に含まれる限りにおいて、$\alpha-\beta$ は実効的に（effectively）存在する；特に、集合 $\alpha-\alpha$、それを**零集合**（nul set）と呼ぶ、は実効的である。ここで、$\mathfrak{C}$ 上の二つの実効的な集合の差 $\alpha-\beta$ を、二つの差集合 $\alpha-\beta$、$\alpha'-\beta'$ は $\alpha+\beta'=\alpha'+\beta$ であるとき、すなわち、集合 $\alpha+\beta'$ と $\alpha'+\beta$ が一致するとき、同じ仮想集合を定義するという約束のもとに、**仮想集合**（virtual set）を定義する。

そのように定義された仮想集合の世界では、すべての実効集合 α に対して、集合 $-\alpha$、つまり、（一意的な）零集合と集合 α の差、は存在する。

仮想集合の加法と減法は、言うまでもないほど自明なルールによって定義される；他方、$\alpha-\beta \equiv \gamma-\delta$ の形の同値は、実効的な集合の世界において、$\alpha+\delta \equiv \beta+\gamma$ であるときに成り立つ。

仮想集合 $\alpha-\beta$ の位数は、α と β の位数の差である。

実効的な集合から仮想的な集合への移行は、それは、算術における、負の整数への移行の類似であるが、直ちに**同値の系**（series of equivalence）の概念 i.e., 互いに同値な仮想集合の集まり、それは、可能性として、完備な一次系をなす実効的な集合のすべてをも含むーに至る。そのような概念は、この理論におけて強力な統一的な力となる。

13. ヤコビ系、標準系 曲線 $\mathfrak{C}$ の上で、α を代表元とする系 g_n^1 を考える。g_n^1 の **2 重点**は、α が属する系の集合の中で、２回数えられる α の点とし定義される；そして、g_n^1 のすべての２重点の集合は、g_n^1 のヤコビ集合と呼ばれ、α_j によって表わされる。

例. g_n^1 が一般の点 P を通る直線のペンシルによって、$\mathfrak{C}$ 上、カットされる場合、２重点は、P からの接線の接点であり、α_j は、そのようなすべての接点の集合であり、P の第一次極集合の上にある。

ヤコビ集合は、次の性質を持つ：

参考文献（以下は原本の「参考文献」ではない）

[1] 岩堀長慶; 線型不等式とその応用 -線型計画法と行列ゲーム-, 岩波書店, 東京 (1977).

[2] 石田正典; トーリック多様体入門 -扇の代数幾何-, 朝倉書店, 東京 (2000)

[3] 小田忠雄; 凸体と代数幾何学, 紀伊国屋書店, 東京 (1985).

[4] G.M. ツィーグラー 著, 八森正泰 / 岡本吉央 訳; 凸多面体の数学, シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社, 東京 (2003).

[5] William Fulton; Introduction to Toric Varieties, Princeton University Press, Princeton, Newjersey (1993).

[6] T.Oda; Lecture on Torus Embeddings and Applications(Based on Joint Work with Ktsuya Miyake), Tata Inst. of Fund. Research **58**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1978).

[7] V.V.Batyrev; Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties, J.Algebraic Geom. **3** (1994),493-535.

[8] V.I.Danilov; The geometry of toric varieties, Russian Math. Surveys 33 (1978), 97-154; Uspehi Mat. Nauk **33** (1978), 85-134.

[9] G.Kmpf, F.Knudsen, D.Mumford and B.Saint-Donat; Toroidal Embeddings I, Lecture Notes in Math. **339**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1973).

[10] Richard P. Stanley; The number of faces of simplicial convex polytopes, Advances in Math. **35** (1980), 236-238.

[11] Louis J. Billera & Carl W. Lee; A proof of the sufficiency of McMullen's conditions for f-vectors of simplicial polytopes, J. Combinatorial Theory **31** (1981), 237-255.