双曲型発展方程式に対する抽象的コーシー問題*

吉井 健太郎 (東京理大・理)

本講演では, [**5**] に基づいて Hilbert 空間における線形発展方程式の抽象定理を紹介し, 定理が時間に依存するポテンシャルをもつ Schrödinger 型方程式の Cauchy 問題に適用されることを示す.

1. Problem

Hilbert 空間 X 上の 閉線形作用素族 $\{A(t);\, t \in I := [0,T]\}$ について, 次のような線形発展方程式の抽象的 Cauchy 問題を考える:

$$\text{(ACP)} \qquad \begin{cases} (d/dt)u(t) + A(t)u(t) = f(t), & t \in I, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

2. Main Result

$\{A(t);\, t \in I\}$ についての仮定を述べるために正値自己共役作用素 S_0 と正値自己共役作用素族 $\{S(t);\, t \in I\}$ を用意する:

Assumption on $\{S(t)\}$. 作用素族 $\{S(t)\}$ は次の 3 条件を満たすものとする:

(S1) $Y := D(S_0^{1/2}) = D(S(t)^{1/2})$ かつある 定数 $K \geq 1$ で

$$\frac{1}{K}\|S_0^{1/2}u\|^2 \leq (u, S(t)u) \leq K\|S_0^{1/2}u\|^2, \quad u \in D(S(t)),\ t \in I.$$

(S2) $S(\cdot)^{1/2} \in C_*(I; B(Y,X))$. ここで $B(Y,X)$ は Y から X への有界線形作用素の全体であり, 添え字の $*$ は強作用素位相での連続性を意味する.

(S3) ある非負関数 $\sigma \in L^1(I)$ で

$$\big|\|S(t)^{1/2}v\| - \|S(s)^{1/2}v\|\big| \leq \left|\int_s^t \sigma(r)\,dr\right| \max_{r \in \{s,t\}} \|S(r)^{1/2}v\|, \quad v \in Y,\ t,s \in I.$$

Assumption on $\{A(t)\}$. 作用素族 $\{A(t)\}$ は次の 4 条件を満たすものとする:

(I) ある非負定数 $\alpha \geq 0$ で $|\operatorname{Re}(A(t)v, v)| \leq \alpha\|v\|^2,\ v \in D(A(t)),\ t \in I$.

(II) $Y \subset D(A(t))$, $t \in I$.

(III) ある非負定数 $\beta \geq \alpha$ で $|\operatorname{Re}(A(t)u, S(t)u)| \leq \beta\|S(t)^{1/2}u\|^2,\ u \in D(S(t)),\ t \in I$.

(IV) $A(\cdot) \in C_*(I; B(Y,X))$.

主定理 ([**5**]). 上記の仮定の下, (ACP) は初期値 $u_0 \in Y$ 及び非斉次項 $f(\cdot) \in C(I;X) \cap L^1(I;Y)$ に対して Y-値解 $u(\cdot) \in C^1(I;X) \cap C(I;Y)$ を一意にもつ.

注意. 主定理は Okazawa [**3**] の一般化に他ならず, $S(t) \equiv S_0$ をたんに S とすると一致する. 言い換えれば, 主定理は [**3**] の S の役割を S_0 と $\{S(t)\}$ に振り分けているとみなせる.

*本講演は岡沢登氏 (東京理大・理) との共同研究に基づくものである.

3. Schröinger equation with moving nuclei

$\Sigma^2(\mathbb{R}^N) := \{u \in H^2(\mathbb{R}^N); (1+|x|^2)u \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$ とする．このとき, 次のような中心が動く複数の Coulomb ポテンシャルを伴った Schrödinger 方程式の初期値問題を考える:

$$\text{(SE)} \qquad \begin{cases} i\,\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + V(t,x)u + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \frac{e_j u}{|x - c_j(t)|} = 0, \\ u(\cdot,0) = u_0 \in \Sigma^2 = \Sigma^2(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

ここで $N \geq 3$, u は複素数値の未知関数 $u : I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, $e_j \in \mathbb{R}$ $(j = 1,2,\ldots,m)$ とする．ベクトル値関数 $c_j : I \to \mathbb{R}^N$ $(j = 1,2,\ldots,m)$ と実ポテンシャル $V_1 : I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ は以下の仮定を満たすものとする:

$$\text{(c1)} \qquad c_j \in W^{2,1}(I;\mathbb{R}^N) \quad (j = 1,2,\ldots,m),$$

$$\text{(c2)} \qquad c_j(t) \neq c_k(t) \quad (t \in I,\ j \neq k),$$

$$\text{(V1)} \qquad (1+|x|^2)^{-1}V \in W^{1,1}(I;L^\infty(\mathbb{R}^N)),$$

$$\text{(V2)} \qquad V \in L^1(I;W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)).$$

このとき, (SE) は Σ^2-値解 $u \in C^1(I;L^2(\mathbb{R}^N)) \cap C(I;\Sigma^2(\mathbb{R}^N))$ を一意にもつ．

ポテンシャルの特異点が動くため, 直接 (SE) に主定理を適用させることはできないが, u に局所擬 Galilei 変換 ([**5**]; cf. Kato-Yajima [**2**]) という特殊な変換を施すことで特異点を固定し, (SE) を次の問題に書き換えることができる:

$$\text{(SE-}v\text{)} \qquad \begin{cases} i\,\dfrac{\partial v}{\partial t} + Da(t,y)Dv + q(t,y)v + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \frac{e_j v}{|y - c_j(0)|} = 0, \\ v(\cdot,0) = u_0 \in \Sigma^2(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

ここで $D := i^{-1}\nabla - b(t,y)$, $a : I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N\times N}$, $b : I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $q : I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.

(SE-v) に主定理を適用することで (SE-v) 及び, (SE) の解が得られる．

特に, $m = 1$ のとき, 通常の Galilei 変換 (平行移動) $v(t,y) := u(t, y + c_1(t))$ により特異点を固定できる．この場合については Baudoin-Kavian-Puel [**1**] や, Okazawa-Yokota-Y [**4**], Y [**6**] といった先行結果がある．

References

[1] L. Baudouin, O. Kavian and J.-P. Puel, *Regularity for a Schrödinger equation with singular potentials and application to bilinear optimal control*, J. Differential Equations **216** (2005), 188–222.

[2] T. Kato and K. Yajima, *Dirac equations with moving nuclei*, Ann. Inst. H. Ponicaré, Phys. Théor. **54** (1991), 209–221.

[3] N. Okazawa, *Remarks on linear evolution equations of hyperbolic type in Hilbert space*, Adv. Math. Sci. Appl. **8** (1998), 399–423.

[4] N. Okazawa, T. Yokota and K. Yoshii, *Remarks on linear Schrödinger evolution equations with Coulomb potential with moving center*, SUT J. Math. **46** (2010), 155-176.

[5] N. Okazawa and K. Yoshii, *Linear Schrödinger evolution equations with moving Coulomb singularities*, preprint.

[6] K. Yoshii, *Classical solutions to a linear Schrödinger evolution equation involving a Coulomb potential with a moving center of mass*, Funkcialaj Ekvacioj **54** (2011), 485–493.